

УДК 534.1

© 2003 г. М.Е. ГЕРЦ, М.М. ГЕРЦ

АВТОРЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

Реализация желательных режимов колебаний механических систем часто решается с введением обратной связи по координатам. Рассмотрено влияние возбуждения системы по автоколебательной схеме на эффект А. Зоммерфельда, моделями которого являются колебательные системы с "ограниченным возбуждением" [1–4]. В первом приближении метода осреднения рассмотрены условия существования, устойчивости и самовозбуждения автоколебаний линейного осциллятора под действием сил инерции неуравновешенного ротора электродвигателя, производная движущего момента которого является функцией угла поворота ротора и перемещения осциллятора.

Определены параметры, при которых реализуется авторезонанс-"резонанс под действием силы, порождаемой движением самой системы" [5]. Показано, что в этом случае режим авторезонанса сохраняется при изменениях параметров осциллятора и электродвигателя. Кроме того, неустойчивые при традиционной схеме возбуждения режимы колебаний могут обрести устойчивость.

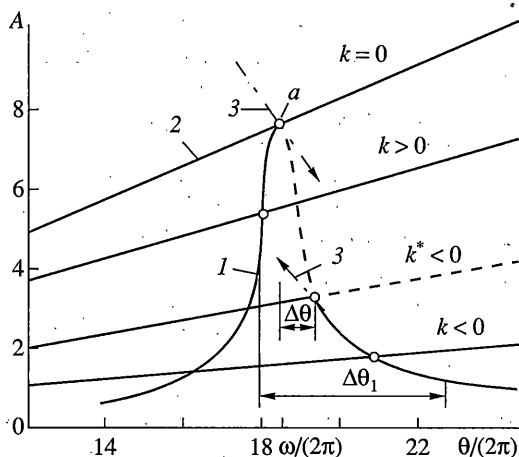
Уравнения движения системы с ограниченным возбуждением и обратной связью имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= -2b\dot{x} + 2d(\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \\ \ddot{\varphi} &= -p\dot{\varphi} + hz + 2q\ddot{x} \sin \varphi \\ \dot{z} &= k_1[k - (\text{sign} x) \cos \varphi] \\ \omega^2 &= K/(M+m), \quad 2b = B/(M+m), \quad 2d = mr/(M+m) \\ p &= (B_1 + H^2 R^{-1})/J, \quad 2q = mr/J, \quad h = H/JR \end{aligned} \quad (1)$$

Первые два уравнения имеют обычную форму для систем с ограниченным возбуждением [2, 3], где x – перемещение, K – жесткость, M – масса осциллятора, B и B_1 – коэффициенты сопротивления, φ – угол поворота ротора электродвигателя, m и r – соответственно масса дебаланса и ее эксцентриситет, H – коэффициент электромеханической связи, R и z – соответственно сопротивление и напряжение обмотки электродвигателя постоянного тока, J – момент инерции ротора. Эти же уравнения с другими значениями коэффициентов описывают также случаи использования пневматического, гидравлического и других двигателей [2, 3].

Второй член в правой части второго уравнения (1) представляет собой обобщенную силу (момент), величина которой зависит от координат x и φ в соответствии с третьим уравнением, причем постоянные коэффициенты k – безразмерная, k_1 – размерная (Bc^{-1}) величины.

В публикуемой работе исследуется случай, когда величины b, d, p, q, h, k_1 являются малыми порядка ε ($2b\omega^{-1} \ll 1, 2dr^{-1} \ll 1, p\omega^{-1} \ll 1, 2qr \ll 1, h\omega^{-1}H \ll 1, k_1\omega^{-2}H^{-1} \ll 1$), а индуктивность обмотки двигателя – величиной порядка ε^2 . Нетрудно показать, что



учет индуктивности с приведенной далее заменой переменных аналогичен случаю, рассмотренному в [6], при котором в уравнения первого приближения индуктивность не входит. Поэтому уравнения (1) сразу записаны без этой величины, что также соответствует использованию статической характеристики двигателя.

