

О МЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФРИКЦИОННЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ С НАКЛОННОЙ УПРУГОЙ СИЛОЙ

Рассматривается видоизмененная механическая модель фрикционных автоколебаний “груз на ленте”, в которой пружина установлена под некоторым углом к плоскости ленты. Показано, что при одностороннем контакте тела с лентой в системе могут возникать автоколебательные движения, в которых тело периодически покидает опору и в течение части периода движется без контакта с последней, совершая свободное движение. При этом движения с отрывом могут быть двух типов – с участком относительного покоя на ленте (движения вместе с лентой) и без такового. Обсуждаются вопросы установления периодических движений указанных типов, приводится сравнение со свойствами классической модели, в которой пружина параллельна плоскости ленты.

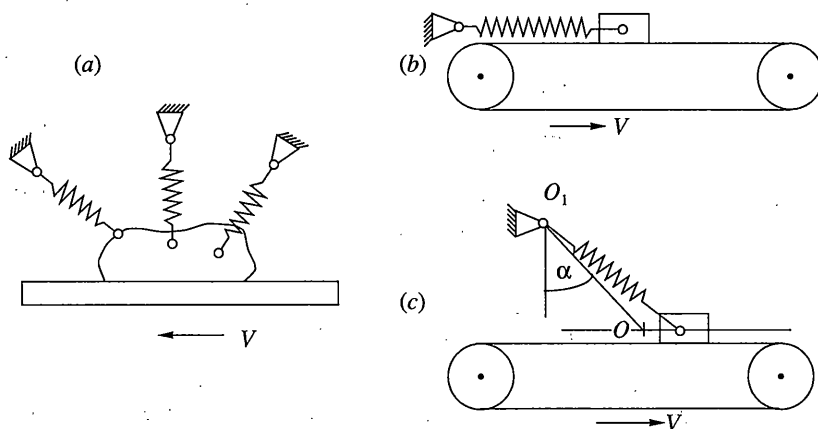
1. Введение. Механическая модель системы. Пусть имеем упруго закрепленное тело, опирающееся своей плоской гранью на шероховатую опору (фиг. 1, *a*). Опора движется поступательно и прямолинейно с постоянной скоростью V параллельно плоскости соприкосновения тел. Эта ситуация встречается во многих технических устройствах – механизмах приборов, устройствах автоматики, металлорежущих станках [1, 2].

Известно, что в подобных упругофрикционных системах при определенных условиях возникают автоколебания – в одних случаях близкие к гармоническим (томсоновские), в других – происходящие в форме скачков (разрывные, или релаксационные колебания). Была предложена механическая модель в виде груза на движущейся шероховатой ленте (фиг. 1, *b*), которая при определенных предположениях о характере зависимости коэффициента трения от скорости скольжения позволяет осуществить математическое описание обоих типов возникающих автоколебаний. Эта модель, принадлежащая Ван-дер-Полю, наряду с маятником Фроуда, стала одной из эталонных моделей фрикционной автоколебательной системы.

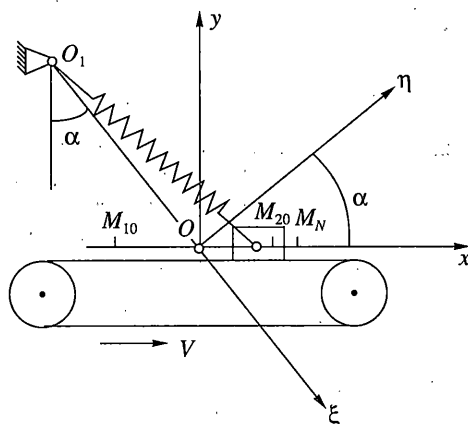
Однако в общем случае упругого закрепления тела данная модель не является достаточной, так как главные оси жесткости упругого подвеса могут располагаться под углом к плоскости скольжения. Поэтому представляет интерес рассмотреть модифицированный вариант этой системы, в котором пружина имеет некоторый наклон к плоскости ленты (фиг. 1, *c*). При этом в системе обнаруживаются качественно новые свойства, отсутствующие в случае с продольно расположенной пружиной.

2. Постановка задачи и уравнения движения. Будем рассматривать механическую модель фрикционных автоколебаний с наклонной пружиной (см. фиг. 1, *c*). Пусть точка O соответствует положению тела на ленте, в котором пружина не напряжена, и пусть угол α – угол наклона пружины к вертикали в этом положении. Тело может двигаться вместе с лентой, скользить по ленте, а также отделяться от нее и переходить в свободное движение. Во всех перечисленных случаях движение будем полагать поступательным и рассматривать тело как материальную точку. Примем, что между телом и лентой действует кулоново сухое трение с коэффициентами $f_0, f (f_0 > f)$ в покое и при скольжении соответственно.

