МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2003

УДК 534.1

© 2003 г. А.В. ВЛАХОВА, И.В. НОВОЖИЛОВ

РАЗДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ РАЗНОЧАСТОТНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, НЕ СОДЕРЖАЩЕЙ ЯВНО "МАЛЫХ" ИЛИ "БОЛЬШИХ" ПАРАМЕТРОВ

Рассматривается линейная, близкая к консервативной система, собственные частоты которой сильно разнесены по своим величинам. В отличие от [1, 2], исходные уравнения движения не содержат в явном виде малых параметров или больших коэффициентов жесткости. Строятся два варианта приближенной математической модели, описывающей движение по низкочастотным составляющим под действием "медленных" возмущений. Приведение задачи к сингулярно возмущенному Тихоновскому виду производится путем промежуточного перехода к нормальным координатам консервативной части системы.

Рассмотрим уравнения движения механической системы, записанные в числовых мерах той или иной традиционной системы размерностей

$$\begin{gathered} AX^{\cdot\cdot} + RX^{\cdot} + CX = F \\ X(0) = X_0 = (X_{01}, \ldots, X_{0n})^T, \quad X^{\cdot}(0) = W_0 = (W_{01}, \ldots, W_{0n})^T \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь T – время; $(\ldots)^{\cdot} = d/dT$; $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ – n-мерный вектор конфигурационных переменных ($(\ldots)^T$ означает знак транспонирования); $A = \|a_{ij}\|$, $R = \|r_{ij}\|$, $C = \|c_{ij}\|$ – матрицы инерционных, диссипативных и консервативных коэффициентов системы; $F = (F_1(T/T_{B1}), \ldots, F_n(T/T_{Bn}))^T$ – вектор внешнего возмущения, T_{Bi} – характерное время, за которое функция $F_i(T/T_{Bi})$ изменяется на величину порядка своего максимального по модулю значения. Предполагается, что все $F_i(T/T_{Bi})$ $(i = 1, \ldots, n)$ являются непрерывными и ограниченными функциями на интервале $0 \le T < \infty$.

Будем рассматривать такие системы, для которых матрицу R можно записать в виде

$$R = \alpha A + \beta B + \gamma C \tag{2}$$

где α, β, γ – скаляры; $B = \|b_{ij}\|$ – симметрическая матрица, у которой все $\|b_{ij}\| \le 1$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Такое представление отвечает традиционному для теории колебаний разбиению сил трения на "внешние" (при $\beta, \gamma = 0$) и "внутренние" (при $\alpha, \beta = 0$) [3]. Будем, далее, предполагать, что силы "внутреннего" трения присутствуют всегда ($\gamma > 0$), α и β считаются произвольными, не нарушающими неотрицательной определенности матрицы R.

Рассмотрим, наряду с (1), консервативную систему

$$AX^{\cdot\cdot} + CX = 0 \tag{3}$$

получающуюся из (1) при $R = \|0\|$, $F = \|0\|$. Предположим, что собственные частоты системы (3) удовлетворяют неравенству

$$\omega_1 \sim \omega_2 \sim \ldots \sim \omega_k \ll \omega_{k+1} \sim \ldots \sim \omega_n \tag{4}$$

Будем считать, что силы трения $RX^{\bullet}$ не изменяют колебательного характера собственных движений системы (1) и разнесения спектра (4). Ограничимся случаем "медленных" возмущений

$$1/T_{Bi} \sim \omega_1, \ldots, \omega_k \ (i = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

Предположим, что величины параметров α, β, γ из (2) исключают появление резонансов в системе (1), т. е. являются "конечными", имеющими нулевой порядок по малому параметру, вводимому далее.

Попытаемся построить приближенную модель системы (1), описывающую "медленные" составляющие движения в диапазоне "медленных" собственных частот $\omega_1, \ldots, \omega_k$.

При этом будем считать, что система (1) не содержит в явном виде малых параметров, свидетельствующих об исходном разнесении частот (4) системы (3), или "больших" коэффициентов жесткости, как в [1, 2].

Проделаем в (1) замену

$$X = V\Xi \tag{6}$$

где $\Xi = (\Xi_1, \ldots, \Xi_n)^T$ – вектор нормальных координат, $V = \| v_i^j \|$ – матрица векторов v^j собственных форм системы (3).

