

КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ДВУЗВЕННИКА ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

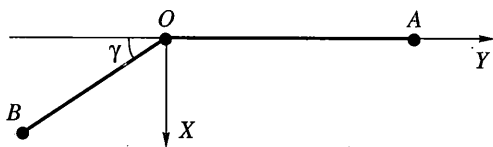
Рассматриваются квазистатические движения двузвенника, состоящего из двух звеньев разной длины, соединенных шарниром. Масса двузвенника сосредоточена на свободных концах звеньев и в шарнире, причем все три массы предполагаются равными. Двузвенник лежит на шероховатой горизонтальной плоскости и управляется моментом сил, приложенным в шарнире. В каждом состоянии двузвенника момент выбирается таким образом, чтобы выполнялись уравнения равновесия для каждого звена.

Описано медленное движение двузвенника, соответствующее такому управлению. Показано, что при квазистатическом переводе двузвенника из распрямленного состояния в сложенное движение состоит из трех фаз, соответствующих одной, двум и трем подвижным вершинам двузвенника, если отношение длин звеньев больше одной второй, а если это отношение меньше одной второй, то фаза с тремя подвижными вершинами отсутствует.

1. Введение. Задача управления телами, передвигающимися по шероховатой плоскости за счет внутренних моментов, обязана своим происхождением движению змей. В [1], среди прочих, было рассмотрено такое движение змеи по шероховатой горизонтальной плоскости, при котором она ползет, не поднимая своего тела и не перераспределяя веса на его отдельные участки, за счет внутренних изгибающих моментов, направленных вертикально. Однако в этой работе предполагалось, что плоскость не является идеально ровной и змея ползет, упираясь своей боковой поверхностью в выступы плоскости. Задача ползания по поверхности без выступов является существенно более сложной. Возможность такого передвижения была доказана в [2]–[4], где в качестве модели змеи использовался многозвенник, состоящий из жестких стержней, соединенных шарнирами, в которых приложены управляющие моменты. В [2], [3] задача управления решалась для двузвенника и трехзвенника, причем было показано, что такие многозвенники можно перемещать в любое положение на плоскости, чередуя два вида движений: медленное, или квазистатическое, и быстрое. При медленном движении пренебрежимо малы скорости и ускорения двузвенника, а при быстром движении моменты сил трения пренебрежимо малы по сравнению с управляющими моментами. В [4] показано, что многозвенник, состоящий из достаточного числа одинаковых звеньев, используя только медленные движения, может передвигаться вдоль самого себя, при этом по многозвеннику бежит волна, состоящая из трех или четырех подвижных звеньев.

Задача описания всех квазистатических движений многозвенника представляет несомненный интерес. Неясно, можно ли привести любой многозвенник в любую точку пространства состояний, и как влияют на управляемость параметры задачи – количество звеньев, их длины и массы. В качестве простейшей задачи здесь решается задача описания всех квазистатических движений двузвенника.

2. Постановка задачи. Рассмотрим двузвенник AOB (фиг. 1), состоящий из двух невесомых звеньев, соединенных шарниром с двигателем, и трех точечных масс, расположенных на свободных концах звеньев и в шарнире. Двузвенник лежит на горизонтальной шероховатой плоскости, длины его звеньев AO и OB равны, соответственно, L и l , $L > l$, а точечные массы равны между собой и равны m . Ограничения на управляющий момент, развиваемый двигателем, отсутствуют.



Фиг. 1

Задача состоит в описании всех возможных квазистатических движений двузвенника, т.е. таких движений, скорость и ускорения которых исчезающе малы.

3. Уравнения движения. Выпишем силы и моменты сил, действующие на двузвенник. Внешними силами и моментами являются силы трения F_A , F_O , F_B , приложенные к точкам A , O , B , и их моменты M_A , M_O , M_B , взятые относительно некоторой точки. Будем считать, что двузвенник состоит из двух твердых тел: звена OB , с массами в обеих концевых точках, и звена OA с массой в точке A . На звено OB действуют силы трения F_O , F_B , сила \tilde{F} , приложенная к точке O со стороны звена OA и момент сил M , развиваемый двигателем; на звено OA – силы F_A , $-\tilde{F}$, и момент $-M$.

