МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2003

УДК 539.3

© 2003 г. В.В. ВАСИЛЬЕВ, Л. В. ФЕДОРОВ

ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ГРАВИТИРУЮЩЕГО ШАРА И НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ

Рассматривается однородный, изотропный, упругий шар, нагруженный объемными силами, определяемыми теорией гравитации Ньютона. Напряженное состояние шара, следующее из решения задачи теории упругости, используется для задания тензора энергии-импульса в линеаризованной задаче общей теории относительности (ОТО) и анализируются геометрические свойства полученного риманова пространства. Полученные результаты сопоставляются с линеаризованными решениями задач ОТО для ненапряженного и жидкого шара и обобщают их на случай упругого шара. Формулируется общая постановка задачи ОТО для упругой среды.

1. Решение, соответствующее гравитационной теории Ньютона. Рассмотрим однородный шар радиуса R, имеющий массу m и состоящий из материала с плотностью ρ и упругими постоянными Ламе μ и λ. Согласно теории гравитации Ньютона [1], гравитационный потенциал ψ определяется уравнением Пуассона, которое для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\frac{1}{r^2}(r^2\psi')' = 4\pi\gamma\rho \tag{1.1}$$

Здесь r – радиальная координата, $(\ldots)' = d(\ldots)/dr$, $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2 – гравитационная постоянная. Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию регулярности при $r = 0$:

$$\psi_i = 2\pi\gamma\rho r^2/3 + C$$

определяет гравитационный потенциал внутри шара и должно удовлетворять условию непрерывности потенциала на поверхности, т.е. $\psi_i(R) = \psi_e(R)$, где [1]

$$\psi_e = -\gamma m/r \tag{1.2}$$

гравитационный потенциал пустого пространства, окружающего шар, следующий из закона тяготения Ньютона. В результате получим

$$\psi_i = -\frac{\gamma m}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{1.3}$$

Гравитационные силы, действующие внутри шара, определяются следующим образом

$$g_r = -\rho\psi_i' = -kr, \quad k = 4\pi\gamma\rho^2/3 \tag{1.4}$$

Учитывая равенство (1.4), запишем уравнения равновесия центрально-симметричной задачи теории упругости в сферических координатах

$$\frac{1}{r}(r^2\sigma_r)' - 2\sigma_\theta - kr^2 = 0 \tag{1.5}$$

Входящие сюда радиальные и окружные напряжения связаны с соответствующими деформациями законом Гука

$$\sigma_r = 2\mu\varepsilon_r + \lambda\varepsilon, \quad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = 2\mu\varepsilon_\theta + \lambda\varepsilon, \quad \varepsilon = \varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta \tag{1.6}$$

Деформации ε_r и ε_θ должны удовлетворять уравнениям совместности деформаций. Для рассматриваемой задачи существуют два уравнения совместности деформаций [2]:

$$(r\varepsilon_\theta)' = \varepsilon_r, \quad (r^2\varepsilon_\theta')' = r\varepsilon_r' \tag{1.7}$$

второе из которых есть следствие первого. Действительно, подставляя ε_r из первого уравнения во второе, получим тождество. Для дальнейшего, существенно, что уравнения (1.7) получаются из условий отсутствия изменения компонентов тензора кривизны, вызванных деформированием пространства [2], т.е.

$$\Delta R_{ijkl} = R_{ijkl}(\varepsilon) - R_{ijkl}(\varepsilon = 0) = 0 \tag{1.8}$$

При этом, так как до деформации пространство является евклидовым, то $R_{ijkl}(\varepsilon = 0) = 0$. Следовательно, условие (1.8) принимает вид $R_{ijkl}(\varepsilon) = 0$ и требует, чтобы деформированное пространство также было евклидовым.