Потребуем, чтобы V удовлетворяла соотношениям [3]

$$V^TAV = E, \quad V^TCV = \Omega, \quad \Omega = \mathrm{diag}(\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2) \tag{7}$$

Подставим (6) в (1). Умножим результат слева на V^T и учтем (2), (7). Поделив каждое уравнение полученной системы на ω_i^2 и, перейдя к форме Коши, получим

$$\Xi_i^{\bullet} = U_i$$

$$\frac{1}{\omega_i^2} U_i^{\bullet} = -\Xi_i - \left(\frac{\alpha}{\omega_i^2} + \gamma\right) U_i - \frac{\beta}{\omega_i^2} \sum_{j=1}^{n} (v^i)^T B v^j U_j + \frac{1}{\omega_i^2} (v^i)^T F (i, j = 1, \ldots, n) \tag{8}$$

$$\Xi(0) = V^{-1} X_0 = (\Xi_{01}, \ldots, \Xi_{0n})^T, \quad U(0) = V^{-1} W_0 = (U_{01}, \ldots, U_{0n})^T$$

Нормализуем [4] соотношения (8), (6) заменой

$$= T/T_*, \quad \xi_i = \Xi_i/\Xi_{i*}, \quad u_i = U_i/U_{i*}, \quad \overline{((v^i)^T B v^j)} = (v^i)^T B v^j / [(v^i)^T B v^j]_*$$
$$f_i = (v^i)^T F / [(v^i)^T F]_*, \quad x_i = X_i/X_{i*}, \quad \bar{v}_j^i = v_j^i / [v_j^i]_* \tag{9}$$

где характерные величины Ξ_{i*}, U_{i*}, $[(v^i)^T B v^j]_*$, $[(v^i)^T F]_*$, X_{i*}, $[v_j^i]_*$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ выбираются так, чтобы $|\xi_i|$, $|u_i|$, $|\overline{(v^i)^T B v^j}|$, $|f_i|$, $|x_i|$, $|\bar{v}_j^i|$ не превосходили значений порядка единицы.

Положим $F_* = \max\limits_{j, T} |F_j(T/T_{Bj})|$, $[v_j^i]_* = \kappa_i = \left(\sum_{j=1}^n (v_j^i)^2\right)^{1/2}$. Для величины $[(v^i)^T F]_*$ примем завышенную оценку $[(v^i)^T F]_* = \kappa_i F_*$. Оценку характерной скорости изменения переменной Ξ_i проведем, пренебрегая трением и считая возмущение постоянным. Для такого колебательного движения примем по [4] $U_{i*} = \Xi_{i*}\omega_i$. Будем, далее, рассматривать системы, для которых Ξ_{0i}, U_{0i}/ω_i и характерное по Ξ_i статическое отклонение $[(v^i)^T F]_*/\omega_i^2$ системы (8) являются величинами одного порядка. Положим $\Xi_{i*} = \kappa_i F_*/\omega_i^2$.

Для элементов матрицы $V^T BV$ из (8) в силу (2) имеем

$$\left|(v^i)^T Bv^j\right| = \left|\sum_{r=1}^{n} v_r^i \sum_{m=1}^{n} b_{rm} v_m^j\right| \le \max_{r,m}|b_{rm}| \left|\sum_{r=1}^{n} v_r^i\right| \left|\sum_{m=1}^{n} v_m^j\right| < n\kappa_i\kappa_j$$

Таким образом, можно положить $[(v^i)^T Bv^j]_* = n\kappa_i\kappa_j$.

При нормализации соотношений (6) будем принимать $X_{i*} = X_*$, поскольку исходные соотношения (1) не содержат ни "больших", ни "малых" параметров. Считая κ_i, κ_j $(i, j = 1, \ldots, n)$ величинами одного порядка, примем X_* равным максимальному из характерных значений нормальных координат: $X_* = \Xi_{1*}$.

В соответствии с [4], при построении приближенной модели "медленных" составляющих движения, развивающихся на временах $T \sim 1/\omega_1$, выберем $T_* = 1/\omega_1$.

