МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2003

УДК 539.3

© 2003 г. Э.А. ЛЕОНОВА

СКАЛЯРНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ СТАТИКИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Для уравнений статики классической теории упругости и несвязанной термоупругости предлагается инвариантное представление общего решения через минимальное число скалярных гармонических функций. Показано, что минимальное число для трехмерных уравнений составляют три функции, для плоской задачи – две функции и одна произвольная константа. Получены два векторных тождества для основных кинематических характеристик. На этой основе два типа краевых задач для областей специального вида с заданными на границе нормальной (касательной) составляющей вектора напряжения и касательной (нормальной) составляющей вектора перемещения сведены к классическим задачам теории потенциала. Приведены примеры их решения.

Применение гармонических функций в классической теории упругости для решения частных задач, начиная с работ Ламе, Бетти, Буссинеска, Черрути [1–5] и проблема представления общего решения через эти функции [5–17] с выяснением минимального их числа является до настоящего времени объектом многих исследований [18–26].

Вектор перемещения – бигармонический вектор как следствие однородных уравнений Ламе [1–4] или выраженный через бигармонический вектор [6] – представляется известными способами через два гармонических вектора.

Все представления общего решения непосредственно через гармонические функции [7–26], как показывает анализ, либо содержат гармонический вектор [7–20, 22, 24–26], либо выражают через них компоненты вектора перемещения в декартовой ортогональной системе координат [21, 23]. При выборе формы общего решения для конкретных задач необходимо помнить, что разделение гармонического вектора на гармонические компоненты возможно лишь в декартовой и некоторых других определенных системах координат.

В работах [7 – 16, 26] вектор перемещения выражается через гармонический вектор и гармонический скаляр, не связанные [8, 9, 26] или связанные [7, 12, 13] одним соотношением. Это для трехмерных уравнений приводит в компонентах соответственно к четырем или к трем независимым гармоническим функциям. В [21, 23] четыре гармонические функции также связаны одним соотношением.

Вопрос о возможности сокращения в общем решении числа гармонических функций с четырех до трех обсуждался для [8, 9] в обширной дискуссии [8–20, 22, 23, 26]. Возможность реализована в двух вариантах выражения вектора перемещения: через один гармонический вектор [12, 14–16, 18, 24–26]; через гармонический скаляр и две компоненты гармонического вектора приравниваем нулю одной из его компонент [15, 16, 26].

Предлагаемое ниже представление общего решения через гармонические функции в отличие от [4, 7–9, 14–16, 21, 23] не содержат радиуса-вектора точки, в отличие от [21, 23] не связано с фиксированной системой координат. В отличие от [1–26] здесь общее решение выражается не через гармонический вектор, а через скалярные гармонические функции, число которых минимально.

1. Представление общего решения. Уравнения линейной симметричной теории упругости и несвязанной термоупругости [1–4] для однородного изотропного тела в статических или квазистатических условиях деформирования при малых значениях вектора перемещения $\mathbf{u}$, температуры ϑ (отсчитываемой от постоянной температуры естественного состояния) и их градиентов представим в виде, удобном для одновременного анализа сжимаемого и механически несжимаемого $k^{-1} = 0$ материала

$$\begin{aligned} &(1+2\kappa)\nabla\sigma - \nabla\times\boldsymbol{\omega} + \mathbf{f} + 2\alpha\nabla\vartheta = 0, \quad \kappa = 2/3\mu/k \\ &\nabla\cdot\mathbf{u} - 3(\kappa\sigma + \alpha\vartheta) = 0, \quad \nabla\times\mathbf{u} - 2\boldsymbol{\omega} = 0, \quad \kappa \ge 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь σ и $\mathbf{f}$ – среднее гидростатическое напряжение и вектор объемных сил, отнесенные к модулю сдвига 2μ, α – коэффициент линейного теплового расширения.

Рассматриваем уравнения (1.1) в области $D \subset E^m$ евклидова пространства E^m ($m = 2, 3$), конечной и бесконечной, ограниченной конечной замкнутой поверхностью. Геометрические свойства области $\bar{D} = D \cup \partial D$ и заданные функции $\mathbf{f}(x)$, $\vartheta(x)$; $x \in D$ (время – параметр в записи всюду опускается) предполагаем удовлетворяющими известным, зависящим от выбора класса функции для искомого решения ограничениям [1–3], обеспечивающим существование и требуемую гладкость соответствующих потенциалов.

Утверждение 1.1. Общее решение уравнений (1.1) представимо через скалярные гармонические функции, число которых равно размерности геометрического пространства.

Доказательство. Известным следствием уравнений (1.1) является уравнение Пуассона

$$\nabla^2\sigma = -(1+2\kappa)^{-1}(\nabla\cdot\mathbf{f} + 2\alpha\nabla^2\vartheta) \tag{1.2}$$

Общее решение уравнения (1.2) запишем через фундаментальное решение $\chi_m(x, \xi)$ уравнения Лапласа в E^m, сохраняя, для удобства дальнейшего использования, раздельными функции влияния массовых сил и температуры

$$\begin{aligned} &\sigma = (1+2\kappa)^{-1}(\varphi_0 + \varphi_f + 2\alpha\varphi_\vartheta), \quad \nabla^2\varphi_0 = 0 \\ &\varphi_f(x) = \int_D \chi_m(x,\xi)\nabla\cdot\mathbf{f}(\xi)d\xi; \quad x, \xi \in E^m \\ &\varphi_\vartheta(x) = \int_D \chi_m(x,\xi)\nabla^2\vartheta(\xi)d\xi, \quad \chi_m(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}|x-\xi|^{-1} \ (m=3) \\ -\dfrac{1}{2\pi}\ln|x-\xi| \ (m=2) \end{cases} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Общее решение первого уравнения системы (1.1), используя (1.3), получим в виде

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{u}_0(x) + \boldsymbol{\omega}_m(x), \quad \mathbf{u}_0(x) = \int_D \chi_m(x,\xi)\mathbf{w}(\xi)d\xi \\ &\mathbf{w} = 2[\nabla\varphi_0 + \nabla\varphi_f + \mathbf{f} + 2\alpha(\nabla\varphi_\vartheta + \nabla\vartheta)] \\ &\boldsymbol{\omega}_m(x) = \begin{cases} \nabla\varphi_1(x), \quad \nabla^2\varphi_1 = 0 \ (m=3) \\ \omega_0\mathbf{n}^0, \quad \omega_0 = \mathrm{const} \ (m=2) \end{cases} \end{aligned} \tag{1.4}$$

В (1.3), (1.4) $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ – произвольные гармонические функции, ω_0 – произвольная константа, $\mathbf{n}^0$ – нормаль к плоскости деформирования в плоской задаче. Теперь выражение для вектора перемещения $\mathbf{u}$ найдем как решение полученной из (1.1), (1.3), (1.4) системы уравнений

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) = 3\kappa(1+2\kappa)^{-1}[\varphi_0(x) + \varphi_f(x)] +$$

$$+ 3\alpha[\vartheta(x) + 2\kappa(1+2\kappa)^{-1}\varphi_\vartheta(x)] \tag{1.5}$$

$$\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) = 2\boldsymbol{\omega}_m(x)$$