Система уравнений теории упругости (1.5)–(1.7) позволяет получить общее решение, определяющее напряжения и деформации. Введем функцию напряжений F так, что

$$\sigma_r = F/r^2 \tag{1.9}$$

Тогда из уравнения (1.5) получим

$$\sigma_\theta = (F'/r - kr^2)/2 \tag{1.10}$$

Формулируя задачу теории упругости в напряжениях, т.е. записывая первое уравнение совместности деформаций (1.7) через функцию напряжений F с помощью равенств (1.6), (1.9) и (1.10), можно получить общее решение для F и найти напряжения. Для рассматриваемой задачи, удовлетворяя условие регулярности решения в центре шара и граничное условие $\sigma_r(r = R) = 0$ на его поверхности, окончательно получим

$$\sigma_r = q(r^2 - R^2), \quad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = q(er^2 - R^2) \tag{1.11}$$

$$q = \frac{k(6\mu + 5\lambda)}{10(2\mu + \lambda)}, \quad e = \frac{2\mu + 5\lambda}{6\mu + 5\lambda} \tag{1.12}$$

2. Решение линеаризованной задачи ОТО. Как известно [3], физическое состояние среды определяется в ОТО тензором энергии-импульса T_j^i (здесь используются смешанные компоненты этого тензора, так как для рассматриваемой задачи они совпадают с его физическими компонентами). Тензор T_j^i имеет вид матрицы размера 4×4, причем для задачи статики из компонент с индексами 4 только одна отлична от нуля, а компоненты с индексами 1, 2, 3 выражаются через соответствующие компоненты тензора напряжений. Для центрально-симметричной задачи тензор энергии-импульса является диагональным и его ненулевые компоненты имеют вид [4]

$$T_1^1 = -\sigma_r, \quad T_2^2 = T_3^3 = -\sigma_\theta = -\sigma_\varphi, \quad T_4^4 = \rho c^2 \tag{2.1}$$

где c – скорость света. Тензор энергии-импульса удовлетворяет уравнению закона сохранения

$$\nabla_i T^i_j = 0 \tag{2.2}$$

Центральным в ОТО является уравнение Эйнштейна

$$\chi T^i_j = G^i_j, \quad \chi = 8\pi\gamma/c^4 \tag{2.3}$$

$$G^i_j = R^i_j - \delta^i_j R/2 \tag{2.4}$$

где G^i_j – тензор Эйнштейна, выражающийся через тензор Риччи R^i_j и его линейный инвариант R и символ Кронекера δ^i_j. Соотношения (2.3) и (2.4) выражают тензор энергии-импульса через кривизны риманова пространства и позволяют тождественно удовлетворить уравнения (2.2). Основная задача ОТО заключается в определении метрических свойств риманова пространства с помощью уравнений (2.3) и (2.4).

Для шара, состоящего из идеальной несжимаемой жидкости, т.е. для случая когда в равенствах (2.1) $\sigma_r = \sigma_\theta = -p$, где p – давление в жидкости, рассматриваемая центрально-симметричная задача является классической задачей ОТО, имеющей точное решение [3,5]. При этом метрическая форма риманова пространства, порождаемого гравитацией, принимается в виде

$$\begin{gathered} dS^2 = g_{11}dr^2 + g_{22}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - g_{44}c^2dt^2 \\ g_{11} = e^s, \quad g_{44} = e^h, \quad g_{22} = r^2 \end{gathered} \tag{2.5}$$

Здесь s и h являются функциями r, подлежащими определению (при $s = h = 0$ записанная метрическая форма соответствует евклидову пространству). С учетом (2.5) уравнение (2.2) и соотношения (2.3), (2.4) могут быть записаны в виде

$$\frac{1}{r}(r^2T^1_1)' - 2T^2_2 + \frac{1}{2}rh'(T^1_1 - T^4_4) = 0 \tag{2.6}$$

$$\chi T^1_1 = -e^{-s}\left(\frac{h'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} \tag{2.7}$$

$$\chi T^2_2 = \chi T^3_3 = -\frac{1}{2}e^{-s}\left(h'' + \frac{1}{2}(h')^2 + \frac{1}{r}(h' - s') - \frac{1}{2}h's'\right) \tag{2.8}$$

$$\chi T^4_4 = -e^{-s}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{s'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} \tag{2.9}$$

Отметим, что компоненты тензора энергии-импульса, определяемые равенствами (2.7)–(2.9), тождественно удовлетворяют уравнению (2.6).