Указанная нормализация системы (8) приводит ее к виду

$$\begin{aligned}
&\rho_r\xi_r' = u_r\\
&\rho_r u_r' = -\xi_r - (\tilde{\alpha}\rho_r + \mu\tilde{\gamma}/\rho_r)u_r - \sum_{s=1}^{k} \rho_s \tilde{b}_{rs} u_s - \mu \sum_{p=k+1}^{n} q_{p-k}\tilde{b}_{rp}u_p + f_r(\nu_r t)\\
&\mu q_l \xi_{k+l}' = u_{k+l}\\
&\mu q_l u_{k+l}' = -\xi_{k+l} - (\mu\tilde{\alpha}q_l + \tilde{\gamma}/q_l)u_{k+l} - \sum_{s=1}^{k} \rho_s \tilde{b}_{k+ls} u_s - \mu \sum_{p=k+1}^{n} q_{p-k}\tilde{b}_{k+lp}u_p + f_{k+l}(\nu_{k+l}t) \qquad (10)\\
&(r = 1, \ldots, k;\ l = 1, \ldots, n-k)\\
&\xi_i(0) = \xi_{0i}, \quad u_i(0) = u_{0i}, \quad (i = 1, \ldots, n)
\end{aligned}$$

Соотношения (6) после нормализации переходят в

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \kappa_1\bar{v}_1^1 & \kappa_2\bar{v}_1^2 & \ldots & \kappa_n\bar{v}_1^n \\ \kappa_1\bar{v}_2^1 & \kappa_2\bar{v}_2^2 & \ldots & \kappa_n\bar{v}_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \kappa_1\bar{v}_n^1 & \kappa_2\bar{v}_n^2 & \ldots & \kappa_n\bar{v}_n^n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} (\rho_1)^2\kappa_1\xi_1/\kappa_1 \\ \vdots \\ (\rho_k)^2\kappa_k\xi_k/\kappa_1 \\ \mu^2(q_1)^2\kappa_{k+1}\xi_{k+1}/\kappa_1 \\ \vdots \\ \mu^2(q_{n-k})^2\kappa_n\xi_n/\kappa_1 \end{Vmatrix}$$

$$(\cdots)' = d/dt, \quad \rho_r = \omega_1/\omega_r, \quad q_l = \omega_n/\omega_{k+l}, \quad \mu = \omega_1/\omega_n, \quad \tilde{\alpha} = \alpha/\omega_1 \qquad (11)$$

$$\tilde{\gamma} = \gamma\omega_n, \quad \tilde{b}_{ij} = \beta n\kappa_j^2\overline{(v^i)^T Bv^j}/\omega_1, \quad \nu_i = 1/\omega_1 T_{Bi}$$

В соответствии с выбором класса движения, для которого проводилась нормализация, и условиями (4) имеем $\nu_i \sim 1$, $\rho_r \sim 1$, $q_l \sim 1$, $\kappa_i/\kappa_j \sim 1$, $\mu \ll 1$.

Будем далее принимать μ за малый параметр задачи. Значения $|\tilde{\alpha}|$, $\tilde{\gamma}$, $|\tilde{b}_{ij}|$ будем считать величинами порядка единицы. Можно показать, что принятые порядки величин параметров системы (10) не нарушают колебательности ее собственных движений.

Размерными аналогами условий $|\tilde{\alpha}| = O(1)$, $\tilde{\gamma} = O(1)$, $|\tilde{b}_{ij}| = O(1)$ являются, соответственно, условия

$$|\alpha| \sim \omega_1, \quad \gamma \sim 1/\omega_n, \quad \left|\beta(v^i)^T Bv^j\right|\kappa_j/\kappa_i \sim \omega_1 \qquad (12)$$

Система (10) является сингулярно возмущенной по малому параметру μ. Проведем вырождение [5, 6] системы (10) по μ, полагая $\mu = 0$. Получим

$$
\begin{aligned}
&\rho_r \xi'_r = u_r \\
&\rho_r u'_r = -\xi_r - \tilde{\alpha}\rho_r u_r - \sum_{s=1}^{k} \rho_s \tilde{b}_{rs} u_s + f_r(\nu_r t) \\
&0 = u_{k+l} \\
&0 = -\xi_{k+l} - \sum_{s=1}^{k} \rho_s \tilde{b}_{k+ls} u_s + f_{k+l}(\nu_{k+l} t) \\
&\xi_r(0) = \xi_{0r}, \quad u_r(0) = u_{0r} \quad (r = 1, \ldots, k;\ l = 1, \ldots, n-k)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Системой (13) описываются "медленные" составляющие движения, развивающиеся на временах $t \sim 1$, т. е. $T \sim 1/\omega_1$. Интегрирование первых $2k$ уравнений системы (13) дает решение по "медленным" переменным $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Постановка этого решения в последние $2(n-k)$ уравнений (13) определит выражения для $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$, которые можно трактовать как реакции связей, налагаемых на (10) при предельном переходе $\mu \to 0$.