Осуществляя в (1) традиционную замену переменных

$$x = A \cos(\varphi + \xi), \quad \dot{x} = -A\omega \sin(\varphi + \xi), \quad \varphi = \theta$$

с учетом очевидного соотношения $\dot{A} \cos(\varphi + \xi) - \xi A \sin(\varphi + \xi) = (\theta - \omega)A \sin(\varphi + \xi)$ с точностью до величин первого порядка малости после осреднения правых частей полученных уравнений в стандартной форме по “быстрой” переменной φ получаем уравнения первого приближения

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= hz - p\theta + \omega\theta qA \sin \xi \\ \dot{A} &= -bA - d\theta^2 \omega^{-1} \sin \xi \\ \dot{\xi} &= \omega - \theta - d\theta^2 \omega^{-1} A^{-1} \cos \xi \\ \dot{z} &= 2k_1 \pi^{-1} (0.5k\pi - \cos \xi) \end{aligned} \quad (2)$$

где A и ξ – соответственно амплитуда и фаза, $\theta > 0$ – частота автоколебаний, $|1 - \theta\omega^{-1}| \ll 1$ – малая величина. Естественно, что первые три уравнения в (2) совпадают с аналогичными [2, 7] при подстановке в последние принятой характеристики электродвигателя.

Параметры стационарных режимов определяются из (2) с точностью до величин первого порядка малости выражениями:

$$\begin{aligned} A &= \omega db^{-1} (1 - 0.25\pi^2 k^2)^{-0.5} - \pi kd \\ \theta &= \omega - \pi kb (4 - \pi^2 k^2)^{-0.5}, \quad \xi = -\pi + \arccos 0.5\pi k \\ z &= \omega h^{-1} [\omega^2 q db^{-1} (1 - 0.25\pi^2 k^2) + p] \end{aligned} \quad (3)$$

Так же, как в [2], эти режимы в соответствии со вторым и третьим уравнениями в (2) при $\dot{A} = 0$, $\dot{\xi} = 0$ находятся на резонансной кривой вынужденных колебаний 1 (фигура).

Однако, в отличие от [2], условия существования (3) выполняются только для одного режима при заданных параметрах системы. Так, каждому значению коэффициента k соответствует единственное значение фазы ξ (амплитуды A [мм]) автоколебаний и единственная точка на резонансной кривой I . Т.е., существование трех режимов при одном наборе параметров в традиционной схеме возбуждения [2] и, объясняемый этим, эффект А. Зоммерфельда при авторезонансной схеме (1) невозможны.

Амплитуды стационарных режимов при различных значениях собственной частоты ω в соответствии с (3) лежат на прямых, проходящих вблизи начала координат A, θ , точками на фигуре показано расположение режимов на соответствующих ветвях резонансной кривой. Прямая 2 также определяет максимально достижимые амплитуды колебаний при традиционной схеме возбуждения с различными собственными частотами ω и напряжениями z (линия предельных амплитуд).

Устойчивость стационарных режимов (3) определяется по уравнениям в вариациях системы (2), коэффициенты которых являются элементами квадратной матрицы $\|b_{ji}\|$. Величина каждого коэффициента находится из частной производной правой части j уравнения в (2) по i переменной из θ, A, ξ, z в стационарных точках (3):

$$\begin{aligned} b_{11} &= -p - bq\omega^2 d^{-1} \theta^{-2} A^2, & b_{12} &= -bq\omega^2 d^{-1} \theta^{-1} A, & b_{13} &= q\omega^2 d^{-1} \theta^{-1} A^2 (\omega - \theta) \\ b_{14} &= h, & b_{21} &= 2b\theta^{-1} A, & b_{22} &= -b, & b_{23} &= (\theta - \omega)A, & b_{31} &= 1 - 2\omega\theta^{-1} \\ b_{32} &= (\omega - \theta)A^{-1}, & b_{33} &= -b, & b_{43} &= -2k_1 b\omega\pi^{-1} d^{-1} \theta^{-2} A \end{aligned} \quad (4)$$

Остальные элементы матрицы равны нулю.

Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости получаются из характеристического уравнения линеаризованной системы с элементами (4) $\lambda^4 + B_1\lambda^3 + B_2\lambda^2 + B_3\lambda + B_4 = 0$ и имеют по критерию Раussa – Гурвица вид

$$\begin{aligned} B_1 &> 0, & B_2 &> 0, & B_3 &> 0, & B_4 &> 0, & B_3(B_1 B_2 - B_3) - B_4 B_1^2 &> 0 \\ B_1 &= -(b_{11} + b_{22} + b_{33}), & B_2 &= b_{11} b_{22} + b_{11} b_{33} + b_{22} b_{33} - b_{23} b_{32} - b_{12} b_{21} - b_{13} b_{31} \\ B_3 &= B_3^* + b_{14} b_{43} b_{31}, & B_3^* &= b_{11} b_{23} b_{32} + b_{12} b_{21} b_{33} + b_{13} b_{22} b_{31} - b_{11} b_{22} b_{33} - \\ &- b_{12} b_{23} b_{31} - b_{13} b_{21} b_{32}, & B_4 &= b_{14} b_{43} (b_{21} b_{32} - b_{22} b_{31}) \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь коэффициенты B_1, B_2 и B_3^* совпадают с аналогичными [2] для традиционной схемы возбуждения.

Из (4), (5) следует, что из условий (5) первые четыре выполняются всегда при выполнении следующих условий устойчивости $B_1 > 0, B_2 > 0, B_3^* > 0$ в традиционной схеме возбуждения и $k_1 > 0$. Зона неустойчивости в случае $B_1 > 0, B_2 > 0, B_3^* < 0$ (наиболее распространенном в реализованных устройствах [2, 3]) при авторезонансной схеме возбуждения заведомо уменьшается или исчезает совсем из-за $b_{14} b_{43} b_{31} > 0$ ($\theta < \omega$).

В качестве примера выбрана система, теоретически и экспериментально исследованная в [2], с параметрами: $M + m = 5.69$ кг, $m/(M + m) = 0.05$, $B = 32.37$ кгс⁻¹, $\omega = 116$ с⁻¹, $r = 7.5$ мм, $J = 9.81 \times 10^{-4}$ кгм². В соответствии с принятыми обозначениями: $H = 1.1$ Вс, $d = 1.875 \times 10^{-4}$ м, $b = 2.8448$ с⁻¹, $p = 4.1$ с⁻¹, $q = 1.0875$ м⁻¹, $h = 13.5$ с⁻² В⁻¹; $k_1 = 0,0157$ Вс⁻¹. Крутизна характеристики электродвигателя и, соответственно, коэффициент p выбраны немного большими, чем в [2], с тем, чтобы условие $|1 - \theta\omega^{-1}| \ll 1$ выполнялось в рассматриваемом диапазоне частот.

В примере с авторезонансной схемой возбуждения при различных k устойчивые режимы располагаются на сплошной линии резонансной кривой I (фигура), неустойчивые – на штриховой. Диапазон частот $\Delta\theta$, в котором расположены неустойчивые режимы, при выбранных параметрах меньше и находится внутри аналогичного диапазона в традиционной схеме возбуждения.

В последней схеме на границах диапазона $\Delta\theta_1$ (фигура) происходят переходы с до-резонансных режимов на зарезонансные и обратно при изменениях напряжения z электродвигателя. Штрихпунктирными стрелками 3 показаны направления переходов и угол наклона статической характеристики двигателя. В предложенной системе и изменении коэффициента k переходов не происходит, а соответствующая стационарному режиму точка перемещается по резонансной кривой I . Вопрос о том, какие режимы в последнем случае могут реализовываться внутри диапазона $\Delta\theta$, должен решаться при учете высших приближений.

Адаптивные свойства предложенной схемы иллюстрируются построенными по выражениям (3) прямыми (фигура), устойчивые режимы показаны сплошными линиями. Значения фаз на них постоянны при медленном изменении собственной частоты. Случай $k = k^* < 0$ (фигура) соответствует неустойчивым при традиционной схеме режимам. В авторезонансном случае $k = 0$ по расчетам при изменении $\omega/(2\pi)$ от 1 Гц до 700 Гц устойчивость автоколебаний сохранялась.

В отличие от известных схем стабилизации резонансных режимов вибромашин с помощью систем автоматического регулирования по ошибке фазы [8] в предложенной схеме отсутствует заданное опорное напряжение $z_0 = \text{const}$, соответствующее точке a на фигуре, в малой окрестности которой возможно регулирование. Из выражений (3) при $k = 0$ следует, что режим авторезонанса ($\theta = \omega$) сохраняется и при изменениях диссипативных сил (b и p) и напряжения на усилителе в обратной связи (h), т.е. при всех A и θ ниже прямой 2 (фигура).