Рассмотрим линеаризованную задачу. Представим метрические коэффициенты, входящие в квадратичную форму (2.5), следующим образом:

$$g_{11} = e^s \cong 1 + f_r(r), \quad g_{44} = e^h \cong 1 + f_t(r) \tag{2.10}$$

и предположим, что максимальные значения функций f_r и f_t малы по сравнению с единицей. Осуществляя линеаризацию равенств (2.7) и (2.9) имеем

$$\chi T^1_1 = \frac{1}{r^2}(f_r - rf_t'), \quad \chi T^4_4 = \frac{1}{r^2}(rf_r)' \tag{2.11}$$

Для определения функций f_r и f_t воспользуемся равенствами (2.11) и соответствующими равенствами (2.1). В результате получим два уравнения

$$-\chi\sigma_r = \frac{1}{r^2}(f_r - rf_t'), \quad \chi\rho c^2 = \frac{1}{r^2}(rf_r)' \tag{2.12}$$

В линеаризованной задаче базовая метрика пространства является евклидовой и уравнение (2.6) вырождается в уравнение равновесия (1.5). Для того, чтобы это показать необходимо исключить из уравнения (2.6) h' и T_4^4, воспользовавшись равенствами (2.1), (2.7) и (2.9). После довольно громоздких преобразований получим

$$\frac{1}{r}(r^2T_1^1)' - 2T_2^2 + kr^2\frac{1 + T_1^1(4 + T_1^1/(3\rho c^2))/(\rho c^2)}{1 - 8\pi\gamma\rho r^2/(3c^2)} = 0$$

Пренебрегая здесь малыми членами, включающими c^2 и учитывая равенства (2.1), придем к уравнению (1.5). Отсюда следует, что в первое уравнение (2.12) можно подставить σ_r согласно первому равенству (1.11), являющемуся решением уравнения (1.5). Таким образом получаем следующие два уравнения для функций f_r и f_t:

$$(rf_r)' = \chi\rho c^2r^2 \tag{2.13}$$

$$f_r - rf_t' = \chi qr^2(R^2 - r^2) \tag{2.14}$$

Сделаем два замечания. Во-первых, сравнивая первое соотношение (2.12) с равенством (1.9), можно заключить, что комбинация метрических коэффициентов $(rf_t' - f_r)$ в ОТО аналогична функции напряжений F в теории упругости. Эта аналогия, установленная Н.А. Кильчевским, была использована для построения функций напряжений в декартовых и криволинейных координатах в работах [4, 6]. Во-вторых, к уравнениям (2.13) и (2.14) может быть добавлено еще одно, вытекающее из равенства (2.8) и соотношения (2.1) для T_2^2. Однако поскольку в ОТО равенство (2.8) является следствием уравнения (2.6) и соотношений (2.7) и (2.9) [3, 7], в рассматриваемой задаче обсуждаемое уравнение является следствием уравнений (2.13) и (2.14). Аналогичная ситуация имеет место и в теории упругости – равенство (1.10) следует из уравнения (1.5) и выражения (1.9).