Общее решение системы (1.5) приводит к искомому представлению вектора перемещения через m скалярных гармонических функций $\varphi_i(x)$ ($i = 0, 1, 2$ при $m = 3$; $i = 0, 2$, $\omega_0 = \text{const}$ при $m = 2$)

$$\mathbf{u}(x) = 2\int_D \chi_m(x,\xi)\nabla\varphi_0(\xi)d\xi - 3\kappa(1+2\kappa)^{-1}\nabla\int_D \chi_m(x,\xi)\varphi_0(\xi)d\xi +$$

$$+ 2\nabla \times \int_D \chi_m(x,\xi)\omega_m(\xi)d\xi + \nabla\varphi_2(x) + \mathbf{u}_f(x) + \mathbf{u}_\vartheta(x)$$

$$\mathbf{u}_f(x) = 2\int_D \chi_m(x,\xi)[\nabla\varphi_f(\xi) + \mathbf{f}(\xi)]d\xi - 3\kappa(1+2\kappa)^{-1}\nabla\int_D \chi_m(x,\xi)\varphi_f d\xi \tag{1.6}$$

$$\mathbf{u}_\vartheta(x) = 4\alpha\int_D \chi_m(x,\xi)[\nabla\varphi_\vartheta(\xi) + \nabla\vartheta(\xi)]d\xi -$$

$$- 3\alpha\nabla\int_D \chi_m(x,\xi)[2\kappa(1+2\kappa)^{-1}\varphi_\vartheta + \vartheta]d\xi$$

Полученное представление общего решения[1] уравнений статики классической теории упругости отличается от известных [1–26] совокупностью признаков: скалярные гармонические функции, минимальное их число, инвариантность представления.

2. Кинематические тождества. Выведем соотношения, связывающие основные характеристики деформированной частицы.

Утверждение 2.1. Для векторного поля $u(x) \in C^2(D)$ любой физической природы имеет место векторное тождество

$$\boldsymbol{\gamma} - \nabla\theta + \nabla \times \boldsymbol{\omega} = 0, \quad \theta \equiv \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\gamma} \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.1}$$

Доказательство. Представляя линейный тензор деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ и ротор $\mathbf{u}$ в естественном базисе с ковариантными векторами $\mathbf{x}_k$ ($k = 1, 3$) и выразим входящие в (2.1) величины через компоненты $\mathbf{u}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon^{km}\mathbf{x}_k\mathbf{x}_m, \quad \mathbf{u} = u^k\mathbf{x}_k,$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{x}_m\nabla_k\varepsilon^{km} = 1/2\mathbf{x}_m(\nabla^k\nabla_k u^m + \nabla^m\nabla_k u^k)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega} = 1/2(x^k\nabla_k\nabla_m u^m - \mathbf{x}_k\nabla^m\nabla_m u^k), \quad \nabla\theta = \mathbf{x}^k\nabla_k\nabla_m u^m$$

Подставляя в (2.1), убеждаемся, что (2.1) – тождество.

---

[1] Это решение – эквивалентная форма общего решения, предложенного в работе: *Леонова Э.А.* Инвариантные свойства и экспериментально определяемые функции в задачах термоупругости и термопластичности. М., 1989. 23 с. – Деп. в ВИНИТИ 20.06.89, № 4090-В89.

Замечание. Для плоской задачи полагаем в ее трехмерной интерпретации $\mathbf{x}_3 = \mathbf{n}^0$, $u^3 = 0$.

Утверждение 2.2. Для любого $\kappa \neq 1$ величины σ, θ, ω выражаются через один вектор $\boldsymbol{\gamma}$. В случае $\kappa = 1$ вектор $\boldsymbol{\gamma}$ определяется внешними полями $\mathbf{f}$, ϑ в явном виде.

Доказательство. Соотношения (2.1) и уравнение (1.1) образуют систему. Решая ее, получим искомое представление

$$\begin{gathered}
\nabla\sigma = -(1-\kappa)^{-1}(\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{f} - \alpha\nabla\vartheta), \quad \nabla\theta = -3(1-\kappa)^{-1}(\kappa\boldsymbol{\gamma} + \kappa\mathbf{f} - \alpha\nabla\vartheta) \\
\nabla \times \boldsymbol{\omega} = -(1-\kappa)^{-1}[(1+2\kappa)\boldsymbol{\gamma} + 3\kappa\mathbf{f} - 3\alpha\nabla\vartheta], \quad \kappa \neq 1 \\
\boldsymbol{\gamma} = \alpha\nabla\vartheta - \mathbf{f}, \quad \kappa = 1
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Следствие. Для $u(x) \in C^3(D)$, $\sigma \in C^2(D)$ в потенциальном поле объемных сил поле вектора $\boldsymbol{\gamma}(x)$ потенциально.

Действительно, из (2.2), (1.2) при $\mathbf{f} = \nabla\psi_f$ имеем

$$\boldsymbol{\gamma}(x) = \nabla\psi, \quad \psi = -(1-\kappa)\sigma - \psi_f + \alpha\vartheta$$

Рассмотрим в $\overline{D} \subset E^3$ двустороннюю ориентированную поверхность, содержащую регулярный кусок S с единичным вектором нормали n, и векторное поле $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{x} \in \overline{D}$.

Утверждение 2.3. В обыкновенных точках регулярного куска поверхности справедливо векторное тождество

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\gamma}^{(n)} + \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega} - \mathbf{n}\theta = \nabla^s(\mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n}) + 2H(\mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \\
- \mathbf{n}\nabla^s \cdot \mathbf{u}^s_\tau + \mathbf{r}^\beta b^\alpha_\beta(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{u}^s_\tau), \quad \boldsymbol{\gamma}^{(n)} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь и далее $\mathbf{r}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) – локальный естественный базис, связанный с произвольной сетью регулярных координатных линий q^1, q^2 на S, $\mathbf{r}^\alpha$ – взаимный базис; $b^\alpha_\beta \mathbf{r}^\beta \mathbf{r}_\alpha$ и H – тензор кривизны и средняя кривизна поверхности S; ∇^s – поверхностный оператор Гамильтона, $\mathbf{u}^s = (\mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \mathbf{u}^s_\tau$ – значение вектора $\mathbf{u}(x)$ на S.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&1/2(\mathbf{n} \cdot \nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + 1/2(\nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \nabla\mathbf{u}) - \mathbf{n}\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{n}\nabla \cdot \mathbf{u} = \\
&= \mathbf{r}^\alpha(\mathbf{u}^s_\alpha \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_n) - \mathbf{n}(\mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{u}^s_\alpha) - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_n) = \\
&= \nabla^s(\mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n}) + 2H(\mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{n}\nabla^s \cdot u^s_\tau + \mathbf{r}^\beta b^\alpha_\beta(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{u}^s_\tau)
\end{aligned}$$

Утверждение 2.3 доказано.

Для вектора перемещения u кинематическое тождество (2.3) выражает в инвариантной форме характеристики измененного состояния материальной окрестности S (левая часть тождества (2.3)), вызванного перемещением поверхности (правая часть тождества).