Введем с началом в точке O две неподвижные системы декартовых координатных осей – Ox и $O\xi\eta$ (фиг. 2). Несвободное движение тела, когда оно скользит по ленте или движется вместе с ней, удобно рассматривать в координатных осях Ox , свободное



Фиг. 1



Фиг. 2

движение – в осях $O\xi\eta$. Переход от системы Oxy к системе $O\xi\eta$ осуществляется при помощи ортогональной матрицы

$$A = \begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

Обратный переход – при помощи матрицы A^T , полученной из A транспонированием.

Будем считать, что смещения тела из положения равновесия O малы по сравнению с длиной пружины и пользоваться следующими линейризованными выражениями для проекций упругой силы пружины на координатные оси

$$\begin{aligned} F_{\xi} &= -c\xi, & F_{\eta} &= 0 \\ F_x &= -c\sin\alpha(x\sin\alpha - y\cos\alpha), & F_y &= c\cos\alpha(x\sin\alpha - y\cos\alpha) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь c – жесткость пружины, ξ, η, x, y – координаты тела соответственно в осях $O\xi\eta$ и Oxy (координата η в линейных слагаемых для упругой силы не содержится).

Когда тело находится в контакте с лентой, то есть движется вместе с лентой или скользит по ней, то $y \equiv 0$, и формулы для F_x, F_y принимают вид

$$F_x = -cx \sin^2 \alpha, \quad F_y = \frac{1}{2} cx \sin 2\alpha \quad (2.3)$$

Кроме упругой силы F и веса mg в этом случае к телу приложены еще нормальная реакция опоры $N(0, N)$, а также сила трения покоя $T_0(T_0, 0)$ или сила трения скольжения $T(T, 0)$, определяемые выражениями

$$N = mg - \frac{1}{2} cx \sin 2\alpha \quad (N \geq 0) \quad (2.4)$$

$$T_0 = cx \sin^2 \alpha, \quad -f_0 N \leq T_0 \leq f_0 N \quad (2.5)$$

$$T = -fN \operatorname{sign} V_r, \quad V_r = \dot{x} + V \quad (2.6)$$

Предполагается, что выполняется условие $\operatorname{tg} \alpha > f_0$, обеспечивающее существование срывов тела из состояния относительного покоя на ленте.

Выделим на оси x две точки $M_{10}(-h_{10}, 0)$ и $M_{20}(h_{20}, 0)$, где

$$h_{10} = \frac{gf_0}{k^2 \sin \alpha (\sin \alpha - f_0 \cos \alpha)}, \quad h_{20} = \frac{gf_0}{k^2 \sin \alpha (\sin \alpha + f_0 \cos \alpha)}, \quad k^2 = \frac{c}{m} \quad (2.7)$$

Отрезок на оси x $[-h_{10}, h_{20}]$ определяет “зону застоя” – множество положений тела на ленте, в которых восстанавливающая сила пружины $F_x = -cx \sin^2 \alpha$ не превышает по модулю значение максимальной силы трения покоя $f_0 N$. Если $x < -h_{10}$, то покоившееся относительно ленты тело будет скользить по ней в положительную сторону оси Ox , при $x > h_{20}$ в отрицательную сторону этой оси.

Отметим на оси x еще точку M_N с абсциссой

$$x = h_N = 2g/k^2 \sin 2\alpha \quad (h_N > h_{20}) \quad (2.8)$$

в которой реакция N обращается в нуль. В этом положении скользящее по ленте тело отделяется от нее и переходит в состояние свободного движения.

Теперь можем записать уравнения движения тела в различных случаях.

Если тело движется вместе с лентой, то выполняются соотношения

$$x = x_0 - V(t - t_0), \quad -h_{10} \leq x_0, \quad x \leq h_{20} \quad (2.9)$$

Здесь x_0, t_0 – координата и время в момент начала совместного движения. При скольжении с положительной относительной скоростью ($V_r > 0$) имеем дифференциальное уравнение движения

$$m\ddot{x} = -cx \sin^2 \alpha - f \left(mg - \frac{1}{2} cx \sin 2\alpha \right) \quad (2.10)$$

при скольжении с отрицательной относительной скоростью ($V_r < 0$) – уравнение

$$m\ddot{x} = -cx \sin^2 \alpha + f \left(mg - \frac{1}{2} cx \sin 2\alpha \right) \quad (2.11)$$

Свободное движение тела над лентой описывается двумя дифференциальными уравнениями, которые удобно записать в координатах ξ, η :

$$\ddot{\xi} + k^2 \xi = g \cos \alpha, \quad \ddot{\eta} = -g \sin \alpha, \quad (k^2 = c/m) \quad (2.12)$$

3. Уравнения удара. Этап свободного движения тела, наступающий после отделения от ленты, неминуемо заканчивается падением тела снова на ленту с косым ударом о нее. Для описания изменения нормальной составляющей скорости удара будем пользоваться гипотезой И. Ньютона

$$\dot{y}^+ = -R\dot{y}^- \quad (3.1)$$

В дальнейшем примем $R = 0$, то есть будем считать удар абсолютно неупругим. Здесь и далее индексами плюс и минус обозначаются значения соответствующих величин после удара и до удара соответственно.

