МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2003

УДК 531.381

© 2003 г. А.П. МАРКЕЕВ, С.В. МЕДВЕДЕВ, Т.Н. ЧЕХОВСКАЯ

К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МАЯТНИКОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СЛУЧАЕ КОВАЛЕВСКОЙ

Исследована задача об орбитальной устойчивости плоских колебаний и вращений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Ковалевской.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки O в однородном поле тяжести. Движение отнесем к неподвижной системе координат $OXYZ$, ось OZ которой направим вертикально вверх. С телом свяжем систему координат $Oxyz$, образованную главными осями инерции тела для точки O. Моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy и Oz обозначим соответственно через A, B и C. Пусть mg – вес тела, l – расстояние от центра тяжести до неподвижной точки O, а x_*, y_*, z_* – координаты центра тяжести в системе $Oxyz$. Предположим, что ось Oy является осью динамической симметрии, а геометрия масс тела соответствует случаю Ковалевской: $A = C = 2B$, $y_* = 0$. Без ограничения общности можно положить $x_* = l$, $z_* = 0$.

В качестве обобщенных координат, задающих ориентацию тела в пространстве, примем углы Эйлера ψ, θ, φ. Уравнения движения имеют вид [1]

$$
\begin{gathered}
2\frac{dp}{dt} + qr = 0, \quad \frac{dq}{dt} = 2\mu^2\gamma_3, \quad 2\frac{dr}{dt} - pq = -2\mu^2\gamma_2 \\
\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2 \\
p = \frac{d\psi}{dt}\gamma_1 + \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi, \quad q = \frac{d\psi}{dt}\gamma_2 - \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi, \quad r = \frac{d\psi}{dt}\gamma_3 + \frac{d\varphi}{dt} \\
\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\theta \\
\mu^2 = mgl/(2B)
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Помимо трех алгебраических первых интегралов, которые всегда существуют в случае движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки – интеграла энергии, интеграла площадей и интеграла $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, уравнения (1.1) допускают еще и четвертый алгебраический интеграл (интеграл Ковалевской)

$$
(p^2 - r^2 - 2\mu^2\gamma_1)^2 + 4(pr - \mu^2\gamma_3)^2 = \text{const} \tag{1.2}
$$

При этом уравнения (1.1) интегрируются в квадратурах [2].

Уравнения (1.1) имеют решения, для которых $\psi = \pi/2$, $\theta = \pi/2$. При этом $p = q = 0$, $r = d\varphi/dt$, $\gamma_1 = \sin\varphi$, $\gamma_2 = \cos\varphi$, $\gamma_3 = 0$. Для упомянутых решений постоянная интеграла площадей (проекция кинетического момента тела на вертикаль) равна нулю, экваториальная ось Oz эллипсоида инерции тела неподвижна и занимает горизонтальное положение, а движение тела вокруг этой оси описывается дифференциальным уравнением математического маятника. В общем случае это движение представляет собой вращение с произвольной по величине, периодически меняющейся со временем, угловой скоростью или колебания произвольной амплитуды. В [3] показано, что если амплитуда колебаний волчка Ковалевской вокруг экваториальной оси эллипсоида инерции не превосходит $\pi/2$, то эти колебания орбитально устойчивы.

Цель данной работы состоит в решении задачи об орбитальной устойчивости вращений волчка Ковалевской вокруг экваториальной оси эллипсоида инерции и колебаний с амплитудой, большей или равной $\pi/2$. При этом величину проекции кинетического момента на вертикаль считаем невозмущаемой, т.е. и в возмущенном движении она предполагается равной нулю. Основным результатом статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. Плоские вращения волчка Ковалевской вокруг экваториальной оси эллипсоида инерции и колебания с амплитудой, большей $\pi/2$, орбитально неустойчивы. Колебания с амплитудой, равной $\pi/2$ являются орбитально устойчивыми.

Отметим, что задача об устойчивости плоских колебаний и вращений волчка Ковалевской вокруг полярной оси эллипсоида инерции решена в [4].