3. Приграничный слой упругого тела. Для представления краевых задач теории упругости через введенные в п. 1 гармонические функции $\varphi_i(x)$, $x \in D \subset E^3$ рассмотрим тонкий слой упругого тела, прилегающий к граничной поверхности, заданной уравнением $x = r(q^1, q^2)$. Состояние слоя в окрестности регулярного куска S поверхности описываем в базисе $\mathbf{r}_\alpha$, $\mathbf{n}$ ($\alpha = 1, 2$). Для внутренней точки слоя, близкой к обыкновенной точке $x \in S$, радиус-вектор $\mathbf{x}$, базисные векторы $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}^i$ ($i = \overline{1, 3}$) и вектор перемещения $\mathbf{u} \in C^2(\overline{D})$ запишутся в виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{r}(q^1, q^2) + z\mathbf{n}(q^1, q^2), \quad n = a^{-1/2}(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \\
\mathbf{x}_\alpha &= \mathbf{r}_\alpha - zb^\beta_\alpha \mathbf{r}_\beta, \quad \mathbf{x}^\alpha = \mathbf{r}^\alpha + zb^\alpha_\beta \mathbf{r}^\beta + O(z^2) \\
\mathbf{x}_3 &= \mathbf{x}^3 = \mathbf{n}, \quad a = \det\|a_{\alpha\beta}\|, \quad a_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta (\alpha, \beta = 1, 2) \\
\mathbf{u} &= \mathbf{u}^s(q^1, q^2) + z\mathbf{u}_3(q^1, q^2) + z^2\mathbf{u}_4(q^1, q^2) + O(z^3)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Тензор деформации, объемное расширение и вектор поворота в слое представятся в виде, выраженном через (3.1):

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_{\alpha\beta} &= 2\varepsilon^s_{\alpha\beta} + z(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{u}_{3\beta} + \mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{u}_{3\alpha} - b^\gamma_\alpha \mathbf{r}_\gamma \cdot \mathbf{u}^s_\beta - b^\gamma_\beta \mathbf{r}_\gamma \cdot \mathbf{u}^s_\alpha) \\
2\varepsilon_{\alpha 3} &= 2\varepsilon^s_{\alpha 3} + z(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_{3\alpha} - b^\gamma_\alpha \mathbf{r}_\gamma \cdot \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{u}_4) \\
\varepsilon_{33} &= \varepsilon^s_{33} + 2z\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_4, \quad \varepsilon^s_{33} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_3 \\
\theta &= \theta^s + z(\mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{u}_{3\alpha} + b^\alpha_\beta \mathbf{r}^\beta \cdot \mathbf{u}^s_\alpha + 2\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_4) \\
2(\boldsymbol{\omega}) &= 2\boldsymbol{\omega}^s + z(\mathbf{r}^\alpha \times \mathbf{u}_{3\alpha} + b^\alpha_\beta \mathbf{r}^\beta \times \mathbf{u}^s_\alpha + 2\mathbf{n} \times \mathbf{u}_4) \\
2\varepsilon^s_{\alpha\beta} &= \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{u}^s_{\tau\beta} + \mathbf{r}_\beta \cdot \mathbf{u}^s_{\tau\alpha} - 2(\mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n}) b_{\alpha\beta} \\
2\varepsilon^s_{\alpha 3} &= \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{u}_3 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^s_{\tau\alpha} + (\mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n})_\alpha \\
\theta^s &= \nabla^s \cdot \mathbf{u}^s_\tau - 2H(\mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_3 \\
2\boldsymbol{\omega}^s &= \nabla^s \times \mathbf{u}^s_\tau + a^{-1/2}[\mathbf{r}_1(\mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n})_2 - \mathbf{r}_2(\mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n})_1] + \mathbf{n} \times \mathbf{u}_3
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Кинематическое тождество на S примет вид

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{\alpha 3}\mathbf{r}^\alpha - 3\kappa\sigma\mathbf{n} + \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \nabla^s(\mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n}) + \\
&+ 2H(\mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{n}\nabla^s \cdot \mathbf{u}^s_\tau + b^\alpha_\beta \mathbf{r}^\beta(\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{u}^s_\tau) + 3\alpha\vartheta^s\mathbf{n}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Вектор напряжения $\mathbf{p}^{(n)} \doteq 2\mu\mathbf{p}^s$ на S преобразуется к виду

$$\mathbf{p}^s = (1-\kappa)\sigma\mathbf{n} + \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u}_3 - \alpha\vartheta^s\mathbf{n} \tag{3.4}$$

4. Первая смешанная краевая задача. На границе упругого тела заданы нормальная составляющая вектора напряжения и касательная составляющая вектора перемещения

$$\mathbf{p}^{(n)} \cdot \mathbf{n} = 2\mu\mathbf{p}^s(x) \cdot \mathbf{n}(x), \quad \mathbf{u} - \mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{u}^s_\tau(x) \tag{4.1}$$

В переменных системы (1.1) граничные условия (4.1) на основании (3.4) приобретают вид

$$\begin{aligned} (1-\kappa)\sigma+\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_3 &= \mathbf{p}^s\cdot\mathbf{n}+\alpha\vartheta^s(x) \\ \mathbf{u}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})\mathbf{n} &= \mathbf{u}_\tau^s(x); \quad x\in\partial D \end{aligned} \tag{4.2}$$

Утверждение 4.1. Пусть граница трехмерной конечной односвязной области D образована соединением без точек слияния N кусков минимальных поверхностей S_k ($k=\overline{1,N}$). Тогда решение задачи (1.1), (4.1) сводится к решению в области D двух задач Дирихле и одной задачи Неймана для скалярных гармонических функций φ_i ($i=$ $=0, 1, 2$).

Доказательство следует из возможности формулировки задачи (1.1), (4.1) на основании (1.3)–(1.6), (3.2)–(3.3) при $\mathbf{p}^s\cdot\mathbf{n}$, $\mathbf{u}_\tau^s$ непрерывных вместе с производными требуемого порядка на S_k в виде краевых задач для функции φ_i ($i=0, 1, 2$).

Граничные условия. Обозначим $S=S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_N\cup S'$, где S' – множество точек вершин и ребер. Из первого граничного условия (4.2) и проекции на нормаль тождества (3.3) получаем систему двух линейных алгебраических уравнений с неизвестными σ и $\mathbf{u}_3\cdot\mathbf{n}$. Решение ее, единственное без дополнительных ограничений на заданные величины, имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma &= [\mathbf{p}^s\cdot\mathbf{n}+\nabla^s\cdot\mathbf{u}_\tau^s-2\alpha\vartheta^s](1+2\kappa)^{-1} \\ \mathbf{u}_3\cdot\mathbf{n} &= [3\kappa\mathbf{p}^s\cdot\mathbf{n}-(1-\kappa)\nabla^s\cdot\mathbf{u}_\tau^s+3\alpha\vartheta^s](1+2\kappa)^{-1} \end{aligned}$$

Отсюда находим значение φ_0^s функции φ_0 на S_k:

$$\varphi_0^s(x) = \mathbf{p}^s\cdot\mathbf{n}+\nabla^s\cdot\mathbf{u}_\tau^s-\varphi_f-2\alpha(\varphi_\vartheta+\vartheta^s) \tag{4.3}$$

Найдем на S_k значение φ_{1n}^s производной $\varphi_{1,n}$, выраженное через $\mathbf{u}_0$:

$$\varphi_{1n} = \frac{1}{2\sqrt{a}}(\mathbf{r}_2\cdot\mathbf{u}_{\tau1}^s-\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{u}_{\tau2}^s-\mathbf{r}_2\cdot\mathbf{u}_{01}^s+\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{u}_{02}^s) \tag{4.4}$$