Основным условием, обеспечивающим законность вырождения (10) к (13) является [5, 6] асимптотическая устойчивость положений равновесия "присоединенной" по А.Н. Тихонову системы, описывающей движение по "быстрым" для (10) переменным $\xi_{k+1}, u_{k+1}, \ldots, \xi_n, u_n$ в "быстром" времени $\tau = t/\mu$.

"Присоединенной" для (10) системой будет [5, 6]

$$
\begin{aligned}
&q_l \frac{d\xi_{k+l}}{d\tau} = u_{k+l} \\
&q_l \frac{du_{k+l}}{d\tau} = -\xi_{k+l} - \frac{\tilde{\gamma}}{q_l} u_{k+l} + \ldots \quad (l = 1, \ldots, n-k)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Здесь многоточиями обозначены не выписываемые для краткости слагаемые, зависящие от "медленных" переменных $\xi_1, u_1, \ldots, \xi_k, u_k, t$ системы (10), которые считаются по [5, 6] постоянными. Так как $q_1, \ldots, q_{n-k} > 0$, $\tilde{\gamma} > 0$, то положения равновесия системы (14) асимптотически устойчивы.

В соответствии с [6], погрешность приближения вырожденной системой (14) решений исходной системы (10) является величиной порядка μ. Оценка справедлива асимптотически, т. е. при $\mu \to 0$. Для "медленных" переменных $\xi_1, \ldots, \xi_k, u_1, \ldots, u_k$ оценка верна на конечном интервале времени $0 \le t \le t_1 \sim 1$. Для "быстрых" переменных $\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n, u_{k+1}, \ldots, u_n$ на интервале $0 < t \le t_1 \sim 1$, вне пограничного слоя Δt, оцениваемого величиной $\Delta t \sim -\mu \ln \mu$.

Для использования приближенной модели (13) на бесконечном интервале времени требуется [7] выполнение дополнительного условия равномерной по t асимптотической устойчивости частных решений системы уравнений (13).

Перейдем теперь к составлению приближенной модели, описывающей "медленные" составляющие движения в исходных переменных $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$.

Для этого, сначала, выпишем аналог системы (13) в ненормализованных переменных $\bar{\Xi} = (\Xi_1, \ldots, \Xi_k)^T$, $\tilde{\Xi} = (\Xi_{k+1}, \ldots, \Xi_n)^T$. С помощью (9) получим:

$$
\bar{\Xi}^{\bullet\bullet} + D\bar{\Xi}^{\bullet} + \overline{\Omega\Xi} = \bar{V}^T F \tag{15}
$$

$$\begin{aligned}
&\Xi(0) = (\Xi_{01}, \ldots, \Xi_{0k})^T, \quad \Xi^{\bullet}(0) = (U_{01}, \ldots, U_{0k})^T \\
&\tilde{\Omega}\tilde{\Xi} = -\beta\tilde{V}^T B\bar{V}\Xi^{\bullet} + \tilde{V}^T F \\
&\bar{\Omega} = \operatorname{diag}(\omega_1^2, \ldots, \omega_k^2), \quad \tilde{\Omega} = \operatorname{diag}(\omega_{k+1}^2, \ldots, \omega_n^2), \quad D = \alpha E + \beta\bar{V}^T B\bar{V}
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\bar{V} = \begin{Vmatrix} \upsilon_1^1 & \upsilon_1^2 & \ldots & \upsilon_1^k \\ \upsilon_2^1 & \upsilon_2^2 & \ldots & \upsilon_2^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \upsilon_n^1 & \upsilon_n^2 & \ldots & \upsilon_n^k \end{Vmatrix}, \quad \tilde{V} = \begin{Vmatrix} \upsilon_1^{k+1} & \upsilon_1^{k+2} & \ldots & \upsilon_1^n \\ \upsilon_2^{k+1} & \upsilon_2^{k+2} & \ldots & \upsilon_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \upsilon_n^{k+1} & \upsilon_n^{k+2} & \ldots & \upsilon_n^n \end{Vmatrix}$$

где $\bar{V}$ – матрица размерности $n \times k$, составленная из первых k векторов собственных форм системы (3), соответствующих $\omega_1^2, \ldots, \omega_k^2$; $\tilde{V}$ – матрица размерности $n \times (n-k)$, составленная из последних $(n-k)$ векторов собственных форм системы (3), соответствующих $\omega_{k+1}^2, \ldots, \omega_n^2$.