Для касательной составляющей скорости удара существуют две употребительные гипотезы – гипотеза “сухого трения” и гипотеза “вязкого трения” [3, 4]. Первая выражается зависимостью

$$V_{rx}^+ = \begin{cases} V_{rx}^- - f(V_{ry}^+ - V_{ry}^-) \operatorname{sign} V_{rx}^- & \text{при } |V_{rx}^-| > f(V_{ry}^+ - V_{ry}^-) \\ 0 & \text{при } |V_{rx}^-| \leq f(V_{ry}^+ - V_{ry}^-) \end{cases} \quad (3.2)$$

вторая – равенством

$$V_{rx}^+ = (1 - \lambda)V_{rx}^- \quad (3.3)$$

В этих формулах $\dot{V}_r(V_{rx}, V_{ry})$ – скорость тела относительно ленты, f – коэффициент трения скольжения, λ – постоянный коэффициент, принимающий значения в интервале $[0, 1]$. Гипотеза сухого трения предпочтительнее в случае пологого сближения тел ($|V_{rx}^-| \gg |V_{ry}^-|$), гипотеза вязкого трения – в противоположном случае ($|V_{rx}^-| \ll |V_{ry}^-|$).

В проекциях абсолютной скорости $v(\dot{x}, \dot{y})$ и с учетом условия $R = 0$ соотношения (3.2), (3.3) запишутся, соответственно в виде:

$$\dot{x}^+ = \begin{cases} \dot{x}^- + f\dot{y}^- \operatorname{sign}(\dot{x}^- + V) & \text{при } |\dot{x}^- + V| > -f\dot{y}^- \\ -V & \text{при } |\dot{x}^- + V| \leq -f\dot{y}^- \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\dot{x}^+ = (1 - \lambda)\dot{x}^- - \lambda V \quad (3.5)$$

4. Периодические движения тела без отрыва от ленты. В системе могут устанавливаться несколько типов периодического движения. Наиболее простыми являются движения, происходящие без нарушения контакта с опорой, когда система имеет одну степень свободы. На фиг. 3 показан ее фазовой портрет в этом случае. Фазовые траектории, расположенные выше прямой $\dot{x} = -V$, соответствуют дифференциальному уравнению (2.10), которое запишем в более удобном виде

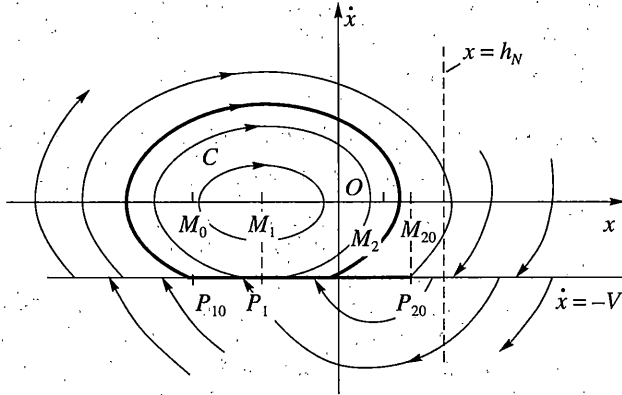
$$\ddot{x} + k_1^2 x = -gf, \quad k_1^2 = k^2 \sin \alpha (\sin \alpha - f \cos \alpha) \quad (4.1)$$

Это эллипсы и дуги эллипсов с общим центром в точке $M_1(-h_1, 0)$, $h_1 = gf/k_1^2$, служащей положением равновесия. Фазовые траектории ниже прямой $\dot{x} = -V$ соответствуют уравнению (2.11), которое представим в виде

$$\ddot{x} + k_2^2 x = gf, \quad k_2^2 = k^2 \sin \alpha (\sin \alpha + f \cos \alpha) \quad (4.2)$$

и являются дугами эллипсов с центром в точке $M_2(h_2, 0)$, $h_2 = gf/k_2^2$, определяющей положение равновесия в случае, если бы лента двигалась в противоположную сторону.

Отрезок прямой $\dot{x} = -V$, заключенный между точками $P_{10}(-h_{10}, -V)$ и $P_{20}(h_{20}, -V)$, соответствует состояниям относительного покоя тела на ленте. Попадая в результате



Фиг. 3

предшествующего движения на этот отрезок, фазовая точка движется вдоль него до тех пор, пока не достигнет положения срыва $P_{10}(-h_{10}, -V)$.

Видно, что в системе имеют место два вида безотрывного периодического движения тела. Если остановок скольжения не происходит, то тело совершает простые гармонические колебания. На фиг. 3 им соответствуют фазовые траектории в виде полных эллипсов. Последней такой фазовой траекторией является эллипс C , касающийся прямой $\dot{x} = -V$ в точке $P_1(-h_1, -V)$. Кроме того, существует жестко возбуждаемый предельный цикл, содержащий, наряду с участком скольжения, участок совместного движения тела и ленты (соответствующая фазовая кривая на фиг. 3 выделена жирной линией).