2. Канонически сопряженные переменные для возмущенного движения. Пусть p_ψ, p_θ, p_φ – обобщенные импульсы, соответствующие углам Эйлера. Угол ψ – циклическая координата, p_ψ – постоянная по величине проекция кинетического момента на вертикаль. Положим $\varphi = 3\pi/2 + q_1$, $\theta = \pi/2 + q_2$, $p_\varphi = C\mu p_1$, $p_\theta = C\mu p_2$ и введем безразмерное время $\tau = \mu t$. Тогда движение твердого тела в случае Ковалевской может быть (при $p_\psi = 0$) описано каноническими уравнениями, задаваемыми обезразмеренным гамильтонианом

$$\begin{aligned} H = {}& \tfrac{1}{2} p_1^2 - \cos q_1 \cos q_2 + \tfrac{1}{2}(1 + \sin^2 q_1)\operatorname{tg}^2 q_2 p_1^2 + \\ & + \sin q_1 \cos q_1 \operatorname{tg} q_2 p_1 p_2 + \tfrac{1}{2}(1 + \cos^2 q_1) p_2^2 \end{aligned} \qquad (2.1)$$

В переменных q_i, p_i интеграл Ковалевской (1.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & [(p_1 \cos q_1 \operatorname{tg} q_2 - \sin q_1 p_2)^2 - p_1^2 + 2\cos q_1 \cos q_2]^2 + \\ & + 4[p_1(p_1 \cos q_1 \operatorname{tg} q_2 - \sin q_1 p_2) - \sin q_2]^2 = \text{const} \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Плоским движениям тела отвечает решение, в котором $q_2 = p_2 = 0$, а переменные q_1, p_1 описываются уравнениями с гамильтонианом

$$H^{(0)} = \tfrac{1}{2} p_1^2 - \cos q_1 \qquad (2.3)$$

Эти уравнения имеют интеграл $H^{(0)} = h = \text{const}$. При $-1 < h < 1$ тело совершает плоские колебания в окрестности устойчивого положения равновесия, для которого центр тяжести тела лежит на вертикали OZ ниже неподвижной точки O. При $h > 1$ осуществляется режим плоских вращений: угол φ поворота тела вокруг его горизонтальной оси Oz монотонно возрастает или убывает со временем.

Для дальнейшего целесообразно записать гамильтониан (2.3) в переменных действие – угол I, w [1]. В случае колебаний положим $k_1 = \sin(\alpha/2)$, где α – амплитуда колебаний ($0 < \alpha < \pi$). Каноническая унивалентная замена переменных $q_1, p_1 \to I, w$ задается равенствами

$$q_1 = 2\arcsin[k_1 \operatorname{sn}(u, k_1)], \quad p_1 = 2k_1 \operatorname{cn}(u, k_1), \quad u = 2K(k_1)w/\pi \qquad (2.4)$$

Здесь $k_1 = k_1(I)$ – функция, обратная к функции

$$I = \frac{8}{\pi}[E(k_1) - (1 - k_1^2)K(k_1)] \qquad (2.5)$$

В (2.4), (2.5) и ниже используются стандартные обозначения для эллиптических функций и интегралов [5].

Частота колебаний ω_1 вычисляется по формуле

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2K(k_1)} \tag{2.6}$$

В переменных I, w функция Гамильтона (2.3) принимает вид

$$H^{(0)} = 2k_1^2 - 1 \tag{2.7}$$

В случае вращений положим $k_2^2 = 2(1+h)^{-1}$. Переменные I, w вводятся по формулам

$$q_1 = 2\mathrm{am}(u, k_2), \quad p_1 = 2/k_2\mathrm{dn}(u, k_2), \quad u = K(k_2)w/\pi \tag{2.8}$$

Здесь $k_2 = k_2(I)$ – функция, обратная к функции

$$I = \frac{4E(k_2)}{\pi k_2} \tag{2.9}$$

Для частоты вращений ω_2 имеем выражение

$$\omega_2 = \frac{\pi}{k_2 K(k_2)} \tag{2.10}$$

Функция Гамильтона (2.3) в переменных I, w имеет вид

$$H^{(0)} = 2/k_2^2 - 1 \tag{2.11}$$

В невозмущенном движении имеем $q_2 = p_2 = 0$, $I = I_0 = \mathrm{const}$, а переменные q_1, p_1 при заданном допустимом значении I_0 определяются формулами (2.4) – (2.6) в случае колебаний и формулами (2.8) – (2.10) в случае вращений. При этом $w = \omega_1\tau + w(0)$ в случае колебаний и $w = \omega_2\tau + w(0)$ в случае вращений.

Введем возмущение переменной действие $r_1 = I - I_0$. Задача об орбитальной устойчивости плоских колебаний и вращений тела эквивалентна задаче об их устойчивости по отношению к переменным q_2, p_2, r_1.