Рассмотрим решение уравнений (2.13) и (2.14) для внешней и внутренней областей шара. Для внешней области ($r \geq R$) $\rho = 0$, и уравнения принимают вид $(rf_r)' = 0, f_r - rf_t' = 0$. Отсюда следует $f_r = C_1/r, f_t = -C_1/r + C_2$. Постоянные определяются из условия совпадения получаемого решения с результатом, следующим из теории гравитации Ньютона при $r \to \infty$. Согласно [7] метрический коэффициент f_t выражается через гравитационный потенциал ψ следующим образом:

$$f_t = 2\psi/c^2 \tag{2.15}$$

Используя это условие при $\psi = \psi_e$, где ψ_e задается выражением (1.2), и полагая $C_2 = 0$, получаем для внешнего поля

$$f_t^e = -f_r^e = -\frac{2\gamma m}{c^2 r} = -\frac{\chi\rho c^2R^3}{3r} \tag{2.16}$$

Здесь учтено соотношение

$$\chi/\gamma = 6m/(\rho R^3c^4) \tag{2.17}$$

Для внутренней области ($r \le R$) решение уравнения (2.13), удовлетворяющее условию регулярности при $r = 0$, имеет вид:

$$f_r^i = \chi\rho c^2 r^2/3 \tag{2.18}$$

Тогда из уравнения (2.14) следует

$$f_t^i = \chi\rho c^2 r^2/6 - \chi q r^2(R^2 - r^2/2)/2 + C$$

Определяя постоянную C из условия $f_t^i = f_t^e$ при $r = R$, окончательно найдем

$$f_t^i = -\chi\rho c^2 R^2(3 - r^2/R^2)/6 + \chi q(R^2 - r^2)^2/4 \tag{2.19}$$

Учитывая формально равенство (2.15), и используя соотношение (2.17), можно заключить, что первое слагаемое в правой части выражения (2.19) соответствует гравитационному потенциалу Ньютона (1.3). Однако наличие второго слагаемого показывает, что решение линеаризованной задачи ОТО не совпадает с решением, следующим из теории гравитации Ньютона, так как метрические свойства пространства зависят не только от гравитационного взаимодействия, но и от напряженного состояния среды [8].

Окончательно, с учетом равенств (2.17), (2.18) и (2.19) метрические коэффициенты (2.10) для упругого шара можно записать следующим образом:

$$g_{11} = 1 + \alpha r^2 \tag{2.20}$$

$$g_{44} = 1 + \alpha(r^2 - 3R^2 + 3\alpha\beta(R^2 - r^2)^2/8)/2 \tag{2.21}$$

$$\alpha = \frac{8\pi\gamma\rho}{3c^2}, \quad \beta = \frac{6\mu + 5\lambda}{5(2\mu + \lambda)} \tag{2.22}$$

Для идеальной несжимаемой жидкости постоянная Ламе $\mu = 0$ и $\beta = 1$.

Сравним полученное решение с точным решением задачи ОТО, которое имеет вид [3,9]

$$g_{11} = \frac{1}{1 - \alpha r^2}, \quad g_{44} = \frac{1}{4}(3\sqrt{1 - \alpha R^2} - \sqrt{1 - \alpha r^2}) \tag{2.23}$$

Линеаризация первого равенства (2.23) по параметру α дает соотношение (2.20). Преобразуя второе равенство (2.23) с помощью формулы

$$\sqrt{1 - \alpha x} \cong 1 - \alpha x/2 - \alpha^2 x^2/8$$

где $x = (r, R)$, получим

$$g_{44} = 1 + \alpha(r^2 - 3R^2 + 3\alpha(R^2 - r^2)^2/8)/2$$

что совпадает с выражением (2.21) при $\beta = 1$. Давление в жидкости, согласно точному решению ОТО, имеет вид

$$p = \rho c^2 \frac{\sqrt{1 - \alpha R^2} - \sqrt{1 - \alpha r^2}}{3\sqrt{1 - \alpha R^2} - \sqrt{1 - \alpha r^2}}$$

Линеаризация по параметру α дает

$$p = \alpha\rho c^2(r^2 - R^2)/4 \tag{2.24}$$

Полагая в решении (1.11) задачи теории упругости $\mu = 0$, получим

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_\varphi = k(r^2 - R^2)/2$$

что с учетом обозначений (1.4) и (2.22) совпадает с равенством (2.24).