Уравнения квазистатического движения (уравнения равновесия) твердого тела состоят в равенстве нулю суммы сил и суммы моментов. Для OB и OA имеем

$$F_B + F_O + \tilde{F} = 0$$

$$M_B + M_O + M_{\tilde{F}} + M = 0$$

$$F_A - \tilde{F} = 0, \quad M_A - M_{\tilde{F}} - M = 0.$$

Складывая уравнения, получаем необходимое условие квазистатического движения двузвенника

$$F_A - F_O + F_A = 0 \quad (3.1)$$

$$M_B + M_O + M_A = 0 \quad (3.2)$$

Эти уравнения являются и достаточным условием квазистатического движения двузвенника при соответствующем выборе управляющего момента M . Действительно, если они выполнены, то из уравнений равновесия любого звена однозначно определяется сила \tilde{F} , а значит, и ее момент $M_{\tilde{F}}$, поэтому, выбирая управляющий момент равным $M = M_A - M_{\tilde{F}}$, обеспечиваем равновесие каждого звена двузвенника.

Обозначим через v_i и v_i вектор скорости точки i и его абсолютную величину, $i = A, O, B$, а через k – коэффициент трения. Сила трения связана со скоростью законом Кулона

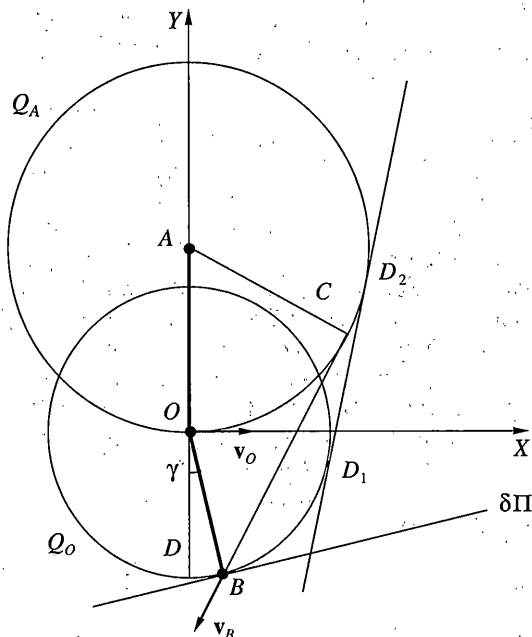
$$F_i = \begin{cases} -kmg \mathbf{v}_i / v_i, & v_i \neq 0 \\ \forall \mathbf{e}, |\mathbf{e}| \leq kmg, & v_i = 0 \end{cases} \quad (i = A, O, B)$$

Воспользуемся для удобства системой единиц, в которой $kmg = 1$. Тогда

$$F_i = \begin{cases} -\mathbf{v}_i / v_i, & v_i \neq 0 \\ \forall \mathbf{e}, |\mathbf{e}| \leq 1, & v_i = 0 \end{cases} \quad (i = A, O, B) \quad (3.3)$$

Запишем условия согласования скоростей v_i , отражающие наличие связей между вершинами двузвенника

$$(\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_O, \mathbf{OA}) = 0, \quad (\mathbf{v}_O - \mathbf{v}_B, \mathbf{OB}) = 0 \quad (3.4)$$



Фиг. 2

Уравнения (3.1)–(3.4) описывают квазистатическое движение двузвенника. Решением этих уравнений является тройка векторов (v_A, v_B, v_O) как функция текущего положения двузвенника на плоскости. Каждой такой тройке однозначно соответствует управляющий момент M . Вместе с начальным положением двузвенника уравнения (3.1)–(3.4) задают движение двузвенника, в том числе, траектории всех вершин двузвенника, если решение (3.1)–(3.4) единственно, и пучок всех возможных траекторий, если решение не единственно.

Сразу можно заметить, что вектор решения $(v_A, v_B, v_O) \in \mathbf{R}^6$ допускает умножение на константу. Поэтому скорость движения одной из вершин вдоль своей траектории может быть произвольной. При умножении решения на отрицательное число направление движения вершин вдоль траекторий изменяется на противоположное, и управляющий момент меняет знак на противоположный.

Удобно ввести в рассмотрение подвижную прямоугольную систему координат OXY , жестко связанную со звеном OA , лежащим на оси OY , и угол γ между векторами AO и OB , $\gamma \in [-\pi, \pi]$ (фиг. 1). В силу симметрии достаточно рассматривать только неотрицательные углы $\gamma \in [0, \pi]$. Движение двузвенника при отрицательных углах γ симметрично его движению при положительных углах γ с осью симметрии, проходящей через полностью раскрытый двузвенник ($\gamma = 0$). Введем для отношения длин звеньев обозначение $\rho = l/L$, $\rho \in (0, 1)$.

Возможны три вида движений, при которых неподвижными остаются две, одна и ни одной вершины двузвенника. Рассмотрим все эти возможности.