Запишем далее в исходных, размерных переменных соотношения, которые получаются из (11) при вырождении по μ. Пренебрегая в (11) членами второго порядка малости по μ, получим

$$\begin{Vmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \\ X_{k+1} \\ \vdots \\ X_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \upsilon_1^1 & \upsilon_1^2 & \ldots & \upsilon_1^k & \ldots & \upsilon_1^n \\ \upsilon_2^1 & \upsilon_2^2 & \ldots & \upsilon_2^k & \ldots & \upsilon_2^n \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \upsilon_k^1 & \upsilon_k^2 & \ldots & \upsilon_k^k & \ldots & \upsilon_k^n \\ \upsilon_{k+1}^1 & \upsilon_{k+1}^2 & \ldots & \upsilon_{k+1}^k & \ldots & \upsilon_{k+1}^n \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \upsilon_n^1 & \upsilon_n^2 & \ldots & \upsilon_n^k & \ldots & \upsilon_n^n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \Xi_1 \\ \vdots \\ \Xi_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix} \tag{17}$$

Соотношения (17) являются переопределенными. Это значит, что компоненты вектора X зависимы. Обозначим через $\bar{X}$ и $\tilde{X}$ вектор-столбцы, составленные, соответственно, из k первых и $(n-k)$ последних компонент вектора X: $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_k)^T$, $\tilde{X} = (X_{k+1}, \ldots, X_n)^T$ и запишем (17) в виде

$$\bar{X} = V_0\Xi \tag{18}$$

$$\tilde{X} = V_1\Xi \tag{19}$$

$$V_0 = \begin{Vmatrix} \upsilon_1^1 & \upsilon_1^2 & \ldots & \upsilon_1^k \\ \upsilon_2^1 & \upsilon_2^2 & \ldots & \upsilon_2^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \upsilon_k^1 & \upsilon_k^2 & \ldots & \upsilon_k^k \end{Vmatrix}, \quad V_1 = \begin{Vmatrix} \upsilon_{k+1}^1 & \upsilon_{k+1}^2 & \ldots & \upsilon_{k+1}^k \\ \upsilon_{k+2}^1 & \upsilon_{k+2}^2 & \ldots & \upsilon_{k+2}^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \upsilon_n^1 & \upsilon_n^2 & \ldots & \upsilon_n^k \end{Vmatrix}$$

где V_0 – матрица размерности $k \times k$, являющаяся главным диагональным минором k-го порядка матрицы V; V_1 – матрица размерности $(n-k) \times k$, стоящая на пересечении последних $(n-k)$ строк и первых k столбцов матрицы V.

Выразив $\bar{\Xi}$ из (18) и подставив результат в (15) и (19), получим:

$$\begin{aligned} &V_0^{-1}\bar{X}^{\cdot\cdot} + DV_0^{-1}\bar{X}^{\cdot} + \bar{\Omega}V_0^{-1}\bar{X} = V_0^T\bar{F} + V_1^T\tilde{F} \\ &\bar{X}(0) = \bar{X}_0 = (X_{01}, \ldots, X_{0k})^T, \quad \bar{X}^{\cdot}(0) = \bar{W}_0 = (W_{01}, \ldots, W_{0k})^T \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{X} = Q\bar{X} \\ &\bar{F} = (F_1(T/T_{B1}), \ldots, F_k(T/T_{Bk}))^T, \quad \tilde{F} = (F_{k+1}(T/T_{Bk+1}), \ldots, F_n(T/T_{Bn}))^T \\ &Q = V_1V_0^{-1} = \|Q_{ls}\| \ (l = 1, \ldots, n-k, \ s = 1, \ldots, k) \end{aligned} \tag{21}$$

где $\bar{X}$, V_0, $\tilde{X}$, V_1 определены в (18), (19); D, $\bar{\Omega}$ – в (15); $\bar{F}$ и $\tilde{F}$ – вектор – столбцы, состоящие, соответственно, из k первых и $(n-k)$ последних координат вектора F, Q – матрица размерности $(n-k) \times k$.

Соотношения (20), (21) образуют приближенную модель, описывающую "медленные" составляющие движения в исходных переменных X. Будем далее называть набор уравнений (20), (21) приближенной моделью I. Интегрирование системы (20) дает решение по переменным $X_1, \ldots, X_k$. Подстановка этого решения в (21) определяет $X_{k+1}, \ldots, X_n$.