Таким образом, полученное решение (2.20) и (2.21) совпадает с линеаризованным точным решением задачи ОТО для жидкого шара и обобщает его на случай упругого шара.

Найдем величину ускорения свободного падения для внутренней области шара, которая определяется в ОТО следующим образом [10]:

$G = \dfrac{c^2}{g_{44}}\sqrt{\left(g_{ik} - \dfrac{g_{4i}g_{4k}}{g_{44}}\right)\Gamma^i_{44}\Gamma^k_{44}}$ $(i, k = 1, 2, 3)$, Γ^k_{ij} – символы Кристофеля. Для рассматриваемой задачи $G = c^2 g'_{44}/(2g_{44}\sqrt{g_{11}})$.

Подставляя в G метрические коэффициенты (2.20) и (2.21) и представляя результаты в форме разложения по параметру α до степени не выше второй, получим

$$G = \alpha c^2 r\{1 + \alpha(3R^2(1 - \beta/4) - r^2(2 - 3\beta/4))/2\}/2 \tag{2.25}$$

Первое слагаемое, которое с учетом обозначения (2.22) для α может быть записано в виде $G_n = 4\pi\gamma\rho r/3$ соответствует гравитационной теории Ньютона. Анализ равенства (2.25) показывает, что $G > G_n$, т.е. учет напряженного состояния шара повышает ускорение свободного падения, причем в связи с малостью параметра α этот эффект оказывается значимым при величине R порядка 10^{10} км.

Рассмотрим теперь в уравнениях ОТО предельный переход к Ньютоновой теории. Соответствующая такому приближению метрическая форма имеет вид [7] $dS^2 = dx^i dx^j + g_{44}dt^2$ $(i, j = 1, 2, 3)$, $g_{44} = c^2(-1 + f_{44})$. В рамках такого приближения гравитационное поле считается настолько слабым, что для его описания достаточно только одной компоненты g_{44}. Тогда из уравнений (2.3) и (2.4), которые можно представить в виде

$$\chi T_{ij} = G_{ij}, \quad G_{ij} = R_{ij} - g_{ij}R/2 \tag{2.26}$$

существенным является лишь одно для $i = j = 4$. Записывая его в форме, разрешенной относительно соответствующей составляющей тензора Риччи, будем иметь

$$R_{44} = \chi(T_{44} - g_{44}T/2) \tag{2.27}$$

где T – линейный инвариант тензора энергии-импульса, коэффициенты которого имеют вид [4]:

$$T_{ij} = -\sigma_{ij}\ (i, j = 1, 2, 3), \quad T_{44} = \rho c^2 \tag{2.28}$$

При $\sigma_{ij} = 0$, т.е. для ненапряженного пространства решение рассматриваемой задачи приведено в [11], где, в частности, показано, что

$$R_{44} = \Delta f_{44} \tag{2.29}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа в декартовых координатах. Учитывая, что

$$T = g^{ij}T_{ij} = -\rho c^2 - \sigma \tag{2.30}$$

где σ – линейный инвариант тензора напряжений, и подставляя равенства (2.29) и (2.30) в уравнение (2.27), получим

$$\Delta f_{44} = \chi c^2(\rho - \sigma/c^2)/2$$

Это уравнение аналогично уравнению (1.1) для гравитационного потенциала Ньютона ψ. Используя соотношение (2.15) между f и ψ и учитывая, что $\chi = 8\pi\gamma/c^4$, запишем его в традиционной форме $\Delta\psi = 4\pi\gamma\rho^*$. Здесь ρ^* – некоторая эффективная плотность среды, зависящая от среднего напряжения $\sigma_0 = \sigma/3$, т.е. $\rho^* = \rho(1-\eta)$, $\eta = \sigma_0/(3\rho c^2)$. Отсюда следует, что если $\sigma_0 < 0$, то $\rho^* > \rho$, т.е. сжимающие напряжения повышают эффективную плотность среды. Если $\sigma_0 > 0$, что, в частности, может иметь место для тела, вращающегося вокруг оси, то $\rho^* < \rho$. Однако влияние напряжений на плотность сравнительно невелико. Например, полагая для стали $\sigma_0 = 1.5$ ГПа, $\rho = 7800$ кг/м^3, получим $\eta = 7 \cdot 10^{-13}$.