4. Движения с одной неподвижной вершиной. Рассмотрим движение, при котором вершина A неподвижна, а вершины O и B двигаются, и пусть γ – угол, допускающий такое движение. Введем следующие обозначения. Обозначим через Q_O и Q_A окружности с центрами в точках O и A и радиусами l и L , соответственно (фиг. 2). Обозначим через $\delta\Pi$ касательную к Q_O , проходящую через точку B , и через Π полуплоскость, от-

деленную прямой $d\Pi$ и не содержащую окружности Q_O . Через C обозначим точку касания окружности Q_A и прямой, проходящей через точку B .

Поскольку вектор v_O лежит на оси OX , а $|\mathbf{F}_B| = |\mathbf{F}_O| = 1$, то из равенства (3.2) моментов M_O и $-M_B$ относительно точки A следует, что вектор v_B лежит на прямой BC . Отсюда сразу следует, что при всех γ , допускающих рассматриваемое движение, вершина B движется по неподвижной относительно плоскости прямой. Действительно, при рассматриваемом угле γ вектор v_B лежит на касательной BC , поэтому при перемещении вершины B на $v_B dt$ касательная к окружности Q_A , проходящая через новое положение точки B , будет касаться ее в той же точке C , что и в предыдущем положении. Следовательно, направление вектора v_B неизменно и вершина B движется по прямой при всех углах γ , допускающих рассматриваемое движение.

Будем считать, что вектор скорости v_O сонаправлен с осью OX . Тогда из условия (3.4) согласования скоростей v_B и v_O следует, что конец вектора v_B лежит в полуплоскости Π . С другой стороны, из равенства моментов M_O и $-M_B$ относительно точки A следует, что вектор v_B сонаправлен с вектором CB . Эти два условия совместны только в том случае, если вершина B лежит на дуге DD_1 окружности Q_O , где прямая D_2D_1 касается обеих окружностей Q_O и Q_A , а точка D лежит на прямой AO (фиг. 2). Отсюда следует, что угол γ должен удовлетворять неравенству

$$\gamma \leq \arccos(1 - \rho) \quad (4.1)$$

Из условия (3.1) следует, что $\angle F_O F_B \geq \frac{2\pi}{3}$, т.к. только в этом случае сила трения покая F_A , $|F_A| \leq 1$, уравновешивает силу $F_B + F_O$. Поэтому угол между прямыми BC и AO должен быть не меньше, чем $\pi/6$. Следовательно, угол γ ограничен неравенством

$$\gamma \leq \arcsin \frac{1}{2\rho} - \frac{\pi}{6} \quad (4.2)$$

Неравенства (4.1) и (4.2) совместно задают необходимое и достаточное условие существования рассматриваемого движения. Можно заметить, что если $\rho \in (0, \frac{1}{2})$: то неравенство (4.1) сильнее неравенства (4.2), и наоборот, если $\rho \in (\frac{1}{2}, 1)$. Окончательно получаем, что при движении двузвенника с одной неподвижной вершиной A угол γ изменяется в следующих пределах:

$$\gamma \in [0, \gamma_{\max}]$$

$$\gamma_{\max} = \begin{cases} \gamma_{21} = \arccos(1 - \rho), & \rho \in (0, 1/2] \\ \gamma_{23} = \arcsin \frac{1}{2\rho} - \frac{\pi}{6}, & \rho \in [1/2, 1) \end{cases}$$

Двойной индекс у граничного значения γ здесь и далее указывает на характер движения двузвенника в окрестностях этого значения. А именно, при $\gamma < \gamma_{ij}$ в движении участвует i вершин двузвенника, а при $\gamma > \gamma_{ij}$ двигаются j вершин двузвенника. Рассмотрим, действительно, что происходит при достижении углом γ значения γ_{\max} .

Если $\rho \in (0, 1/2]$, то при приближении γ к γ_{21} вершина B стремится к точке D_1 (в системе координат OXY), а отношение скоростей v_O/v_B стремится к нулю (это видно из условия (3.4)). При достижении углом γ значения γ_{21} вершина O останавливается, и при дальнейшем увеличении угла γ движется только одна вершина B двузвенника. Это видно из того, что при $\gamma \geq \gamma_{21}$ запас силы трения F_A еще не исчерпан, и точка A остает-

ся неподвижной, а равновесие моментов при двух подвижных вершинах уже невозможно. При $\gamma = \gamma_{21}$ звено OB перпендикулярно вектору скорости v_B . Отсюда следует, что прямая, по которой движется вершина B при $\gamma < \gamma_{21}$ сопряжена с дугой окружности, по которой она движется при $\gamma > \gamma_{21}$.