Однако следует заметить, что введение в систему столь угодно малого линейного сопротивления приводит к тому, что гармонические колебания переходят в затухающие и исчезают. Что же касается предельного цикла, то при достаточно малой диссипации он сохраняется, претерпевая лишь небольшие изменения (дуга эллипса трансформируется в дугу слабо скручивающейся спирали). По этой причине для дальнейшего основного интерес представляет только предельный цикл, определяющий безотрывное автоколебательное движение тела от его фрикционного взаимодействия с движущейся лентой.

Аналогичный предельный цикл в системе с параллельно расположенной пружиной был изучен ранее [1, 5] и получил название разрывных фрикционных автоколебаний или скачков при трении. Отметим, что при $f_0 = f$ безотрывные фрикционные автоколебания (скачки) не возникают.

В рассматриваемой здесь системе с наклонной пружиной найденный предельный цикл реализуется лишь в определенных границах – пока максимальные отклонения тела в процессе автоколебаний не превышают величины $x = h_N$, при которой нормальная реакция N обращается в нуль. Выразим эти границы через параметры системы.

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (4.1) при начальных условиях

$$t = 0, \quad x = -h_{10}, \quad \dot{x} = -V \tag{4.3}$$

определяющих момент срыва тела из состояния относительного покоя на ленте

$$x = a \sin(k_1 t + \theta) - h_1, \quad h_1 = fg/k_1^2$$

$$a = [(h_1 - h_{10})^2 + (V/k_1)^2]^{1/2}, \quad \sin \theta = \frac{h_1 - h_{10}}{a}, \quad \cos \theta = -\frac{V}{ak_1} \tag{4.4}$$

В этом движении тело может достигать или не достигать положения $x = h_N$. При помощи соотношений (4.4) и равенства (2.8) устанавливаем, что при условии

$$V < k_1[h_N^2 - h_{10}^2 + 2h_1(h_N + h_{10})]^{1/2} = V_* \quad (4.5)$$

тело не достигает этого положения, при $V = V_*$ – достигает с нулевой абсолютной скоростью, при $V > V_*$ – достигает, имея при этом скорость $\dot{x} = \dot{x}_1 > 0$.

Соотношения (4.4), (4.5) и закон движения тела на участках совместного движения с лентой (2.9) полностью определяют режим фрикционных автоколебаний без отрыва тела от ленты.

5. Периодические колебания с участком свободного движения. Возможны два типа таких движений: с участком совместного движения с лентой и без такового.

Движения первого типа начинаются при начальных условиях (4.3) и до прихода тела в положение $x = h_N$ происходят согласно уравнению (4.4). В момент $t = t_1$, когда имеем $x = h_N$, тело отделяется от ленты и переходит в свободное движение, имея в момент отрыва скорость

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_1 = (\dot{x}_1, 0)^T, \quad \dot{x}_1 = \dot{x}(t_1) = \sqrt{V^2 - V_*^2} \quad (5.1)$$

Уравнения движения найдем, интегрируя дифференциальные уравнения (2.12) при начальных условиях, определяемых положением и скоростью тела в момент t_1 : $x = h_N$, $y = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_1$, $\dot{y} = 0$. Пересчитывая эти значения к координатам $O\xi\eta$ по формулам

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi(0) \\ \eta(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_N \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{\xi}(0) \\ \dot{\eta}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

и интегрируя (2.12) при начальных условиях (5.2), получаем уравнения движения тела после отрыва от ленты

$$\xi = b \sin(kt + \beta) + \xi_*, \quad \dot{\xi} = bk \cos(kt + \beta) \quad (5.3)$$

$$\eta = h_N \cos\alpha + \dot{x}_1 t \cos\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \sin\alpha, \quad \dot{\eta} = \dot{x}_1 \cos\alpha - g t \sin\alpha$$

Здесь момент отрыва принят за новое начало отсчета времени и введены обозначения

$$\xi_* = g k^{-2} \cos\alpha, \quad b = [(h_N \sin\alpha - \xi_*)^2 + (\dot{x}_1 \sin\alpha / k)^2]^{1/2} \quad (5.4)$$

$$\sin\beta = b^{-1}(h_N \sin\alpha - \xi_*), \quad \cos\beta = (k b)^{-1} \dot{x}_1 \sin\alpha$$

Уравнения действительны до момента $t = t_2$, в который тело упадет снова на ленту.

Дальнейшее исследование свободного движения упрощается, если перейти к безразмерным величинам

$$p = \frac{\xi - \xi_*}{b}, \quad q = \frac{\eta - h_N \cos\alpha}{v \xi_* \operatorname{tg}\alpha}, \quad v = \frac{k \dot{x}_1}{g \operatorname{tg}\alpha}, \quad \tau = k t \quad (5.5)$$

и уравнения (5.3) записать в следующем безразмерном виде:

$$\begin{aligned} p &= \sin(\tau + \beta), \quad p' = \cos(\tau + \beta) \\ q &= \tau - (2v)^{-1} \tau^2, \quad q' = 1 - v^{-1} \tau, \quad (') = d/d\tau \end{aligned} \quad (5.6)$$