3. Постановка задачи ОТО для упругой среды. Классическая постановка задачи ОТО предполагает определение 10 компонент метрического тензора g_{ij}, которые связаны с символами Кристофеля следующим образом:

$$g^{is}\left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{si}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_i}{\partial x^s}\right) = 2\Gamma^i_{jk} \tag{3.1}$$

Правые части этих уравнений в свою очередь связаны с компонентами тензора Риччи, т.е.

$$\partial\Gamma^n_{ij}/\partial x^n - \partial\Gamma^n_{in}/\partial x^j + \Gamma^n_{ij}\Gamma^m_{nm} - \Gamma^m_{in}\Gamma^n_{jm} = R_{ij} \tag{3.2}$$

где R_{ij} определяются через компоненты тензора энергии-импульса T_{ij} с помощью уравнений Эйнштейна (2.26). Подстановка Γ^j_{ik} из уравнений (3.1) в левую часть уравнений (3.2) и последующая подстановка получаемых выражений для R_{ij} в уравнения (2.26) позволяет получить 10 уравнений вида

$$L_{ij}(g_{mn}) = \chi T_{ij} \tag{3.3}$$

где L_{ij} – нелинейные дифференциальные операторы второго порядка.

Система уравнений (3.3) является полной, если компоненты тензора энергии-импульса T_{ij} известны. Однако в общем случае они выражаются через 6 компонентов тензора напряжений σ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$. Для задачи статики соответствующие выражения имеют форму равенств (2.28). Таким образом, можно заключить, что система уравнений (3.3) является полной для задач, которые в теории упругости относятся к классу статически определимых. Первая группа задач такого рода, которые традиционно рассматриваются в ОТО, относится к пустому пространству, для которого $T_{ij} = 0$. Вторая группа задач относится к несжимаемой жидкости для которой $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ и $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = p$, где p – давление, определяемое из уравнений равновесия. В общем случае сплошной среды 10 уравнений (3.3) включают 16 неизвестных: 10 компонент метрического тензора и 6 компонент тензора напряжений.

Рассмотрим деформируемую среду и предположим, что метрический тензор g_{ij} после деформации принимает вид

$$g^{\varepsilon}_{ij} = g_{ij}(1 + 2\varepsilon_{ij}) \tag{3.4}$$

Здесь ε_{ij} – тензор деформаций, имеющий в четырехмерном пространстве 10 компонент, шесть из которых связаны с напряжениями соотношениями упругости

$$\varepsilon_{ij} = f_{ij}(\sigma_{mn}) \tag{3.5}$$

Система (3.3) и (3.5) включает 16 уравнений и 26 неизвестных: 10 метрических коэффициентов, 10 деформаций и 6 напряжений. Для построения замкнутой системы необходимо еще 10 уравнений. В теории упругости в качестве таких уравнений привлекаются уравнения совместности деформаций. Однако они требуют, как уже отмечалось, чтобы деформированное пространство было евклидовым, а в ОТО пространство не является евклидовым. В то же время в ОТО существуют уравнения Эйнштейна, которые носят универсальный характер и должны быть инвариантными по отношению к деформациям среды. Таким образом, предлагается дополнить уравнения (3.3) и (3.5) следующими:

$$\Delta G_{ij} = G_{ij}(g^{\varepsilon}_{mn}) - G_{ij}(g_{mn}) = 0 \tag{3.6}$$

где G_{ij} – тензор Эйнштейна. Система (3.3), (3.5) и (3.6) включает 26 уравнений и содержит столько же неизвестных, т.е. является полной.