Если $\rho \in [1/2, 1)$, то при углах γ , больших γ_{23} , сила трения F_A недостаточна, чтобы удержать на месте вершину A , и та начинает движение в направлении, составляющем с осью OY угол, равный $\pi/6$, отсчитываемый против часовой стрелки. Действительно, если $\gamma = \gamma_{23}$, то $\angle OAC = \pi/3$, $\angle v_B v_O = \pi/3$, сила F_A направлена по биссектрисе угла $\angle OAC$, и $|F_A| = 1$. Если вектор v_A направлен противоположно F_A , то есть под углом $\pi/6$ к оси OY и согласуется с v_O в смысле условия (3.4), то скорости v_B , v_O и v_A также являются решением задачи.

Итак, рассмотрено движение двузвенника, в котором его вершины O и B движутся, а вершина A остается неподвижной. Доказано, что при этом точка B движется по касательной к окружности Q_A , а угол γ изменяется в пределах $\gamma \in [0, \gamma_{\max}]$.

Рассуждая аналогично вышеизложенному, нетрудно показать, что движение вершин O и A при неподвижной вершине B невозможно. Также ясно, что точка O не может быть единственной неподвижной вершиной двузвенника, так как при этом не уравновешиваются моменты M_A и M_B относительно точки O . Таким образом, задача описания квазистатического движения двузвенника с одной неподвижной вершиной полностью решена.

5. Движения с двумя неподвижными вершинами. Рассмотрим движения двузвенника, при которых точка B движется, а точки O и A неподвижны. Ясно, что это единственное возможное квазистатическое движение с двумя неподвижными вершинами. Найдем значения угла γ , при которых такое движение возможно. Имеем $|F_B| = 1$, $|F_A| = x \leq 1$, $|F_O| \leq 1$. Пусть $\gamma < 0$. Тогда $F_B = (\cos \gamma, \sin \gamma)$; $F_A = (x \sin \beta, -x \cos \beta)$, где через β обозначен угол между векторами AO и F_A . Из условия равновесия сил следует, что

$$|F_O|^2 = |F_A + F_B|^2 = x^2 + 1 + 2x \sin(\beta - \gamma)$$

Поскольку $|F_O| \leq 1$, то получаем первое условие на параметры $x \leq 2 \sin(\gamma - \beta)$. Равенство моментов M_A и $-M_B$ относительно точки O дает условие $Lx \sin \beta = l$. Таким образом, движение с одной подвижной вершиной B при данном угле γ возможно, если и только если существуют x и β , удовлетворяющие системе уравнений

$$x \sin \beta = \rho, \quad x \leq 2 \sin(\gamma - \beta), \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{5.1}$$

Предположим, что $2 \sin(\gamma - \beta) \geq 1$. Тогда из (5.1) получаем систему

$$\sin \beta \geq \rho, \quad \gamma - 5\pi/6 \leq \beta \leq \gamma - \pi/6$$

которая имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\gamma \geq \pi/6 + \arcsin \rho \tag{5.2}$$

В частности, ее решением будет пара $x = 1$, $\beta = \arcsin \rho$. Предположим теперь, что $0 \leq 2 \sin(\gamma - \beta) \leq 1$. Тогда либо $\gamma - \beta \in [0, \pi/6]$, либо $\gamma - \beta \in [5\pi/6, \pi]$. Вторая возможность подразумевает, что $\gamma \geq 5\pi/6$ и не дает ничего нового, так как из (5.2) следует, что рассматриваемое движение возможно при всех $\gamma \geq 2\pi/3$ и при всех ρ . В первом же случае из (5.1) получаем систему

$$2 \sin(\gamma - \beta) \sin \beta \geq \rho, \quad \gamma - \pi/6 \leq \beta \leq \gamma$$

Первое неравенство этой системы можно записать в виде $\cos(\gamma - 2\beta) - \cos \gamma \geq \rho$. Если $\gamma < \pi/3$, то $\max_{\beta} \cos(\gamma - 2\beta) = 1$, и решение системы задается неравенствами

$$\arccos(1 - \rho) \leq \gamma \leq \pi/3 \tag{5.3}$$

которые определяют непустой отрезок при $\rho < 1/2$. Если $\gamma > \pi/3$, то $\max_{\rho} \cos(\gamma - 2\beta) = \cos(\pi/3 - \gamma)$, максимум достигается при $\beta = \gamma - \pi/6$, и решением является $\gamma \geq \pi/6 + \arcsin \rho$, что уже было получено в предыдущих рассуждениях.