Для вычисления b и β в силу (5.4), (5.5) при этом получаем

$$h_N \sin \alpha - \xi_* = \xi_* \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad k^{-1} \dot{x}_1 \sin \alpha = v \xi_* \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad b = \sqrt{1 + v^2} \xi_* \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (5.7)$$

$$\sin \beta = (1 + v^2)^{-1/2}, \quad \cos \beta = v(1 + v^2)^{-1/2} \quad (0 \leq \beta \leq \pi/2)$$

Найдем уравнение траектории, описываемой телом в свободном движении. Для этого из третьего уравнения (5.6) выразим τ :

$$\tau = v \pm \sqrt{v^2 - 2qv} \quad (5.8)$$

Так как при $\tau = 0$ имеем $q = 0$, то в процессе свободного движения (при монотонном возрастании τ) безразмерная координата тела q вначале возрастает, далее в момент $\tau = v$ достигает своего наибольшего значения $q = v/2$, после чего монотонно убывает. Следовательно, в формуле (5.8) знак минус следует брать на интервале возрастания q (при $q' > 0$), знак плюс – на интервале убывания q (при $q' < 0$). Подставляя теперь (5.8) в первую из формул (5.6) и учитывая сказанное, получаем искомое уравнение траектории тела на этапе свободного движения (в переменных q, p):

$$p = \begin{cases} \sin(v - \sqrt{v^2 - 2qv} + \beta) & \text{при } q' > 0 \\ \sin(v + \sqrt{v^2 - 2qv} + \beta) & \text{при } q' < 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

В момент падения тела на ленту $t = t_2 = \tau_2/k$ имеем $\xi = \eta \operatorname{tg} \alpha$. Учитывая также, что падение осуществляется на нисходящей ветви траектории (при $q' < 0$), при помощи (5.9) получаем следующее уравнение для определения значений $q = q_2$ переменной q в момент падения:

$$\sin(v + \beta + \sqrt{v^2 - 2qv}) = \sin \beta + q \cos \beta \quad (5.10)$$

Решая это трансцендентное уравнение, определяем $q = q_2$ (место падения); далее по формуле (5.8), в которой следует выбрать знак плюс, находим значение безразмерного момента времени падения $\tau = \tau_2$.

Можно предложить и более удобную схему решения. Вначале найти момент падения $\tau = \tau_2$, для чего следует решить вытекающее из (5.8), (5.10) уравнение

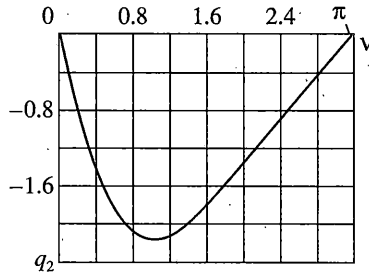
$$F(\tau) = 2v, \quad F(\tau) = \frac{\tau^2 - 2(1 - \cos \tau)}{\tau - \sin \tau} \quad (5.11)$$

которое легко решается графически. Для этого следует построить график функции $F(\tau)$ и, задаваясь значением v , определить по графику абсциссу $\tau = \tau_2$, соответствующую значению функции $F(\tau) = 2v$. Далее по формуле

$$q_2 = \tau_2 - \tau_2^2/2v \quad (5.12)$$

может быть вычислена безразмерная координата места падения q_2 . Результаты решения этой системы при некоторых значениях v представлены на фиг. 4.

Когда τ_2, q_2 найдены, то по приведенным выше формулам могут быть вычислены все кинематические характеристики тела в этот момент. Этим открывается возможность для составления и решения уравнений удара (3.1), (3.4) или (3.1), (3.5).



Фиг. 4

Чтобы определить предударное состояние тела, следует воспользоваться зависимостями (5.3)–(5.7) и вычислить значения $\xi_2 = \xi(t_2)$, $\eta_2 = \eta(t_2) = \xi_2 \operatorname{ctg} \alpha$, $\dot{\xi}_2 = \dot{\xi}(t_2)$, $\dot{\eta}_2 = \dot{\eta}(t_2)$. Далее остается перейти по формулам

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{\dot{x}}_2 \\ \bar{\dot{y}}_2 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} \dot{\xi}_2 \\ \dot{\eta}_2 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

к системе координат Ox_2y_2 и решить уравнения удара.

По окончании удара координаты тела остаются прежними ($x_2^+ = x_2$, $y_2^+ = 0$), а скорость становится равной $v = v_2^+ = (\dot{x}_2^+, 0)^T$, где значение \dot{x}_2^+ вычисляется по формулам (3.4) или (3.5).