В качестве приложения рассмотрим постановку задачи ОТО для деформируемого шара. Уравнения аналогичные уравнениям (3.3) имеют для рассматриваемого случая форму (2.7), (2.8) и (2.9). С учетом равенств (2.1) получим

$$\chi\sigma_r = e^{-s}\left(\frac{h'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} \tag{3.7}$$

$$\chi\sigma_\theta = \frac{1}{2}e^{-s}\left(h'' + \frac{1}{2}(h')^2 + \frac{1}{r}(h' - s') - \frac{1}{2}h's'\right) \tag{3.8}$$

$$\chi\rho c^2 = -e^{-s}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{s'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} \tag{3.9}$$

Эти три уравнения содержат четыре неизвестных: s, h, σ_r, σ_θ. Считая среду линейно упругой, используем в качестве соотношений (3.5) закон Гука (1.6).

Получим для рассматриваемой задачи уравнения (3.6). Для метрической формы (2.5) компоненты тензора Эйнштейна (2.4) имеют вид

$$G^1_1 = \frac{1}{2g_{11}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{g'_{22}}{g_{22}}\right)^2 + \frac{g'_{22}g'_{44}}{g_{22}g_{44}}\right] - \frac{1}{g_{22}} \tag{3.10}$$

$$G^2_2 = -\frac{1}{4g_{11}}\left[2\frac{g''_{44}}{g_{44}} - \left(\frac{g'_{44}}{g_{44}}\right)^2 + 2\frac{g''_{22}}{g_{22}} - \left(\frac{g'_{22}}{g_{22}}\right)^2 - \frac{g'_{22}g'_{11}}{g_{22}g_{11}} - \frac{g'_{44}g'_{11}}{g_{44}g_{11}} + \frac{g'_{22}g'_{44}}{g_{22}g_{44}}\right] \tag{3.11}$$

$$G^4_4 = \frac{1}{g_{11}}\left[\frac{g''_{22}}{g_{22}} - \frac{1}{4}\left(\frac{g'_{22}}{g_{22}}\right)^2 - \frac{g'_{22}g'_{11}}{2g_{22}g_{11}}\right] - \frac{1}{g_{22}} \tag{3.12}$$

Полагая здесь как и ранее $g_{11} = e^s$, $g_{22} = r^2$, $g_{44} = e^h$ получим выражения, совпадающие с правыми частями равенств (2.7), (2.8) и (2.9), т.е.

$$G^1_1(g_{mn}) = -e^{-s}\left(\frac{h'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} \tag{3.13}$$

$$G^2_2(g_{mn}) = -\frac{1}{2}e^{-s}\left(h'' + \frac{1}{2}(h')^2 + \frac{1}{r}(h' - s') - \frac{1}{2}h's'\right) \tag{3.14}$$

$$G^4_4(g_{mn}) = -e^{-s}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{s'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} \tag{3.15}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что составляющая G^2_2 не является независимой и выражается через G^1_1 и G^4_4 следующим образом [3]:

$$G^2_2 = \frac{1}{2r}(r^2G^1_1)' - \frac{rh'}{4}(G^1_1 - G^4_4)$$

Таким образом в рассматриваемой задаче имеется два уравнения типа (3.6) – для G_1^1 и G_4^4. Для вывода этих уравнений запишем равенства (3.4) $g_{11}^{\varepsilon} = e^s(1 + 2\varepsilon_r)$, $g_{22}^{\varepsilon} = r^2(1 + 2\varepsilon_\theta)$, $g_{44}^{\varepsilon} = e^h(1 + 2\varepsilon_t)$.