3. Линейный анализ уравнений возмущенного движения. Из (2.1) и (2.3) – (2.11) находим квадратичную относительно $q_2, p_2, |r_1|^{1/2}$ часть H_2 гамильтониана возмущенного движения

$$\begin{gathered} H_2 = \omega r_1 + g_2, \quad g_2 = g_2(q_2, p_2, w) = s_{20}q_2^2 + s_{11}q_2p_2 + s_{02}p_2^2 \\ s_{20} = \tfrac{1}{2}[p_1^2(1+\sin^2 q_1) + \cos q_1], \quad s_{11} = p_1 \sin q_1 \cos q_1, \quad s_{02} = \tfrac{1}{2}(1+\cos^2 q_1) \end{gathered} \tag{3.1}$$

В (3.1) величины ω и q_1, p_1 соответствуют невозмущенному движению и определяются при $I = I_0$ по формулам (2.6), (2.4) в случае колебаний и по формулам (2.10), (2.8) в случае вращений.

В линеаризованных уравнениях возмущенного движения $r_1 = \mathrm{const}$, а изменение переменных q_2 и p_2, если за независимую переменную принять величину w, описывается уравнениями

$$dq_2/dw = \partial h_2/\partial p_2, \quad dp_2/dw = -\partial h_2/\partial q_2 \tag{3.2}$$

$$h_2 = g_2/\omega \tag{3.3}$$

Интеграл Ковалевской (2.2) для уравнений возмущенного движения можно записать при помощи следующего ряда по степеням q_2, p_2, r_1: $k_0 + k_2 + \ldots + k_n + \ldots = \mathrm{const}$, где k_n –

форма степени n относительно $q_2, p_2, |r_1|^{1/2}$ с коэффициентами, зависящими от q_1, p_1, которые соответствуют невозмущенному движению. При этом

$$
\begin{aligned}
k_0 &= (p_1^2 - 2\cos q_1)^2, \quad k_2 = 4(p_1^2 - 2\cos q_1)\omega r_1 + f_2 \\
f_2 &= 2[p_1^2 \cos q_1 (p_1^2 \cos q_1 + 2\cos^2 q_1 - 3) + 2\sin^2 q_1] q_2^2 - \\
&- 4p_1 \sin q_1 (p_1^2 \cos q_1 - 2\sin^2 q_1) q_2 p_2 + 2(p_1^2 + 2\cos q_1)\sin^2 q_1 p_2^2
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция

$$
J(q_2, p_2, w) = f_2 - 4(p_1^2 - 2\cos q_1) g_2 \tag{3.5}
$$

является первым интегралом линейных уравнений (3.2).

Пусть $\mathbf{X}(w)$ – матрица фундаментальных решений системы (3.2), нормированная условием $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица второго порядка. Элементы $x_{ij}(w)$ матрицы $\mathbf{X}$ удовлетворяют уравнениям

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_{1j}}{dw} &= \frac{1}{\omega}[p_1 \sin q_1 \cos q_1 x_{1j} + (1 + \cos^2 q_1) x_{2j}] \\
\frac{dx_{2j}}{dw} &= -\frac{1}{\omega}\{[(p_1^2(1 + \sin^2 q_1) + \cos q_1)] x_{1j} + p_1 \sin q_1 \cos q_1 x_{2j}\} \quad (j = 1, 2)
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

и начальным условиям

$$
x_{11}(0) = x_{22}(0) = 1, \quad x_{12}(0) = x_{21}(0) = 0 \tag{3.7}
$$

Правые части уравнений (3.6) имеют период T относительно w, причем, как видно из (2.4) и (2.8), $T = \pi$ в случае колебаний и $T = 2\pi$ в случае вращений. В силу гамильтоновости системы (3.6) при любом w имеет место равенство

$$
x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} = 1 \tag{3.8}
$$

Характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{X}(T)$ записывается в виде

$$
\begin{aligned}
&\rho^2 - 2a\rho = 1 = 0 \\
&2a = x_{11}(T) + x_{22}(T)
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Если $|a| < 1$, то корни уравнения (3.9) по модулю равны единице и различны. В этом случае имеет место [6] устойчивость в линейном приближении. Если же $|a| > 1$, то уравнение (3.9) имеет корень, модуль которого больше единицы, и имеет место неустойчивость рассматриваемого периодического движения, причем не только в линейном приближении, но и в рамках полных нелинейных уравнений возмущенного движения [6].