Осталось объединить полученные решения (5.2), (5.3). Учитывая, что для $\rho \leq 1/2$ выполнено неравенство $\arccos(1 - \rho) \leq \pi/6 + \arcsin \rho \leq \pi/3$, получаем, что для $\rho \leq 1/2$ решение (5.1) задается неравенством $\gamma \geq \arccos(1 - \rho)$.

Окончательно, получаем, что углы γ , при которых возможно квазистатическое движение двузвенника с двумя неподвижными вершинами A и O определяются следующими соотношениями:

$$\gamma \in [\gamma_{\min}, \pi]$$

$$\gamma_{\min} = \begin{cases} \gamma_{21} = \arccos(1 - \rho), & \rho \in (0, 1/2] \\ \gamma_{31} = \pi/6 + \arcsin \rho, & \rho \in [1/2, 1) \end{cases}$$

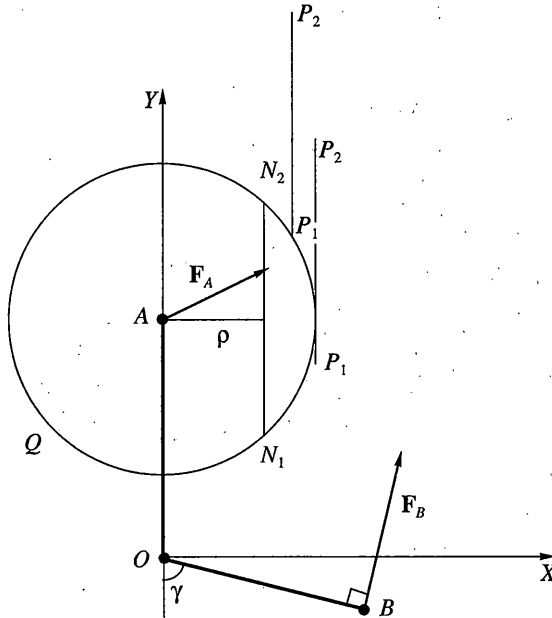
Полученные соотношения можно увидеть и из следующих геометрических рассуждений. Из условия равновесия моментов $x \sin \beta = \rho$ и того, что $0 \leq x \leq 1$ следует, что конец вектора F_A лежит на отрезке $N_1 N_2$ (фиг. 3), параллельном оси OY и отстоящем от нее на расстояние ρ , таком, что точки N_1 и N_2 лежат на окружности Q единичного радиуса с центром в точке A . Тогда конец вектора $F_A + F_B$ с началом в точке A принадлежит отрезку $P_1 P_2$, полученному при переносе отрезка $N_1 N_2$ на вектор единичной длины, под углом γ к оси OX . Условие равновесия сил $|F_A + F_B| \leq 1$ выполнено, если хотя бы одна точка отрезка $P_1 P_2$ принадлежит кругу, ограниченному окружностью Q . Это выполнено при всех γ , больших такого угла γ_{\min} при котором отрезок $P_1 P_2$ касается окружности Q . Если $\rho \in [1/2, 1)$, то точкой касания является P_1 , а поскольку $\angle AN_1 P_1 = \pi/3$, $\angle AN_1 N_2 = \arcsin \rho$, и угол между $N_1 P_1$ и осью OX равен γ , то получаем, что $\gamma_{\min} = \pi/6 + \arcsin \rho$. Если $\rho \in (0, 1/2)$, то точка касания отрезка $P_1 P_2$ и окружности Q является наиболее удаленной от оси OY точкой окружности и внутренней точкой отрезка. Ясно, что в таком случае $\gamma_{\min} = \arccos(1 - \rho)$.

6. Движение, при котором все вершины подвижны. Рассмотрим, наконец, такое движение двузвенника, в которое вовлечены все его вершины. Сначала решим, при каких значениях угла γ такое движение возможно. Поскольку все $v_i \neq 0$, то $|F_i| = 1$ ($i = A, O, B$) и уравнение равновесия сил (3.1) выполняется если, и только если, $\angle F_i F_j = \pi/3$ ($i, j = A, O, B$; $i \neq j$), что равносильно условиям $\angle v_i v_j = 2\pi/3$. Скорость v_O может иметь проекции на OA и OB как одного, так и разного знаков. Сначала будем считать, что проекции одного знака и положительны (поскольку решение задачи допускает умножение на константу). Тогда v_O составляет с осью OX угол, величина которого принадлежит отрезку $[0, \gamma]$ (фиг. 4). Из условия согласования скоростей (3.4) следует, что углы от v_A до AO и от BO до v_B равны, соответственно, $\pi/2 + \alpha$ и $\pi/2 + \beta$, где α, β – произвольные углы из отрезка $[0, \pi]$. Уравнение равновесия моментов (3.2) относительно точки Q имеет вид $l \cos \alpha = l \cos \beta$. Отсюда видно, что оба угла α, β принадлежат одновременно либо отрезку $[0, \pi/2]$, либо отрезку $[\pi/2, \pi]$. Во втором случае нельзя удовлетворить требованию равенства углов между парами векторов скоростей; в первом же случае оно налагает на параметры следующие ограничения: $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi/3$, $\pi/3 - \alpha \in [0, \gamma]$.