Подставляя эти выражения в соотношения (3.10) и (3.12), получим

$$G_1^1(g_{mn}^{\varepsilon}) = \frac{1}{e^s(1+2\varepsilon_e)}\left\{\left(\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon'_\theta}{1+2\varepsilon_\theta}\right)^2+\left(\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon''_\theta}{1+2\varepsilon_\theta}\right)\left(h'+\frac{2\varepsilon'_t}{1+2\varepsilon_t}\right)\right\}-\frac{1}{r^2(1+2\varepsilon_\theta)}$$

$$G_4^4(g_{mn}^{\varepsilon}) = \frac{1}{e^s(1+2\varepsilon_r)}\left\{\frac{2}{r^2}+\frac{2(r\varepsilon''_\theta+4\varepsilon'_\theta)}{r(1+2\varepsilon_\theta)}-\left(\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon'_\theta}{1+2\varepsilon_\theta}\right)^2-\right. \tag{3.16}$$

$$\left.-\left(\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon'_\theta}{1+2\varepsilon_\theta}\right)\left(s'+\frac{2\varepsilon_r}{1+2\varepsilon_r}\right)\right]-\frac{1}{r^2(1+2\varepsilon_\theta)}$$

Таким образом, уравнения (3.6) принимают для рассматриваемой задачи вид

$$G_1^1(g_{mn}^{\varepsilon})-G_1^1(g_{mn}) = 0, \quad G_4^4(g_{mn}^{\varepsilon})-G_4^4(g_{mn}) = 0 \tag{3.17}$$

Входящие сюда компоненты тензора Эйнштейна определяются равенствами (3.13), (3.15) и (3.16). Для малых деформаций линеаризация уравнений (3.17) по ε дает

$$\begin{gathered}2r(\varepsilon'_\theta+\varepsilon'_t)+r^2h'\varepsilon'_\theta-2\varepsilon_r(1+2rh')+2e^s\varepsilon_\theta = 0\\ r^2\varepsilon''_\theta+\varepsilon'_\theta(3r-r^2s'/2)-r\varepsilon'_r-\varepsilon_r(1-s'r)+e^s\varepsilon_\theta = 0\end{gathered} \tag{3.18}$$

Для евклидова трехмерного пространства, т.е. при $s = 0$, $h = 0$, $\varepsilon_t = 0$, эти уравнения вырождаются в уравнения совместности деформаций (1.7).

Таким образом, задача ОТО для упругого шара сводится к семи уравнениям (3.13)–(3.15), (1.6) и (3.18), которые включают семь неизвестных : s, h, σ_r, σ_θ, ε_r, ε_θ, ε_t.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зельдович Я.Б., Блинников С.И., Шакура Н.И.* Физические основы строения и эволюции звезд. М.: Изд-во МГУ, 1981. (Электронная версия).
2. *Власов В.З.* Уравнения неразрывности деформаций в криволинейных координатах // Избр. тр. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 558 с.
3. *Синг Д.* Общая теория относительности. М.: Изд-во иностр. лит, 1963. 423 с.
4. *Кильчевский Н.А.* Основы тензорного исчисления с приложениями к механике. Киев: Наук. думка, 1972. 148 с.
5. *Шмутцер Э.* Теория относительности. Современное представление. М. : Мир, 1981. 230 с.
6. *Васильев В.В., Федоров Л.В.* К задаче теории упругости, сформулированной в напряжениях // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 82–92.
7. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М. : Наука, 1988. 506 с.
8. *Васильев В.В.* Напряженное состояние твердых тел и некоторые геометрические эффекты // Изв. АН. МТТ. 1989. № 5. С.30–34.
9. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Д. Гравитация.* Т. 2. Бишкек: Айнштайн, 1996. 526 с.
10. Физическая энциклопедия. М.: Научное издательство Большая российская энциклопедия, 1988. 757 с.
11. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1976. 664 с.

Москва

Поступила в редакцию 26.12.2001