Поддержание авторезонанса обеспечивает более простая обратная связь

$$\dot{z} = -k_2 x \cos \varphi \quad (6)$$

вместо третьего уравнения (1) ($k_2 r \omega^{-2} H^{-1} \ll 1$). В этом случае все режимы также располагаются на линии предельных амплитуд 2 и $\xi = -\pi/2$, т.к. в (2) вместо четвертого уравнения имеем $\dot{z} = -0.5k_2 A \cos \xi$. При этом в уравнениях в вариациях $b_{43} = -k_2 A/2$.

Расчет примера с учетом (6) показал устойчивость авторезонанса при изменении собственной частоты от 1 Гц до 700 Гц ($k_2 = 1.57 \text{ с}^{-1} \text{ м}^{-1} \text{ В}$).

Для других значений фаз можно также упростить обратную связь, вместо третьего уравнения в (1) полагая $\dot{z} = k_2(k - x \cos \varphi)$. Однако, в этом случае будут отклонения фазы от заданной при изменениях собственной частоты.

Самовозбуждение системы из нулевых начальных условий на практике обеспечит возможность автоматического выхода машины на рабочий режим или восстановление последнего при отключении и последующем включении электроэнергии. Ниже будут предложены дополнения к исходной системе, так как в системе (1) для некоторых k положение равновесия не определено, а при использовании обратной связи (6) нахождение условий самовозбуждения сводится к анализу особого случая двух нулевых корней характеристического уравнения, т.е. необходимо учитывать малые величины более высокого порядка.

Нулевыми начальными условиями полагаем следующие координаты положения равновесия системы при выключенной обратной связи (электроэнергии), определяемые из первых двух уравнений (1):

$$x = 0, \quad \dot{x} = 0, \quad \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad z = 0 \quad (7)$$

Для обеспечения самовозбуждения при всех значениях $|k| < 2/\pi$, отвечающих условиям существования режимов (3), доопределим систему (1): вместо $\text{sign } x$ используем функцию $F(x) = 1$ при $x > 0$ и $F(x) = -1$ при $x \leq 0$ (модель электрического контакта). Тогда с условиями (7) система (1) неустойчива.

С использованием обратной связи (6) включение в систему некоторого постоянного напряжения z_0 , т.е. замена в (1) с учетом (6) z на $z_1 = z_0 + z$ приводит к неустойчивости при условиях (7). Это напряжение целесообразно выбрать достаточным для вывода системы на границу значений частоты, отвечающих принятым ограничениям. Величина z_0 может быть определена из четвертого уравнения (3) при $\omega = 0.9\omega^*$, где ω^* – собственная частота системы, а величина k – из второго уравнения (3), т.е.

из соотношения $kb\pi/\sqrt{4-k^2\pi^2} = 0.1\omega^*$.

Заметим, что величина z_0 значительно меньше величины опорного напряжения при использовании систем автоматического регулирования [8]. Использование $z_1 = z_0 + z$ в системе с обратной связью (1), как и с (6), приводит к ускорению переходного процесса. Все предложенные здесь изменения системы оставляют в силе проведенный ранее анализ, т.е. выражения (2), (3) и условия устойчивости не изменяются и преимущества авторезонансной схемы сохраняются.

В целом, выявленные свойства рассмотренных схем возбуждения колебаний позволяют расширить области применения систем с ограниченным возбуждением не только в традиционных дорезонансном и резонансном частотных диапазонах, но и в резонансной зоне, ранее недоступной из-за эффекта А. Зоммерфельда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 894 с.
2. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. 256 с.
3. Алифов А.А., Фролов К.В. Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии. М.: Наука, 1985. 327 с.
4. Журавлев В.Ф., Меньяйлов А.И. Исследование виброударной системы с ограниченным возбуждением // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 2. С. 45–50.
5. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
6. Герц М.Е. Авторезонансные колебания в системе с инерционным самовозбуждением // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 6. С. 3–9.
7. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971. 440 с.
8. Бабицкий В.И., Боровков Б.А. Стабилизация авторезонансного режима виброударных машин // Машиноведение. 1979. № 1. С. 15–20.

Москва

Поступила в редакцию
15.10.2000