Итак, при квазистатическом движении с тремя подвижными вершинами параметры задачи удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi/3, \quad \cos \alpha = \rho \cos \beta$$

$$\alpha \in [\pi/3 - \gamma, \pi/3], \quad \alpha, \beta \in [0, \pi/2]$$



Фиг. 3

Эта система уравнений эквивалентна уравнению

$$\frac{\cos \alpha}{\cos(2\pi/3 - \gamma - \alpha)} = \rho \quad (\alpha \in \Delta) \tag{6.1}$$

$$\Delta = \begin{cases} [\pi/3 - \gamma, \pi/3], & \gamma \in [0, \pi/3] \\ [0, 2\pi/3 - \gamma], & \gamma \in [\pi/3, 2\pi/3] \end{cases}$$

Левая часть его монотонна по α и принимает все значения из отрезка $[h, 1/h]$, где

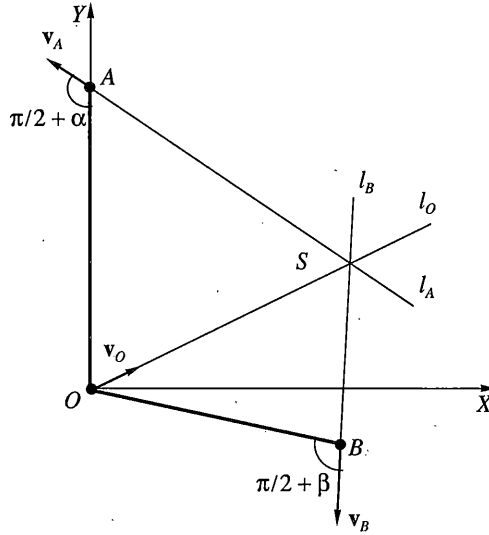
$$h = \begin{cases} \frac{1}{2 \cos(\pi/3 - \gamma)}, & \gamma \in [0, \pi/3] \\ \cos(2\pi/3 - \gamma), & \gamma \in [\pi/3, 2\pi/3] \end{cases}$$

Поэтому решение (6.1) существует (и единственно), если $\rho \geq h$. Разрешая это неравенство относительно γ , получаем, что при $\rho \in (0, 1/2)$ и всех γ рассматриваемое движение невозможно, а при $\rho \in [1/2, 1)$ допустимые углы γ принадлежат отрезку

$$\gamma \in [\gamma_{23}, \gamma_{31}], \quad \gamma_{23} = \arcsin \frac{1}{2\rho} - \frac{\pi}{6}, \quad \gamma_{31} = \frac{\pi}{6} + \arcsin \rho$$

Осталось еще рассмотреть случай, когда проекции скорости \mathbf{v}_O на \mathbf{OA} и \mathbf{OB} имеют разные знаки. Рассуждая аналогично вышеизложенному, можно показать, что решения задачи в этом случае не существует.

Докажем теперь следующее утверждение.



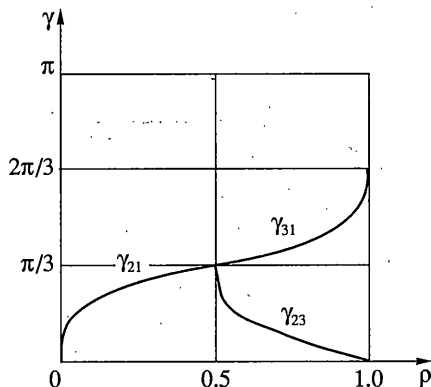
Фиг. 4

Утверждение 1. При квазистатическом движении двузвенника его вершины A, O, B двигаются по прямым l_A, l_O, l_B пересекающимся в одной точке, и угол между каждой парой прямых равен $\pi/3$.