Граничное условие для φ_2 найдем следующим образом. Для произвольной непрерывной кусочно-гладкой кривой $\overset{\smile}{x_0x}\subset S$ с началом в произвольной зафиксированной точке $x_0\in S'$ рассмотрим связанный с (1.6) криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\overset{\smile}{x_0x}}\mathbf{u}^{(1)}\cdot d\mathbf{r}; \quad \mathbf{u}^{(1)}\equiv\mathbf{u}_\tau^s-\frac{1}{2\pi}\int\limits_D\frac{\nabla\varphi_0(\xi)}{|x-\xi|}d\xi+\frac{3\kappa}{1+2\kappa}\frac{1}{4\pi}\nabla\int\limits_D\frac{\varphi_0(\xi)}{|x-\xi|}d\xi-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\nabla\int\limits_D\frac{\nabla\varphi_1(\xi)}{|x-\xi|}d\xi-u_f-u_\vartheta \tag{4.5}$$

и покажем, что его значение для данного $u^{(1)}$ не зависит от выбора $\overset{\smile}{x_0x}$. Рассмотрим циркулярно $\mathbf{u}^{(1)}$ по произвольному кусочно-гладкому контуру $l\subset S$, ограничивающему поверхность $S_l \subset \bar{S}$. Направление касательного к l вектора $d\mathbf{r}$ согласовано с $\mathbf{n}$ в системе правой ориентации. По формуле Стокса, учитывая равенства

$$\oint_l \mathbf{u}_\tau^s \cdot d\mathbf{r} = \oint_l \mathbf{u}^s \cdot d\mathbf{r}, \quad \nabla^2 \int_D \frac{\nabla\varphi_1 d\xi}{|x-\xi|} = -4\pi\varphi_1, \quad \nabla \cdot \int_D \frac{\nabla\varphi_1 d\xi}{|x-\xi|} = 0$$

и выражения u_f и u_ϑ в (1.6), (4.4), (1.5) получаем

$$\oint_l \mathbf{u}_\tau^s \cdot d\mathbf{r} = \int_{S_l} \mathbf{n} \cdot \left[\nabla \times \mathbf{u} - \frac{1}{2\pi}\nabla \times \int_D \frac{\nabla\varphi_0}{|x-\xi|} d\xi - 2\nabla\varphi_1(\xi) - \frac{1}{2\pi}\nabla \times \int_D \frac{\nabla\varphi_f + f}{|x-\xi|} d\xi - \frac{\alpha}{\pi}\nabla \times\right.$$

$$\left.\times \int_D \frac{\nabla\varphi_\vartheta + \nabla\vartheta}{|x-\xi|} d\xi\right] dS_l = \int_{S_l} \mathbf{n} \cdot [\nabla \times \mathbf{u} - \nabla \times \mathbf{u}_0 - 2\nabla\varphi_1(\xi)] dS_l \equiv 0$$

Таким образом, на основании (4.5), (1.6) определено значение φ_2^s функции φ_2 на S:

$$\varphi_2^s(x) = \int_{\smile xx_0} \mathbf{u}^{(1)} \cdot d\mathbf{r} + \varphi_2^s(x_0) \tag{4.6}$$

с точностью до произвольной константы $\varphi_2^s(x_0)$, связанной с фиксацией точки x_0.

Скалярная постановка задачи. В области D найти последовательно функции $\varphi_1(x)$ ($i = 0, 1, 2$) гармонические в D и непрерывные в $D \cup S$ с $\nabla\varphi_1$ непрерывным в $S\backslash S'$, удовлетворяющие граничным условиям

$$\begin{aligned} &\varphi_0 = \varphi_0^s(x), \quad x \in S; \quad \varphi_{1,n} = \varphi_{1n}^s(x), \quad x \in S\backslash S' \\ &\varphi_2 = \varphi_2^s(x), \quad x \in S \end{aligned} \tag{4.7}$$

где φ_0^s, φ_{1n}^s, φ_2^s выражены через известные функции соответствующими формулами (4.3), (4.4), (4.6).

Метод решения. Предполагается далее, что заданные $\mathbf{p}^s(x) \times \mathbf{n}$ и $\mathbf{u}_\tau^s(x)$ обеспечивают непрерывную дифференцируемость граничных функций в $S\backslash S'$ и непрерывность φ_0^s, φ_2^s в S. Решаются в соответствии с (4.7) последовательно задачи.

1. Задача Дирихле для φ_0 с функцией (4.3). Решение единственно. Вычисляется (4.4).

2. Задача Неймана для φ_1 с функцией φ_{1n} (4.4).

Условие разрешимости выполняется тождественно. Действительно, по теореме Гаусса – Остроградского

$$\int_S \varphi_{1n}^s(x) dS = \int_S \left[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}(b_1^\alpha a_{\alpha 2} - b_2^\alpha a_{\alpha 1}) - \frac{1}{2}\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{u}_0\right] dS =$$

$$= -\int_D \left[\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_0)\right] \equiv 0$$

Решение единственно с точностью до аддитивной константы. Константа не существенна, так как в (4.5) и (1.6) входит только $\nabla\varphi_1$. Вычисляются (4.5), (4.6).

3. Задача Дирихле для φ_2 с функцией $\overset{s}{\varphi_2}$ (4.6). Произвольная константа $c \equiv \overset{s}{\varphi_2}(x_2)$ не существенна, так как замена в (4.6) $\overset{s}{\varphi_2}$ на $\overset{s}{\varphi_2} - c$ приводит к замене в решении $\varphi_2(x)$ на $\varphi_2(x) - c$, а φ_2 дает вклад в вектор перемещения (1.6) в виде $\nabla\varphi_2$. Таким образом, вектор перемещения определяется однозначно и вычисляется после подстановки найденного решения φ_i ($i = 0, 1, 2$) задачи (4.7) через скалярный и векторный потенциалы в виде

$$\mathbf{u}(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_D \frac{\nabla\varphi_0(\xi)}{|x-\xi|}d\xi - \frac{3\kappa}{4\pi}(1+2\kappa)^{-1}\nabla\times\int\limits_D \frac{\varphi_0(\xi)}{|x-\xi|}d\xi + \frac{1}{2\pi}\nabla\times\int\limits_D \frac{\nabla\varphi_1(\xi)}{|x-\xi|}d\xi + \\ + \nabla\varphi_2(x) + \mathbf{u}_f(x) + \mathbf{u}_\vartheta(x) \tag{4.8}$$

5. Вторая смешанная краевая задача. На границе упругого тела заданы касательная составляющая вектора напряжения и нормальная составляющая вектора перемещения

$$\mathbf{p}^{(n)} - \mathbf{n}(\mathbf{p}^{(n)}\cdot\mathbf{n}) = 2\mu\overset{s}{\mathbf{p}_\tau}(x), \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{u}^s(x)\cdot\mathbf{n}(x) \tag{5.1}$$

Очевидно, что для механически несжимаемого материала $\mathbf{u}^s(x)\cdot\mathbf{n}$ не может быть задано произвольно и при переменном температурном поле зависит от $\vartheta(x)$.