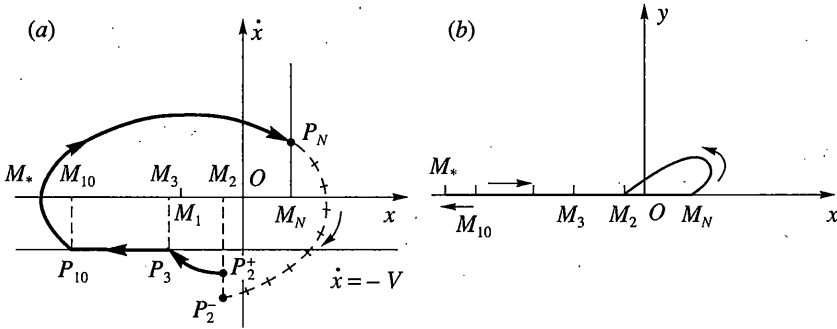
После удара тело либо движется вместе с лентой, если выполняются условия $\dot{x}_2^+ = -V$, $h_{10} < x_2 < h_{20}$, либо скользит по ней, если $\dot{x}_2^+ \neq -V$, $x_2 < h_N$ или $\dot{x}_2^+ = -V$, $h_{20} < x_2 \leq h_N$.

В первом случае закон послеударного движения выписывается сразу: $x = x_2 - V(t - t_2)$ и сохраняет силу вплоть до момента срыва из относительного покоя по достижении положения $x = -h_{10}$.

Во втором случае закон движения получается после интегрирования дифференциального уравнения (4.1) или (4.2) при начальных условиях $x(t_2) = x_2$, $\dot{x}(t_2) = \dot{x}_2^+$. При этом может случиться, что существует момент $t = t_3$, в который тело имеет относительную остановку в некотором положении $x = x_3$ внутри интервала застоя $[-h_{10}, h_{20}]$. Тогда и в этом случае существует интервал совместного движения с лентой, и ему соответствует уравнение $x = x_3 - V(t - t_3)$, $t_3 \leq t \leq (x_3 + h_{10})/V$.

В обоих выделенных случаях описанный цикл движения будет повторяться вновь и вновь, что свидетельствует об установлении в системе автоколебаний. Это автоколебания разрывного типа, в которых интервалы скольжения и относительного покоя тела на ленте разделяются интервалами “полета” тела над лентой с последующими ударами о нее в моменты падения. Наличие участков относительного покоя, как и в системе с параллельной пружиной, гарантирует асимптотическую устойчивость колебаний.

На фиг. 5 изображена схема соответствующего цикла автоколебаний – на фазовой плоскости (x, \dot{x}) (фиг. 5, а) и плоскости координат (фиг. 5, б). За начало цикла на фазовой плоскости можно принять точку $P_{10}(-h_{10}, -V)$, в которой происходит срыв тела из относительного покоя на ленте. После срыва тело скользит по ленте в соответствии с



Фиг. 5

уравнением (4.1). При этом фазовая точка описывает дугу эллипса $P_{10}M_*P_N$ (фиг. 5, а), а тело проходит положение $M_*(a + h_1, 0)$, где имеет остановку (абсолютную), далее движется в обратном направлении и последовательно проходит положения M_{10}, O, M_N (см. фиг. 5, б).

В положении M_N тело отделяется от ленты, описывает петлю в свободном движении, которое заканчивается в точке $M_2(x_2, 0)$ падением на ленту и ударом. На этом этапе фазовое пространство четырехмерно. Проекция соответствующей четырехмерной фазовой траектории на плоскость (x, \dot{x}) условно показана крестиками. После удара, которому на фазовой плоскости соответствует вертикальный отрезок $P_2^-P_2^+$ тело либо сразу движется вместе с лентой, проходя путь M_2M_{10} , либо сначала скользит (на фиг. 5, а показан именно этот случай) и лишь затем движется совместно с лентой, проходя путь M_3M_{10} (на фазовой плоскости – участок P_3P_{10}).

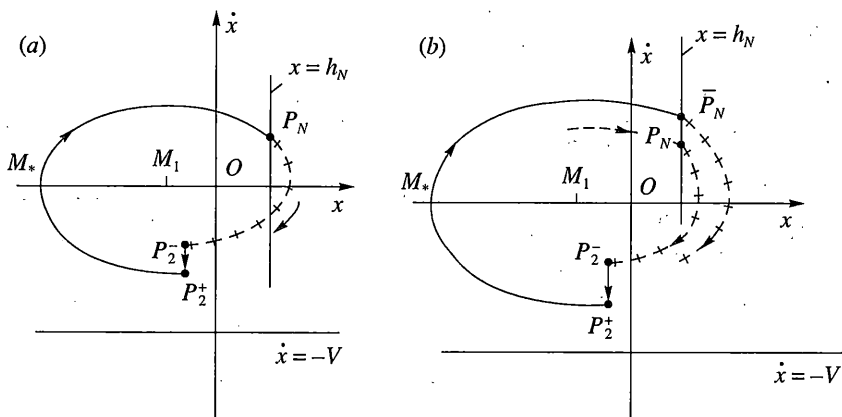
Далее весь цикл повторяется. Полученные выше зависимости позволяют определить все характеристики автоколебательного процесса – продольный и поперечный размахи, период автоколебаний и т.д.