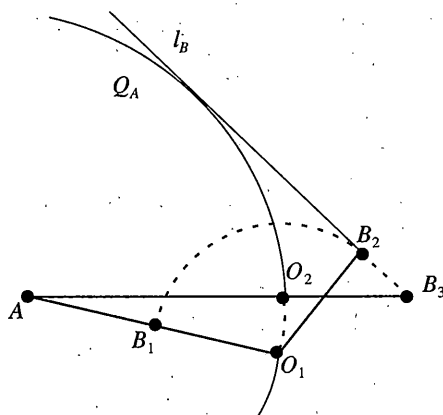
Доказательство. Пусть некоторый угол γ допускает движение всех вершин двузвенника. Обозначим через l_i прямую, содержащую вектор v_i и через x_j – расстояние от точки O до точки пересечения l_O и l_j ($j = A, B$) (см. фиг. 4). Из равенства моментов следует, что расстояния от точки O до l_A и l_B одинаковы, а поскольку $\angle l_A l_O = \angle l_B l_O = \pi/3$, то и $x_A = x_B$ и все прямые пересекаются в точке S . После перемещения вершин i вдоль прямых l_i на $v_i dt$ скорости v_i , соответствующие новому положению вершин, будут по-прежнему лежать на прямых l_i , поскольку при этом сохраняется равенство моментов относительно точки O , а единственность решения была доказана ранее. Таким образом, получаем, что вершины двигаются по прямым l_i при всех допустимых углах $\gamma \in [\gamma_{23}, \gamma_{31}]$.

Теперь можно увидеть, чему соответствуют границы допустимых значений γ . Поскольку один из концов каждого звена двигается к точке S , а другой от нее, то звено занимает положение, промежуточное между перпендикулярами к прямым, по которым двигаются его концы. При этом расстояние $|OS|$ должно лежать в пределах $[l/\sqrt{3}, 2l/\sqrt{3}]$ для меньшего и $[L/\sqrt{3}, 2L/\sqrt{3}]$ для большего звена. Эти условия совместны, если $\rho \in [1/2, 1]$; при этом крайними для двузвенника являются, с одной стороны, положение, при котором $AO \perp l_O$, соответствующее значению $\gamma = \gamma_{23}$ и, с другой стороны, положение, при котором $BO \perp l_B$, соответствующее $\gamma = \gamma_{31}$.

7. Построение картины движения двузвенника в целом. Итак, получены следующие результаты. Показано, что разные типы движений (с одной, двумя и тремя подвижными вершинами) делят область значений угла γ на непересекающиеся и дополняющие друг друга области, соответствующие этим типам движений (это деление при всех $\rho \in (0, 1)$ показано на фиг. 5). Доказано существование и единственность решения задачи при каждом $\gamma \in [-\pi, \pi]$ и построены траектории движения вершин двузвенника при



Фиг. 5

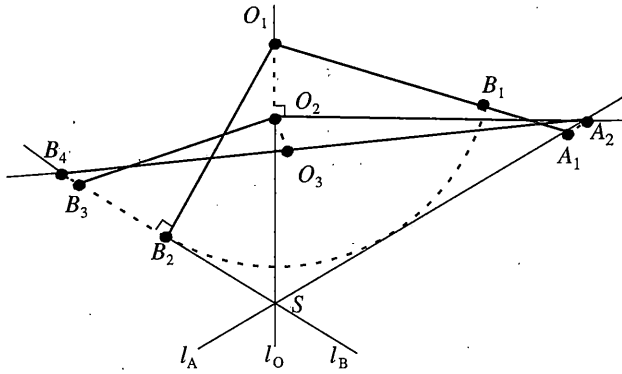


Фиг. 6

каждом виде движения. Осталось только объединить полученные результаты и описать движение трехзвенника в целом.

Рассмотрим сначала случай, когда $\rho \in (0, 1/2)$ и фаза с тремя подвижными вершинами отсутствует. Пусть в начале движения $\gamma = \pi$, двузвенник сложен и занимает на плоскости положение AO_1B_1 (фиг. 6). При изменении γ от π до γ_{21} звено AO неподвижно, а вершина B движется по дуге окружности. При $\gamma = \gamma_{21}$ двузвенник занимает положение AO_1B_2 , причем касательная l_B к окружности Q_A , проходящая через точку B_2 , перпендикулярна звену OB . При уменьшении γ от γ_{21} до нуля вершина O движется по дуге окружности Q_A , а вершина B по прямой l_B и при $\gamma = 0$ двузвенник занимает положение AO_2B_3 . Дальнейшее движение двузвенника симметрично рассмотренному с осью симметрии AB_3 .