В переменных системы (1.1) граничные условия (5.1) на основании (3.4) приобретают вид

$$\mathbf{u}_3 - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_3)\mathbf{n} + \mathbf{n}\times\boldsymbol{\omega} = \overset{s}{\mathbf{p}_\tau}(x), \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{u}^s(x)\cdot\mathbf{n}(x) \tag{5.2}$$

при условии

$$\oint\limits_S(\mathbf{u}^s\cdot\mathbf{n})dS = -3\alpha\int\limits_D\vartheta dV \quad \text{для} \quad \kappa = 0$$

Утверждение 5.1. Пусть D – многогранник с плоскими гранями S_k ($k = 1, N$), $S = S_1 \cup \ldots \cup S_N \cup S'$. Тогда решение задачи (1.1), (5.1) сводится к решению в области D двух задач Неймана и одной задачи Дирихле для скалярных гармонических функций.

Доказательство следует из возможности формулировки задачи (1.1), (5.1) в виде краевых задач для функций φ_i ($i = 0, 1, 2$).

Граничные условия. Выражая в тождестве (3.3) $\varepsilon_{\alpha 3}$ по закону Гука и рассматривая проекцию (3.3) на плоскость S_k совместно с первым условием (5.2), находим касательные проекции векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{u}_3$ на S_k, выраженные в явном виде через заданные в (5.1) функции

$$\mathbf{n}\times\omega = \nabla^s(\mathbf{u}^s\cdot\mathbf{n}) - \overset{s}{\mathbf{p}_\tau}, \quad \mathbf{u}_3 - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_3)\mathbf{n} = 2\overset{s}{\mathbf{p}_\tau} - \nabla^s(\mathbf{u}^s\cdot\mathbf{n}) \tag{5.3}$$

Теперь, вычисляя

$$\mathbf{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{r}^\alpha\cdot(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\omega})_{,\alpha} = \nabla^s\cdot\overset{s}{\mathbf{p}_\tau} - \nabla^{s2}(\mathbf{u}^s\cdot\mathbf{n}) \tag{5.4}$$

находим в соответствии с (5.3), (2.3), (1.1), (1.3) значение φ_{0n}^s нормальной производной $\varphi_{0,n}$ на S_k, выраженное через известные функции

$$\varphi_{0n}^s(x) = \nabla^s \cdot \mathbf{p}_\tau^s - \nabla^{s2}(\mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} - \varphi_{f,n} - 2\alpha(\vartheta_{,n} + \varphi_{\vartheta,n}) \tag{5.5}$$

Граничное условие для φ_1 получим следующим образом. Так как на S_k из (5.3) известно

$$\boldsymbol{\omega}_\tau = \boldsymbol{\omega} - \mathbf{n}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{n} \times \mathbf{p}_\tau^s - \mathbf{n} \times \nabla^s(\mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n}) \tag{5.6}$$

то, рассматривая связанный с (1.4) линейный интеграл

$$\int\limits_{\underbrace{}_{x_0 x}} \mathbf{u}^{(2)} \cdot d\mathbf{r}, \quad \mathbf{u}^{(2)} \equiv \mathbf{n} \times \mathbf{p}_\tau^s - \mathbf{n} \times \nabla^s(\mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n}) - \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}_0 \tag{5.7}$$

находим аналогично (4.5), (4.6), учитывая (5.3)–(5.5) и значение $\mathbf{u}_0$в (1.4):

$$\oint_l \mathbf{u}^{(2)} \cdot d\mathbf{r} = \oint_l \left[\boldsymbol{\omega}_\tau - \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}_0\right] \cdot d\mathbf{r} = \oint_l \left[\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}_0\right] \cdot d\mathbf{r} =$$

$$= \int_{S_l} \left[\mathbf{n} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\mathbf{n} \cdot (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_0) - \nabla^2 \mathbf{u}_0)\right] dS_l =$$

$$= \int_{S_l} (\nabla^s \cdot \mathbf{p}_\tau^s - \nabla^{s2}(\mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n}) - \varphi_{0,n} - \varphi_{f,n} - \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} - 2\alpha(\nabla\varphi_{\vartheta,n} + \vartheta_{,n})$$

Таким образом, по (5.7) определенно значение φ_1^s функции φ_1 на границе с точностью до произвольной аддитивной константы $\varphi_1^s(x_0)$:

$$\varphi_1^s(x) = \int\limits_{\underbrace{}_{x_0 x}} \mathbf{u}^{(2)} \cdot d\mathbf{r} + \varphi_1^s(x_0) \tag{5.8}$$

Теперь из (5.2), (1.6) находится значение φ_{2n}^s $(x \in S_k)$ функции $\varphi_{2,n}$:

$$\varphi_{2n}^s = \frac{3\kappa}{1+2\kappa}\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\int_D \frac{\varphi_0(\xi)}{|x-\xi|}d\xi - \frac{1}{2\pi}\mathbf{n} \cdot \int_D \frac{\nabla\varphi_0(\xi)d\xi}{|x-\xi|} - \frac{1}{2\pi}\mathbf{n} \cdot \nabla \times \int_D \frac{\nabla\varphi_1(\xi)}{|x-\xi|}d\xi + \tag{5.9}$$

$$+ \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^s(x) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_f(x) - \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_\vartheta(x)$$

Скалярная постановка задачи. В области D найти последовательно функции φ_i $(i = 0, 1, 2)$ гармонические в D и непрерывные в $D \cup S$ с $\nabla\varphi_0$ и $\nabla\varphi_2$ непрерывными в $D \cup S \backslash S'$, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_{0,n} = \varphi_{0n}^s(x), \quad x \in S\backslash S'; \quad \varphi_1 = \varphi_1^s(x), \quad x \in S \tag{5.10}$$

$$\varphi_{2,n} = \varphi_{2n}^s(x), \quad x \in S\backslash S'$$

$$\frac{3\kappa}{1+2\kappa}\int_D \varphi_0 dV = -\int_S \mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n} dS - \frac{3\kappa}{1+2\kappa}\int_D \varphi_f dV - 3\alpha\int_D\left(\vartheta + \frac{2\kappa}{1+2\kappa}\varphi_\vartheta\right)dV \tag{5.11}$$

где φ^s_{0n}, φ^s_1, φ^s_{2n} определены известными функциями в виде (5.5), (5.8), (5.9). Интегральное условие выражает зависимость изменения объема V всего тела D от температурного поля и внешних сил. Для несжимаемого материала оно представляет собой указанное в (5.2) ограничение на заданные функции, для сжимаемого – выделяет единственное решение краевой задачи для $\varphi_0(x)$.

Метод решения. Предполагается, далее, что заданные в (5.2) функции $\mathbf{p}^s_\tau$ и $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}^s$ обеспечивают непрерывную дифференцируемость граничных функций в $S\backslash S'$ непрерывность φ^s_1 в S. Решаются в соответствии с (5.10) последовательно задачи.

1. Задача Неймана для φ_0 с граничной функцией (5.5). Условие разрешимости задачи выполняется тождественно. Действительно, из (5.5), (5.4) и (1.3) по формуле Гаусса – Остроградского имеем

$$\oint_S \varphi^s_n(x)dS = \oint_S [\mathbf{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{\omega} - \mathbf{f}\cdot\mathbf{n} - \varphi_{f,n} - 2\alpha(\vartheta_{,n} + \varphi_{\vartheta,n})]dS =$$

$$= \int_D [\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{\omega} - \nabla\cdot\mathbf{f} - \nabla^2\varphi_f - 2\alpha(\nabla^2\vartheta + \nabla^2\varphi_\vartheta)]dV \equiv 0$$

Решение определено с точностью до аддитивной константы c_0. При $\kappa = 0$ константа c_0 не является существенной, так как в (5.8), (5.7) входит через $\mathbf{u}_0$ (1.4), а также в (5.9) и (1.6) войдет только $\nabla\varphi_0$. При $\kappa \neq 0$ константа для (5.8) также несущественна, но она существенна для φ^s_{2n} (5.9). Константа c_0 находится из интегрального условия (5.11). Подставляя $\varphi_0 = \varphi_0 + c_0$, находим

$$c_0 = -\frac{1}{V}\left[\int_D \varphi_0^{(1)}dV + \int_D \varphi_f dV + \alpha\int_D\left(\frac{1+2\kappa}{\kappa}\vartheta + 2\varphi_\vartheta\right)dV + \frac{1+2\kappa}{3\kappa}\oint_S \mathbf{u}^s\cdot\mathbf{n}dS\right]$$

2. Задача Дирихле с граничной функцией (5.8).