Приближенная модель I обладает теми же, что и система (15), (16) асимптотическими свойствами, т. е. имеет погрешность $O(\mu)$ на оговоренных интервалах времени. Соотношения (16) можно рассматривать как записанные в нормальных координатах выражения для реакций голономных связей (21), возникающих при предельном переходе к приближенной модели I "медленных" движений.

Теоретико-механическая интерпретация полученных результатов приводит к еще одному варианту построения приближенной модели "медленных" движений системы (1).

Действительно, будем считать, что $(n-k)$ голономных связей (21), сопутствующих вырожденной системе (20), налагаются непосредственно на исходную систему (1). Это, как и ранее, отвечает игнорированию движений по "быстрым" нормальным координатам $\Xi_{k+1}, \ldots, \Xi_n$ из (8) и оставляет "медленные" движения по $\Xi_1, \ldots, \Xi_k$.

Рассмотрим систему уравнений (1), (21). Перепишем уравнения связей (21) в скалярной форме

$$\begin{aligned} &\Phi_1 = Q_{11}X_1 + Q_{12}X_2 + \ldots + Q_{1k}X_k - X_{k+1} = 0 \\ &\Phi_2 = Q_{21}X_1 + Q_{22}X_2 + \ldots + Q_{2k}X_k - X_{k+2} = 0 \\ &\vdots \\ &\Phi_{n-k} = Q_{n-k1}X_1 + Q_{n-k2}X_2 + \ldots + Q_{n-kk}X_k - X_n = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

Применим метод неопределенных множителей Лагранжа (см., например, [8]). Уравнения системы (1), на которую наложены $(n-k)$ линейно независимых связей (22) $\Phi_1 = \Phi_2 = \ldots = \Phi_{n-k} = 0$, имеют вид

$$\begin{aligned} &AX^{\cdot\cdot} + RX^{\cdot} + CX = G\lambda + F \\ &G = \|g_{il}\| = \|\partial\Phi_l/\partial X_i\| \ (i = 1, \ldots, n, \ l = 1, \ldots, n-k), \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k}) \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь G – матрица $n \times (n - k)$, λ – вектор неопределенных множителей Лагранжа. Присоединяя к (23) систему (22), получим $(2n - k)$ уравнений для определения n координат $X_1, \ldots, X_n$ и $(n - k)$ множителей Лагранжа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k}$.

Распишем (23) покоординатно

$$\sum_{j=1}^{n} a_{sj}\ddot{X}_j + \sum_{j=1}^{n} r_{sj}\dot{X}_j + \sum_{j=1}^{n} c_{sj}X_j = \sum_{l=1}^{n-k} \lambda_l Q_{ls} + F_s(T/T_{Bs})$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{pj}\ddot{X}_j + \sum_{j=1}^{n} r_{pj}\dot{X}_j + \sum_{j=1}^{n} c_{pj}X_j = -\lambda_l + F_p(T/T_{Bp}) \qquad (24)$$

$$(s = 1, \ldots, k; \quad l = 1, \ldots, n-k; \quad p = k+1, \ldots, n)$$

Структура уравнений (24) такова, что переменные $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k}$ без труда исключаются. Подставим выражения для $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k}$ из $n - k$ последних в k первых уравнений системы (24). Исключая из полученных соотношений $X_{k+1}, \ldots, X_n$ с помощью (21), получим

$$\begin{aligned} &\{A_0 + A_2Q + Q^T[A_1 + A_3Q]\}\ddot{\overline{X}} + \{R_0 + R_2Q + Q^T[R_1 + R_3Q]\}\dot{\overline{X}} + \\ &+ \{C_0 + C_2Q + Q^T[C_1 + C_3Q]\}\overline{X} = \overline{F} + Q^T\tilde{F} \end{aligned} \qquad (25)$$

где $\overline{F}$ и $\tilde{F}$ определены в (20), матрицы A_m, R_m, C_m $(m = 0, \ldots, 3)$ получены разбиением каждой из матриц A, R, C на следующие блоки:

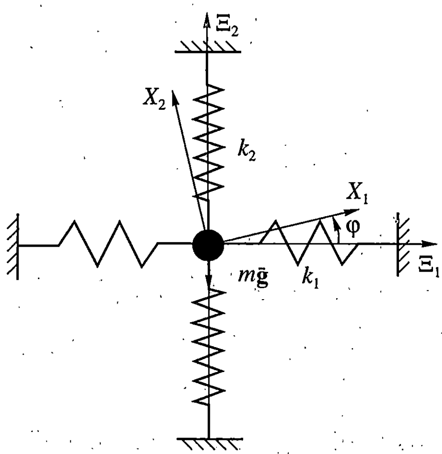
$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} & \\ \left\| \begin{array}{c|c} A_0 & A_2 \\ \hline A_1 & A_3 \end{array} \right\| & \begin{array}{l} k \\ n-k \end{array} \end{array}, \quad R = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} & \\ \left\| \begin{array}{c|c} R_0 & R_2 \\ \hline R_1 & R_3 \end{array} \right\| & \begin{array}{l} k \\ n-k \end{array} \end{array}, \quad C = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} & \\ \left\| \begin{array}{c|c} C_0 & C_2 \\ \hline C_1 & C_3 \end{array} \right\| & \begin{array}{l} k \\ n-k \end{array} \end{array}$$

Добавив к (25) вектор начальных условий $\overline{X}(0) = \overline{X}_0 = (X_{01}, \ldots, X_{0k})^T$, $\dot{\overline{X}}(0) = \overline{W}_0 = (W_{01}, \ldots, W_{0k})^T$, получим замкнутую систему уравнений, интегрирование которой дает решение по $\overline{X}$. Подстановка $\overline{X}$ в (21) определит $\tilde{X}$. Назовем систему уравнений (21), (25) приближенной моделью II.

Уравнения (21) модели II получаются предельным переходом от (11) к (21), имеющим погрешность порядка μ^2. Таким образом, процедура построения модели II оставляет слагаемые порядка μ, неявно входящие в (1). Следовательно, при предельном переходе $\mu = 0$ модель II совпадает с моделью I и гарантирует, по меньшей мере, такую же погрешность порядка μ на тех же временных интервалах. Можно ожидать, что модель II имеет потенциально более высокую точность по сравнению с моделью I нулевого по μ приближения.

В качестве иллюстрации рассмотрим механическую систему, образованную весомой точечной массой m, находящейся под действием упругих сил двух линейных невесомых пружин, ортогональных друг другу в невозмущенном положении. Отклонение точки от этого положения определим в осях, связанных с вертикалью, координатами Ξ_1, Ξ_2 (фигура).

Обозначим жесткости пружин через k_1, k_2. Предположим, что параллельно каждой из пружин расположены демпферы вязкого трения с коэффициентами вязкости β_1, β_2 соответственно. Будем считать, что β_1, β_2 выбраны так, что $\beta_1/\beta_2 = k_1/k_2$.



Уравнения малых колебаний системы имеют вид

$$\begin{Vmatrix}\Xi_1\\ \Xi_2\end{Vmatrix}^{\cdot\cdot}+\gamma\begin{Vmatrix}\omega_1^2 & 0\\ 0 & \omega_2^2\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\Xi_1\\ \Xi_2\end{Vmatrix}^{\cdot}+\begin{Vmatrix}\omega_1^2 & 0\\ 0 & \omega_2^2\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\Xi_1\\ \Xi_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0\\ -g\end{Vmatrix} \tag{26}$$

$$\omega_1^2 = k_1/m, \quad \omega_2^2 = k_2/m, \quad \gamma = \beta_1/k_1$$

Здесь g – ускорение силы тяжести.

Аналогом системы (3) для (26) будет

$$\begin{Vmatrix}\Xi_1\\ \Xi_2\end{Vmatrix}^{\cdot\cdot}+\begin{Vmatrix}\omega_1^2 & 0\\ 0 & \omega_2^2\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\Xi_1\\ \Xi_2\end{Vmatrix}=0 \tag{27}$$

Предположим, что $k_1 \ll k_2$. Тогда

$$\omega_1 \ll \omega_2 \tag{28}$$

В данном случае на сильное разнесение скоростей составляющих движения системы (27) указывает большое разнесение коэффициентов при Ξ_1, Ξ_2.

Условием колебательности решения (26) является неравенство

$$\gamma < 2/\omega_2 \tag{29}$$

Таким образом, выполнены условия (12).

"Быстрые" и "медленные" движения системы (26) разделяются очевидным образом, в силу диагональности матриц ее коэффициентов.