Рассмотрим теперь случай, когда $\rho \in [1/2, 1)$. Пусть, по-прежнему, в начале движения $\gamma = \pi$, двузвенник сложен и занимает на плоскости положение $A_1O_1B_1$ (фиг. 7). При изменении γ от π до γ_{31} звено AO неподвижно, а вершина B движется по дуге окружности. При $\gamma = \gamma_{31}$ двузвенник занимает положение $A_1O_1B_2$. Обозначим через l_B прямую, проходящую через точку B_2 и перпендикулярную O_1B_2 . Поскольку ранее было получе-



Фиг. 7

но, что при движении трех вершин и $\gamma = \gamma_{31}$ скорость v_B перпендикулярна звену OB , то получаем, что при изменении угла γ от γ_{31} до γ_{23} вершина B движется по прямой по l_B , а вершины A и O по прямым l_A и l_O , пересекающимся с l_B в одной точке под углами $\pi/3$. При $\gamma = \gamma_{23}$ двузвенник занимает положение $A_2O_2B_3$, причем звено AO перпендикулярно прямой l_O , и, следовательно, угол между прямыми AO и l_B равен $\pi/6$. Отсюда получаем, что и при двух подвижных вершинах двузвенника вершина B движется по прямой l_B . Таким образом, при изменении γ от γ_{23} до нуля вершина A неподвижна, вершина O движется по дуге окружности, а вершина B движется по прямой l_B , и при $\gamma = 0$ двузвенник полностью раскрыт и занимает положение $A_2O_3B_4$. Дальнейшее движение двузвенника симметрично рассмотренному с осью симметрии A_2B_4 .

Обозначим через E точку отрезка AO , лежащую на оси симметрии A_2B_4 при положении двузвенника, соответствующем $\gamma = \gamma_{31}$. Очевидно, положение точки E на плоскости будет одним и тем же при $\gamma = \pi$ и $\gamma = -\pi$. Таким образом, при полном обороте одного звена вокруг другого и изменении угла γ от π до $-\pi$ у двузвенника остается неподвижной точка E , если $\rho \in [1/2, 1)$, и точка A , если $\rho \in (0, 1/2]$, и двузвенник поворачивается вокруг нее на некоторый угол Δ . Предположим, что допустимо любое число оборотов звеньев друг относительно друга и $\gamma \in [-\infty, \infty]$. Тогда при любом начальном состоянии двузвенника при уменьшении γ на 2π он поворачивается вокруг своей неподвижной точки на угол Δ . Соответственно траектория вершин двузвенника при $\gamma \in [-\infty, \infty]$ получается из их траекторий при $\gamma \in [-\pi, \pi]$ путем их поворотов на $n\Delta$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Если $\rho \in (0, 1/2]$, то траектория точки B либо всюду плотно заметает кольцо с центром в A и внутренним и внешним радиусами $L-l, L+l$, либо замкнута в этом кольце. Если $\rho \in [1/2, 1)$, то траектория каждой из вершин двузвенника заметает, либо замкнута в своем кольце с центром в точке E .

Сформулируем полученные результаты в следующем утверждении.

Утверждение 2. Пусть при квазистатическом движении двузвенника угол γ уменьшается от π до $-\pi$. Тогда при $\gamma \in [\gamma_1, \pi]$ ($\gamma_1 = \gamma_{21}$ при $\rho \in (0, 1/2]$ и $\gamma_1 = \gamma_{31}$ при $\rho \in [1/2, 1)$) звено OA остается неподвижным; далее до $\gamma = 0$ точка B двигается по прямой, перпендикулярной звену OB при $\gamma = \gamma_1$. Если $\rho \in (0, 1/2]$, то точка A при этом неподвижна. Если же $\rho \in [1/2, 1)$, то при $\gamma \in [\gamma_{23}, \gamma_{31}]$ точки A и O двигаются по прямым l_A и l_O , а при $\gamma \in [0, \gamma_{23}]$ точка A остается неподвижной. При $\gamma \in [-\pi, 0]$ движение симметрично движению при $\gamma \in [0, \pi]$ с осью симметрии, проходящей через полностью раскрытый двузвенник.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00201) и гранта поддержки ведущих научных школ (00-15-96013).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hirose S.* Biologically Inspired Robots: Snake-like Locomotors and Manipulators. Oxford: Univ. Press, 1993. 220 p.
2. Черноусько Ф.Л. Движение многозвенника по горизонтальной плоскости // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 8–18.
3. Черноусько Ф.Л. Управляемые движения двузвенника по горизонтальной плоскости // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 578–591.
4. Черноусько Ф.Л. Волнообразные движения многозвенника по горизонтальной плоскости // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 518–531.

Москва

Поступила в редакцию
30.11.2000