Решение единственно с точностью до аддитивной константы $c_1 = \varphi^s_1(x_0)$. Константа несущественна, так как в (5.9) и (1.6) входит только $\nabla\varphi_1$. Вычисляем (5.9).

3. Задача Неймана для φ_2 с граничным условием (5.9). Условие разрешимости задачи с граничной функцией (5.9) выполняется тождественно. Действительно, применяя теорему Гаусса – Остроградского и выражая $\nabla\cdot u$ из (1.1) (1.3), $\nabla\varphi_0$ из (1.4), $\nabla\cdot\mathbf{u}_f$, $\nabla\cdot\mathbf{u}_\vartheta$ из (1.6) и учитывая свойства ньютоновского потенциала, получаем

$$\int_S \varphi^s_{2n}dS = \int_D\left[\frac{3\kappa}{1+2\kappa}\frac{1}{4\pi}\nabla^2\int_D\frac{\varphi_0(\xi)}{|x-\xi|}d\xi - \frac{1}{2\pi}\nabla\cdot\int_D\frac{\nabla\varphi_0(\xi)}{|x-\xi|}d\xi + \nabla\cdot\mathbf{u} - \nabla\cdot\mathbf{u}_f - \nabla\cdot\mathbf{u}_\vartheta\right]dV =$$

$$= \int_D\left[-\nabla\cdot\mathbf{u}_0 + \frac{3\kappa}{1+2\kappa}\varphi_f + \frac{3\kappa}{1+2\kappa}\nabla^2\frac{1}{4\pi}\int_D\frac{\varphi_1(\xi)}{|x-\xi|}d\xi\right]dV \equiv 0$$

Решение задачи для φ_2 определено с точностью до аддитивной константы. Константа несущественна, так как в (1.6) входит только $\nabla\varphi_2$.

Вектор перемещения, определяемый (1.6) после подстановки найденного решения φ_i ($i = 0, 1, 2$) задачи (5.10), запишется в конкретизированном виде (4.8).

6. Примеры. В качестве иллюстративных и тестовых рассмотрим два примера решения краевых задач методами п.п. 4 и 5 для прямой призмы $\overline{D} = D \cup S$ высотой l, поперечным сечением которой является равносторонний треугольник с высотой $3a$. Призма в постоянном температурном поле без массовых сил подвержена по боковой поверхности Γ и торцам поверхностным внешним воздействиям, заданным в виде полиномов. Определяется напряженно-деформированное состояние, удовлетворяющее требованию непрерывности вектора перемещения и условию взаимности касательных напряжений на ребрах.

В декартовой ортогональной системе координат x, y, z с началом в центре инерции сечения $z = 0$ и ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ конфигурации призмы и локальный базис $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{n}$ местной поверхностной системы координат q^1, q^2 могут быть описаны так

$$\begin{gathered}
\bar{D}: -2a \le x \le a, \quad -{}^1\!/\!_{\sqrt{3}}\,(x+2a) \le y \le {}^1\!/\!_{\sqrt{3}}\,(x+2a), \quad 0 \le z \le l \\
z = 0: \mathbf{r}_1 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{k}; \quad z = l: \quad \mathbf{r}_1 = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{k} \\
x = a: \mathbf{r}_1 = \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{i} \\
y = {}^1\!/\!_{\sqrt{3}}\,(x+2a): \mathbf{r}_1 = \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_2 = -{}^{\sqrt{3}}\!/\!_2; \quad \mathbf{i} - {}^1\!/\!_2\,\mathbf{j}, \quad \mathbf{n} = {}^1\!/\!_2\,\mathbf{i} - {}^{\sqrt{3}}\!/\!_2\,\mathbf{j} \\
y = -{}^1\!/\!_{\sqrt{3}}\,(x+2a): \mathbf{r}_1 = \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_2 = {}^{\sqrt{3}}\!/\!_2\,\mathbf{i} - {}^1\!/\!_2\,\mathbf{j}, \quad \mathbf{n} = {}^1\!/\!_2\,\mathbf{i} + {}^{\sqrt{3}}\!/\!_2\,\mathbf{j}
\end{gathered} \tag{6.1}$$

Для системы (1.1) в области (6.1) рассмотрим следующие краевые задачи.

1. Треугольная призма в условиях первой смешанной краевой задачи. Для системы (1.1) граничные условия (4.1) конкретизируются в координатах (6.1) в виде.

$$\begin{gathered}
\mathbf{u}_\tau^s\big|_{z=l} = \alpha l(q^2\mathbf{r}_1 - q^1\mathbf{r}_2), \quad \mathbf{u}_\tau^s\big|_{z=0} = 0, \quad \mathbf{p}^s \cdot \mathbf{n}\big|_S = 0 \\
\mathbf{u}_\tau^s\big|_\Gamma = \frac{\alpha q^2}{6a}(3a^2 - (q^2)^2\mathbf{r}_1 + \alpha a q^1\mathbf{r}_2)
\end{gathered} \tag{6.2}$$

Решая задачу (1.1), (6.2) методом п. 4, находим из (4.3) и (6.2) граничное значение $\varphi_0^s = 0$ для задачи Дирихле

$$\nabla^2\varphi_0 = 0, \quad \varphi_0\big|_S = \varphi_0^s \tag{6.3}$$

Ее решение дает $\varphi_0 \equiv 0$ в $\bar{D}$. Подставляя его в (1.4) и (4.4) вместе с (6.2), найдем из (4.4) граничное значение

$$\varphi_{1n}^s\big|_\Gamma = \frac{\alpha}{4a}(a^2 + (q^2)^2), \quad \varphi_{1n}^s\big|_{z=0} = 0, \quad \varphi_{1n}^s\big|_{z=l} = -\alpha l \tag{6.4}$$

для задачи Неймана

$$\nabla^2\varphi_1 = 0, \quad \varphi_{1,n}\big|_{S/S'} = \varphi_{1n}^s \tag{6.5}$$

Решение задачи (6.5) с условиями (6.4) ищем в виде

$$\varphi_1 = b_{klm}x^k y^l z^m (k, l, m = 0, 1, \ldots, 3; \; l + k + m \le 3) \tag{6.6}$$

Подставляя (6.6) в (6.5) и (6.4), найдем из условий
при $x = a$: $b_{102} = b_{111} = 0$, $b_{120} = -{}^1\!/\!_4\alpha/a$, $b_{300} = {}^1\!/\!_{12}\alpha/a$
при $z = 0$, $z = l$: $b_{201} = b_{021} = b_{101} = b_{011} = b_{001} = b_{003} = b_{012} = 0$, $b_{002} = {}^1\!/\!_2\alpha$
при $y = \pm{}^1\!/\!_{\sqrt{3}}\,(x + 2a)$: $b_{100} = b_{010} = b_{110} = b_{210} = b_{030} = 0$, $b_{200} = b_{020} = -{}^1\!/\!_4\alpha$