6. Автоколебания без интервала относительного покоя. Если у уравнения (4.1) существуют замкнутые фазовые траектории, пересекающиеся с прямой $x = h_N$, то возможно установление автоколебаний без интервалов движения тела совместно с лентой. Цикл движения состоит при этом только из интервалов скольжения и интервалов свободного движения, разделяемых ударами. На фиг. 6, а изображена схема соответствующего предельного цикла. Крестиками, как и на фиг. 5, а, условно показана проекция на плоскость (x, \dot{x}) четырехмерной фазовой траектории свободного движения.

Вертикальный отрезок $P_2^-P_2^+$ соответствует удару, сплошная линия $P_2^+M_*P_N$ – скольжению тела по ленте, которое начинается сразу после удара и продолжается до отрыва от ленты при $x = h_N$.

Существование, устойчивость и характеристики данного типа автоколебаний могут быть исследованы при помощи метода точечных отображений [6], рассматривая на фазовой плоскости (x, \dot{x}) точечное отображение Φ полупрямой $x = h_N, \dot{x} > 0$ в себя (фиг. 6, б).

Отображение Φ состоит из последовательности преобразований Φ_1, Φ_2, Φ_3 . Преобразование Φ_1 соответствует этапу свободного движения тела и переводит точку указанной полупрямой $P_N(h_N, \dot{x}_1)$ в точку фазовой плоскости $P_2^-(x_2, \dot{x}_2^-)$. Оно получается из



Фиг. 6

решения дифференциальных уравнений (2.12) с начальными условиями (5.2), в которых величину $\dot{x}_1 > 0$ следует считать произвольной. При этом все зависимости (5.3)–(5.12) остаются в силе, а значения x_2 , $\dot{x}_2 = \dot{x}_2^-$ вычисляются так. По заданному \dot{x}_1 следует вычислить согласно (5.5) величину v и, решая уравнения (5.8), (5.10) или (5.11), (5.12), найти τ_2 и q_2 (при этом можно воспользоваться графиком фиг. 4). После этого, по известным теперь значениям $t_2 = \tau_2/k$, q_2 по формулам (5.3)–(5.5), (5.7) нужно вычислить величины $\xi(t_2)$, $\xi(t_2)$, $\eta(t_2)$ и пересчитать в систему координат Oxy . В целях контроля можно вычислить согласно (5.3) и величину η_2 , которая должна быть равна значению $\xi_2 \operatorname{ctg} \alpha$.

Преобразование Φ_2 соответствует удару и переводит точку $P_2^-(x_2, \dot{x}_2^-)$ фазовой плоскости в точку $P_2^+(x_2, \dot{x}_2^+)$ той же плоскости согласно уравнениям (3.1), (3.4) (или (3.1), (3.5)) и условию $R = 0$.

Преобразование Φ_3 соответствует послеударному скольжению тела и переводит точку $P_2^+(x_2, \dot{x}_2^+)$ фазовой плоскости в точку $\bar{P}_N(h_N, \dot{x}_1)$ полупрямой $x = h_N$, $\dot{x} > 0$, завершая тем самым цикл движения. Это преобразование получается из решения уравнений (4.1) с начальными условиями $t = t_2$, $x = x_2$, $\dot{x} = \dot{x}_2^+$, то есть из соотношений

$$\begin{aligned} x &= a \sin(k_1 t + \theta) - h_1, & \dot{x} &= a k_1 \cos(k_1 t + \theta) \\ a &= [(x_2 + h_1)^2 + (\dot{x}_2^+/k_1)^2]^{1/2} \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\sin(k_1 t_2 + \theta) = \frac{x_2 + h_1}{a}, \quad \cos(k_1 t_2 + \theta) = \frac{\dot{x}_2^+}{a k_1} \tag{6.2}$$

Полагая $x = h_N$, получаем уравнения, из которых определяются значения времени $t = \bar{t}$ и скорости $\dot{x}_1 = \dot{x}_1$ в момент завершения цикла.

Изучение функции последования $\bar{x}_1 = \chi(\dot{x}_1)$ итогового преобразования Φ в общем виде осуществить затруднительно. Однако при заданных числовых значениях параметров системы, последовательно решая уравнения преобразований Φ_1, Φ_2, Φ_3 , можно установить существование или отсутствие отображения Φ и в случае существования построить соответствующую диаграмму Ламерея. Устойчивой неподвижной точке отображения Φ , устанавливаемой по диаграмме Ламерея, и будут соответствовать автоколебания рассматриваемого типа. Из всего предыдущего видно также, что если такие автоколебания существуют, то это никак не связано с какой-либо зависимостью коэффициента трения от скорости скольжения.

7. Числовой пример. Движения описанного типа можно наблюдать, заставляя скользить по поверхности стола кусочек карандашной резинки, прикрепленный к концу цилиндрической пружинки. Пружинка наклонена под углом α к вертикали, а ее свободный (верхний) конец равномерно перемещается со скоростью V параллельно плоскости стола. Пусть $m = 1$ г, $c = 10$ Н/м, $f_0 = 0.6, f = 0.4, \alpha = 40^\circ$. Принимая $g = 980$ см/с, находим $k = 100$ с⁻¹, $k_1 = 46.5$ с⁻¹, $k_2 = 78.11$ с⁻¹, $h_{10} = 0.4993$ см, $h_1 = 0.1813$ см, $h_{20} = 0.0830$ см, $h_2 = 0.0642$ см, $h_N = 0.1990$ см. Для “критического” значения скорости $V = V_*$ получаем $V = V_* \approx 9.7$ см/с.