Предположим теперь, что движение той же самой системы рассматривается в "неудачно выбранной" системе координат X_1, X_2, которая получается из исходной поворотом на угол φ против часовой стрелки (фигура). Тогда

$$\begin{Vmatrix}\Xi_1\\ \Xi_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}X_1\\ X_2\end{Vmatrix}$$

В новых переменных X_1, X_2 система (26) примет вид:

$$X^{\cdot\cdot} + \gamma C X^{\cdot} + CX = F$$

$$X = (X_1, X_2)^T, \quad F = (-g\sin\varphi, -g\cos\varphi)^T \tag{30}$$

$$C = \begin{Vmatrix} \omega_1^2\cos^2\varphi + \omega_2^2\sin^2\varphi & (\omega_2^2 - \omega_1^2)\sin\varphi\cos\varphi \\ (\omega_2^2 - \omega_1^2)\sin\varphi\cos\varphi & \omega_1^2\sin^2\varphi + \omega_2^2\cos^2\varphi \end{Vmatrix}$$

Коэффициенты системы (30) являются величинами одного порядка, и ее движения не разделяются столь просто. Следовательно, система (30) принадлежит к рассматриваемому выше классу.

Построим для (30) приближенные модели "медленных" составляющих движения в форме I и II.

Матрица векторов собственных форм для (27) имеет вид:

$$V = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}$$

В соответствии с (15), (18), (19), (20), имеем $\bar{X} = X_1$, $\tilde{X} = X_2$, $V_0 = \cos\varphi$, $V = -\sin\varphi$, $Q = \mathrm{tg}\,\varphi$, $D = 0$

$$\bar{\Omega} = \omega_1^2, \quad \bar{F} = -g\sin\varphi, \quad \tilde{F} = -g\cos\varphi \tag{31}$$

В силу (20), (21), приближенной моделью I для системы (30) будет

$$\begin{aligned} X_1^{\cdot\cdot} + \omega_1^2 X_1 &= 0 \\ X_1\sin\varphi + X_2\cos\varphi &= 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Первое уравнение системы (32) описывает незатухающие колебания, происходящие на низшей собственной частоте системы (30). Второе уравнение представляет собой уравнение голономной связи $\Xi_2 = 0$, отвечающей движению точки по горизонтали. Уравнением реакции этой связи, по (16), будет $\omega_2^2\,\Xi_2 = -g$. Так как в (32) $D = 0$, то предельный переход от (30) к (32) корректен, в силу [7], лишь на конечном интервале времени $T \sim 1/\omega_1$.

Составим приближенную модель системы (30) в форме II. В соответствии с (25), имеем

$$A_0 = 1, \quad A_1 = A_2 = 0, \quad A_3 = 1, \quad C_0 = \omega_1^2\cos^2\varphi + \omega_2^2\sin^2\varphi$$

$$C_1 = C_2 = (\omega_2^2 - \omega_1^2)\sin\varphi\cos\varphi, \quad C_3 = \omega_1^2\sin^2\varphi + \omega_2^2\cos^2\varphi$$

$$R_0 = \gamma C_0, \quad R_1 = R_2 = \gamma C_1, \quad R_3 = \gamma C_3$$

В силу (21), (25), (31), приближенной моделью II системы (30) будет

$$\begin{aligned} X_1^{\cdot\cdot} + \gamma\omega_1^2 X_1^{\cdot} + \omega_1^2 X_1 &= 0 \\ X_1\sin\varphi + X_2\cos\varphi &= 0 \end{aligned} \tag{33}$$

Модель (33), в отличие от модели (32), описывает затухание низкочастотных горизонтальных колебаний. Это происходит за счет того, что модель II, как и предполагалось, удерживает избыточные по отношению к модели I составляющие порядка μ.

Сходные с изложенными результаты были получены при построении приближенных моделей типа I и II для системы связанных маятников, а также для более содержательной системы дифференциальных уравнений двенадцатого порядка, описывающей вертикальные колебания железнодорожного вагона на неровностях пути.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 98–01–00961).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черноусько Ф.Л.* Динамика систем с упругими элементами большой жесткости // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С.101–113.
2. *Новожилов И.В.* Предельная модель системы с упругими элементами большой жесткости // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 24–27.
3. *Булгаков Б.В.* Колебания. М.: Гостехиздат, 1954. 892 с.
4. *Новожилов И.В.* Фракционный анализ. – М.: Изд-во МГУ, 1995. 188 с.
5. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. 1952. Т. 31(73), № 3. С. 575–586.
6. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
7. *Климушев А.И., Красовский Н.Н.* Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 4. С. 680–690.
8. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. Ч. II. М.: Наука, 1972. 332 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.11.2000