Таким образом, функция φ_1 имеет вид

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{12a}(x^3 - 3xy^2 - 3ax^2 - 3ay^2 + 6az^2) \tag{6.7}$$

Из (6.7) и (1.5) имеем систему уравнений для u

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{u} = \frac{\alpha}{2a}[(x^2 - y^2 - 2ax)\mathbf{i} - 2y(x+a)\mathbf{j} + 4az\mathbf{k}] \tag{6.8}$$

Решение ее представим в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \varphi_2$, где $\mathbf{u}^{(0)}$ – частное решение системы (6.8):

$$\mathbf{u}^{(0)} = -\frac{\alpha}{2a}[2y(x+a)z\mathbf{i} + (x^2 - y^2 - 2ax)z\mathbf{j}] \tag{6.9}$$

Для φ_2 имеем задачу Дирихле

$$\nabla^2\varphi_2 = 0, \quad \varphi_2|_S = \varphi_2^s \tag{6.10}$$

где в соответствии с (4.6) и (4.5)

$$\varphi_2^s = \int\limits_{\smile x_0 x} (\mathbf{u}_\tau^s - \mathbf{u}^{s0})d\mathbf{r} + \varphi_2^s(x_0) \tag{6.11}$$

а $\varphi_2^s(x_0)$ – произвольная константа, связанная с фиксацией точки x_0 на S. Выражение (6.11) дает граничное условие для (6.10)

$$\varphi_2|_{z=0} = c_0, \quad \varphi_2|_{z=l} = \frac{\alpha l}{6a}q^2[3(q^1)^2 - (q^2)^2] - c_l \tag{6.12}$$

При условии непрерывности на ребрах имеем

$$c_0 = c_l = c, \quad \varphi_2|_\Gamma = \frac{\alpha q^1 q^2}{6a}[3a^2 - (q^2)^2] + c \tag{6.13}$$

Таким образом, φ_2^s определена с точностью до одной аддитивной константы c. Решение задачи (6.10) с граничным условием (6.12), (6.13) ищем в виде

$$\varphi_2 = b_{klm}x^k y^l z^m (k, l, m = 0, 1, \ldots, 4;\ k + l + m \le 4) \tag{6.14}$$

Подставляя (6.14) в (6.10), (6.12), (6.13), находим, что отличными от нуля будут только коэффициенты $b_{000} = c$, $b_{211} = \alpha/2$, $b_{031} = -\alpha/(6a)$. Таким образом,

$$\varphi_2 = {}^1\!/_6\,\alpha yz(3x^2 - y^2)/a + c \tag{6.15}$$

Из (6.79), (6.15) находим вектор перемещения

$$\mathbf{u} = \alpha[-yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + {}^1\!/_6\, y(3x^2 - y^2)\mathbf{k}/a] \tag{6.16}$$

и вычисляем по нему тензор напряжений

$$\begin{gathered} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0 \\ \sigma_{xz} = \frac{\alpha y}{2a}(x - a), \quad \sigma_{yz} = \frac{\alpha}{4a}(x^2 - y^2 + 2ax) \end{gathered} \tag{6.17}$$

Решение этой задачи (1.1), (1.4) другим методом, с применением функции напряжений [1]:

$$\sigma_{xy} = -{}^1\!/_2\,\alpha\Phi_{,x}, \quad \sigma_{zx} = {}^1\!/_2\,\alpha\Phi_{,y}$$

$$\Phi = {}^1\!/_6\,(a-x)(x+2a+y\sqrt{3})(x+2a-y\sqrt{3})/a$$

показывает, что вектор перемещения и тензор напряжений совпадают с (6.16), (6.17).

2. *Треугольная призма в условиях второй смешанной краевой задачи.* Для системы (1.1) граничные условия (5.1) конкретизируются в переменных (6.1) в виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}^s_\tau\big|_{z=0} &= \frac{\alpha}{4a}\{2q^2(q^1-a)\mathbf{r}_1 + [(q^1)^2-(q^2)^2+2aq^1]\mathbf{r}_2\}\\
\mathbf{p}^s_\tau\big|_{z=l} &= \frac{\alpha}{4a}\{2q^2(q^1+a)\mathbf{r}_1 + [(q^1)^2-(q^2)^2-2aq^1]\mathbf{r}_2\}\\
\mathbf{p}^s_\tau\big|_\Gamma &= 0, \quad \mathbf{u}^s\cdot\mathbf{n}\big|_{z=0} = \frac{\alpha q^2}{6a}[3(q^1)^2-(q^2)^2]\\
\mathbf{u}^s\cdot\mathbf{n}\big|_{z=l} &= -\frac{\alpha q^2}{6a}[3(q^1)^2-(q^2)^2], \quad \mathbf{u}^s\cdot\mathbf{n}\big|_\Gamma = \alpha q^1 q^2
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Для решения задачи (1.1), (6.18) методом п. 5 находим из (6.18) и (5.5) значение $\varphi^s_{0n} = 0$ для задачи Неймана

$$\nabla^2\varphi_0 = 0, \quad \varphi_{0,n}\big|_{S/S'} = \varphi^s_{0n} \tag{6.19}$$

Ее решение дает $\varphi_0 = c_0$, $x \in \overline{D}$. Константа c_0 определяется при известном $\mathbf{u}^s\cdot\mathbf{n}$ интегральным условием (5.11):

$$3\kappa(1+2\kappa)^{-1}c_0 = -\frac{1}{V}\int_S \mathbf{u}^s\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{6.20}$$

Подставляя решение задачи (6.19) в (1.4) и (5.7), вычисляя по (6.18) $\mathbf{n}\times\mathbf{p}^s_\tau$ и $\mathbf{n}\times\nabla^s(\mathbf{u}^s\cdot\mathbf{n})$, получаем $\mathbf{u}^{(2)}$ и из (5.7), (5.8) находим непрерывную всюду на S определенную с точностью до аддитивной константы $c_1 = \varphi^s_1(x_0)$ функцию φ^s_1:

$$\begin{aligned}
\varphi^s_1\big|_{z=0} &= \frac{\alpha}{12a}\{(q^1)^3 - 3a[(q^1)^2+(q^2)^2] - 3q^1(q^2)^2 + 2a^3\} + c_1\\
\varphi^s_1\big|_{z=l} &= \frac{\alpha}{12a}\{-(q^1)^3 - 3a[(q^1)^2+(q^2)^2] + 3q^1(q^2)^2 + 2a^3 + 6la^2\} + c_1\\
\varphi^s_1\big|_\Gamma &= \frac{\alpha}{2}[(q^1)^2-(q^2)^2] + c_1
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Функция φ^s_1 задает граничное условие задачи Дирихле

$$\nabla^2\varphi_1 = 0, \quad \varphi_1\big|_S = \varphi^s_1 \tag{6.22}$$

Решение задачи (6.22), (6.21) ищем в виде полинома

$$\varphi_1 = b_{klm}x^k y^l z^m (k, l, m = 0, \ldots, 3;\ k+l+m \le 3) \tag{6.23}$$