Примем $V = 10.7$ см/с. При этой скорости ленты, незначительно превышающей критическую, следует ожидать установление автоколебаний с участком относительного покоя. Принимая за начало цикла момент начала скольжения тела из состояния относительного покоя на ленте и подставляя соответствующие числовые значения в (4.4) получаем закон движения тела после его срыва из относительного покоя

$$\begin{aligned} x &= 0.3925 \sin(46.5t + \theta) - 0.1813 \\ \sin \theta &= -0.8102, \quad \cos \theta = -0.5863 \end{aligned} \quad (7.1)$$

Полагая в (7.1) $x = h_N = 0.1990$ см, определяем момент отделения от ленты $t = t_1 = 0.0758$ с и скорость в этот момент $\dot{x} = \dot{x}_1 = 4.5148$ см/с.

В момент $t = t_1$ тело переходит в свободное движение и движется согласно уравнениям

$$\begin{aligned} \xi &= 0.0602 \sin(100t + 1.0682) + 0.0751 \\ \eta &= 0.1524 + 3.4583t - 315t^2 \end{aligned} \quad (7.2)$$

В уравнениях момент отделения от ленты принят за новое начало отсчета времени.

При помощи (7.2) и схемы вычислений, приведенной в п. 5, определяем время и состояние тела в момент падения: $t = t_2 = 0.0207$ с, $\xi_2 = 0.0750$ см, $\eta_2 = 0.894$ см, $\dot{\xi}_2 = -6.02$ см/с, $\dot{\eta}_2 = -9.5827$ см/с. Пересчитываем данные в систему координат Oxy : $x_2 = 0.1667$ см, $y_2 = 0$, $\dot{x}_2 = -11.21$ см/с, $\dot{y}_2 = -1.5484$ см/с.

Эти данные определяют состояние тела непосредственно перед ударом. После удара координаты не изменяются, а скорости определяются в соответствии с (3.1), (3.4) или (3.1), (3.5). Воспользуемся гипотезой “вязкого” трения, принимаем $R = 0, \lambda = 0.5$ и по (3.1), (3.5) находим $\dot{x}_2^+ = -10.95$ см/с, $\dot{y}_2^+ = 0$.

Так как $\dot{x}_2^+ < -V(V_r^+ < 0)$, то послеударное движение происходит в силу уравнения (4.2).

Интегрируя при начальных условиях $t = 0, x = x_2, \dot{x} = \dot{x}_2^+$, получаем

$$\begin{aligned} x &= 0.1497 \sin(78.11t + \theta) + 0.0642 \\ \sin \theta &= 0.3501, \quad \cos \theta = -0.9368 \end{aligned} \quad (7.3)$$

В момент $t = t_3 = 0.01$ с, устанавливаемый при помощи (7.3) и равенства $\dot{x} = -V$, происходит остановка скольжения, при этом $x = x_3 = 0.0038$ см. Так как x_3 принадлежит интервалу “застоя”, тело далее движется вместе с лентой и приходит расстояние $x_3 + h_{10}$ до точки “срыва” за время $t_4 = (x_3 + h_{10})/V = 0.047$ с. После этого цикл движения будет повторяться с периодом $T = \sum_{i=1}^4 t_i = 0.1535$ с.

Автоколебания с относительными остановками в данном примере существуют и в том случае, если расчет удара выполнить по гипотезе “сухого” трения, согласно равенствам (3.1), (3.4). При этом период движения составит $T = 0.1540$ с.

Автоколебания без относительных остановок при принятой скорости ленты $V = 10.7$ см/с не возникают.

При $V = 30$ см/с построением диаграммы Ламерея обнаруживается существование для точечного отображения $\Phi = \Phi_3\Phi_2\Phi_1$ устойчивой неподвижной точки (при расчете удара обоими способами). В системе устанавливаются автоколебания с интервалами свободного движения, не сопровождающиеся относительными остановками тела на ленте, с периодом $T = 0.1390$ с (по гипотезе “вязкого” трения при расчете удара) и $T = 0.1227$ с (при расчете по гипотезе “сухого” трения). При этом автоколебаний первого вида, содержащих в периоде интервал движения вместе с лентой, не возникает.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ишлинский А.Ю. Механика гироскопических систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 482 с.
2. Кудинов В.А. Динамика станков. М.: Машиностроение, 1967. 359 с.
3. Нагаев Р.Ф. Периодические режимы вибрационного перемещения. М.: Наука, 1978. 160 с.
4. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Наука, Физматлит, 1997. 320 с.
5. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352 с.
6. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. 472 с.

Королев

Поступила в редакцию
6.12.2001