Подставляя (6.23) в (6.22), (6.21), находим, что отличными от нуля будут только коэффициенты

$$b_{000} = c_1 + \frac{\alpha a^2}{6}, \quad b_{300} = \frac{\alpha}{12a}, \quad b_{120} = \frac{-\alpha}{4a}, \quad b_{200} = b_{020} = -\frac{\alpha}{4}, \quad b_{002} = \frac{\alpha}{2}$$

Таким образом, функция φ_1 найдена:

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{12a}[x^3 - 3xy^2 - 3a(x^2 + y^2 - 2z^2) + 2a^3] + c_1 \tag{6.24}$$

Теперь на основании (1.4), (1.5) и (6.24) имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u} &= \frac{\alpha}{2a}[(x^2 - y^2 - 2ax)\mathbf{i} - 2y(x+a)\mathbf{j} + 4az\mathbf{k}] \\ \nabla \cdot \mathbf{k} &= \frac{3\kappa}{1+2\kappa}c_0 \end{aligned} \tag{6.25}$$

Общее решение этой системы будет

$$\mathbf{u} = \left(\frac{3\kappa}{1+2\kappa}c_0 x - \frac{\alpha y}{a}(x+a)z\right)\mathbf{i} - \frac{\alpha z}{2a}(x^2 - y^2 - 2ax)\mathbf{j} + \nabla\varphi_2 \tag{6.26}$$

Для φ_2 из (6.18), (6.25), (6.26) имеем задачу Неймана

$$\nabla^2\varphi_2 = 0, \quad \varphi_{2,n}\big|_{S/S'} = \varphi_{2n}^s \tag{6.27}$$

$$\begin{aligned} &\varphi_{2n}^s\big|_{x=a} = -\alpha yz + \frac{3\kappa a}{1+2\kappa}c_0, \quad \varphi_{2n}^s\big|_{z=0} = \frac{\alpha y}{6a}(3x^2 - y^2), \quad \varphi_{2n}^s\big|_{z=l} = -\frac{\alpha y}{6a}(3x^2 - y^2) \\ &\varphi_{2n}^s\big|_{y=\pm\frac{x+2a}{\sqrt{3}}} = \pm\frac{\alpha z}{\sqrt{3}}(2x+a) - \frac{3\kappa}{2(1+2\kappa)}c_0 x \end{aligned} \tag{6.28}$$

Ищем решение задачи (6.27), (6.28) в виде

$$\varphi_2 = b_{klm}x^k y^l z^m (k, l, m = 0, 1, \ldots, 4;\ k + l + m \le 4) \tag{6.29}$$

Подставляя (6.29) в (6.27) и (6.28), находим, что от нуля отличны только

$$b_{0.31} = -\frac{\alpha}{6a}, \quad b_{211} = \frac{\alpha}{2a}, \quad b_{200} = -\frac{3\alpha}{2}\frac{\kappa}{1+2\kappa}c_0, \quad b_{000} = c$$

Таким образом, функция φ_2 имеет вид

$$\varphi_2 = \frac{\alpha yz}{6a}(3x^2 - y^2) - \frac{3\kappa c_0 x^2}{2(1+2\kappa)} + c \tag{6.30}$$

где c – произвольная константа. Подставляя (6.30) в (6.26), находим вектор перемещения

$$\mathbf{u} = \alpha(-yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + {}^1\!/_6\, y(3x^2 - y^2))\mathbf{k}/a \tag{6.31}$$

Сопоставляя (6.31) с решением той же задачи, полученным с применением функции напряжений Ф, убеждаемся, что они совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
2. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
3. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М., Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
4. *Треффц Е.* Математическая теория упругости. М.: Гостехиздат, 1934. 172 с.

5. *Папкович П.Ф.* Обзор некоторых общий решений основных дифференциальных уравнений покоя изотропного упругого тела // ПММ. 1937. Т. 1. Вып. 1. С. 117–132.
6. *Галеркин Б.Г.* К вопросу об исследовании напряжений и деформаций в упругом изотропном теле // Собр. соч. Б.Г. Галеркина. М.: Изд-во АН СССР, 1952. Т. 1. С. 318–321.
7. *Tedone O.* Saggio di una teoria generale delle equazioni dell' equilibrio elasitco peruncorpo isotropo // Ann. di Mat. Pura et appl. Ser. 3. 1904. V. 10. P. 13–64.
8. *Папкович П.Ф.* Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции // Изв. АН СССР. Сер. мат. и естеств. наук. 1932. № 10. С. 1425–1435.
9. *Neuber H.* Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie // ZAMM. 1934. Bd. 14. H. 4. S. 203–212.
10. *Нейбер Г.* Концентрация напряжений. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 204 с.
11. *Гродский Г.Д.* Интегрирование общих уравнений равновесия изотропного упругого тела при помощи ньютоновских потенциалов и гармонических функций // Изв. АН СССР. Отд. мат. и естеств. наук. 1935. № 4. С. 587–614.
12. *Mindlin R.D.* Note on the Galerkin and Papkovich stress functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1936. V. 42. № 6. P. 373–376.
13. *Тер-Мкртичьян Л.Н.* Об общем решении задачи теории упругости // Тр. Ленингр. политехн. ин-та 1947. № 4. С. 3–38.
14. *Крутков Ю.А.* Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. М., Л.: Изд-во АН СССР, 1949. 200 с.
15. *Аржаных И.С.* Исследования по механике сплошной среды. // Тр. ин-та математики и механики. Ташкент. Изд-во АН УзбССР. 1952. Вып. 9. С. 60–101.
16. *Слободянский М.Г.* Общие формы решений уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей, выраженные через гармонические функции // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 1. С. 55–74.
17. *Слободянский М.Г.* Об общих и полных формах решений уравнений упругости // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 468–482.
18. *Eubanks R.A., Sternberg E.* On the completeness of the Boussinesq – Papkovich stress functions // J. Ration. Mech. Anal. 1956. V. 5. № 5. P. 735–746.
19. *Naghdi P.M., Hsu S.S.* On a representation of displacements in linear elasticity in terms of three stress functions // J. Math. Mech. 1961. V. 10. № 2. P. 233–245.
20. *Gurtin M.E.* On Helmholtz's theorem and the completeness of the Papkovich – Neuber stress unctions for infinite domains // Arch. Ration. Mech. Anal. 1962. V. 9. № 3. P. 225–233.
21. *Stippes M.* Completeness of the Papkovich potentials // Quart. Appl. Math. 1969. V. 26. № 4. P. 477–483.
22. *Шмаков А.П.* Представление общего решения в теории упругости // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1975. Вып. 4. С. 5–12.
23. *Tran Cong T., Steven G.P.* On the representation of elastic displacement fields in terms of three harmonic functions // J. Elast. 1979. V. 9. № 3. P. 325–333.
24. *Остросаблин Н.И.* Общее представление решения уравнений линейной теории упругости изотропного тела // Динамика сплошной среды. Неклассические задачи механики деформируемого твердого тела. Новосибирск. Изд-е Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1983. Вып. 61. С. 77–91.
25. *Wang M.Z.* The Naghdi – Hsu solution and the Naghdi – Hsu transformation // J. Elast. 1985. V. 15. № 1. P. 103–108.
26. *Бородачев А.И.* Об одном обобщении преобразования Нахди – Хсу и его применении к задачам теории упругости // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 611–615.

Москва

Поступила в редакцию
2.12.1999