В соответствии с (3.2), (3.5) и (3.7), решения уравнений (3.6) при любом значении w удовлетворяют равенствам

$$
\begin{aligned}
&J(x_{1j}, x_{2j}, w) = c_j = \text{const} \quad (j = 1, 2) \\
&c_1 = J(1, 0, 0), \quad c_2 = J(0, 1, 0)
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Положив в (3.10) $w = T$, найдем, что справедливы следующие равенства:

$$
x_{11}^2(T) - 2(2b^2 - 1)x_{21}^2(T) = 1, \quad x_{12}^2(T) - 2(2b^2 - 1)x_{22}^2(T) = -2(2b^2 - 1) \tag{3.11}
$$

где $b = k_1$ в случае колебаний и $b = k_2^{-1}$ в случае вращений.

Из (3.11) и (3.8) находим, что $x_{11}(T) = x_{22}(T)$, и, следовательно, величина a в уравнении (3.9) удовлетворяет равенству

$$a^2 = x_{11}^2(T) = 1 + 2(2b^2 - 1)x_{21}^2(T) \tag{3.12}$$

Численный анализ показал, что функция $x_{21}(T)$ (от k_1 в случае колебаний или от k_2 в случае вращений) всегда отлична от нуля, т.е. при $0 < k_1 < 1$ в случае колебаний или при $0 < k_2 < 1$ в случае вращений.

Так как в случае вращений величина $b > 1$, то на основании вышесказанного из (3.12) следует, что $|a| > 1$. Поэтому плоские вращения волчка Ковалевской вокруг экваториальной оси эллипсоида инерции всегда орбитально неустойчивы.

Колебания же в зависимости от их амплитуды α (т.е. от величины максимального отклонения оси Ox тела, на которой лежит центр тяжести, от ее устойчивого равновесного положения на вертикали) могут быть орбитально устойчивыми или неустойчивыми. Из (3.12) видно, что если $\alpha > \pi/2$ (т.е. $\sqrt{2}/2 < k_1 < 1$), то $|a| > 1$. Поэтому колебания с амплитудой, превосходящей $\pi/2$, орбитально неустойчивы. Если же амплитуда колебаний не превышает $\pi/2$ (т.е. $0 < k_1 \le \sqrt{2}/2$), то $|a| \le 1$ и линейного приближения недостаточно для получения строгих выводов об их орбитальной устойчивости. Нелинейная задача об устойчивости колебаний при $0 < \alpha < \pi/2$ решена в [3], оказалось, что такие колебания орбитально устойчивы. Случай критического значения амплитуды колебаний ($\alpha = \pi/2$) рассматривается ниже.

4. Нелинейный анализ устойчивости колебаний в случае $\alpha = \pi/2$. Примем в качестве независимой переменной величину $\omega_1\tau$. Из соотношений (2.1) и (2.4) – (2.7) можно получить гамильтониан возмущенного движения в виде следующего ряда:

$$H = r_1 + h_2 + H_4 + \ldots \tag{4.1}$$

где h_2 задается равенством (3.3), в котором $\omega = \omega_1$, а q_1, p_1 соответствуют невозмущенному движению. Функция H_4 определяется равенствами

$$H_4 = \omega_1^{-1}[c_{20}r_1^2 + (l_{20}q_2^2 + l_{11}q_2p_2 + l_{02}p_2^2)r_1 + s_{40}q_2^4 + s_{31}q_2^3p_2]$$

$$c_{20} = \frac{1}{2}\frac{\partial\omega_1}{\partial I} = \frac{1}{2}\frac{\partial\omega_1}{\partial k_1}\frac{\partial k_1}{\partial I}, \quad l_{ij} = \frac{\partial s_{ij}}{\partial I} = \left(\frac{\partial s_{ij}}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial k_1} + \frac{\partial s_{ij}}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial k_1}\right)\frac{\partial k_1}{\partial I} \tag{4.2}$$

$$s_{40} = {}^1\!/_{24}\,[8p_1^2(1 + \sin^2 q_1) - \cos q_1], \quad s_{31} = {}^1\!/_3\,p_1 \sin q_1 \cos q_1$$

Явные выражения для коэффициентов $l_{ij}(w)$ функции (4.2) можно получить при помощи соотношений

$$\frac{\partial k_1}{\partial I} = \frac{\pi}{8k_1K(k_1)}, \quad \frac{\partial \operatorname{sn} u}{\partial k_1} = \frac{\operatorname{cn} u}{k_1(1 - k_1^2)}(k_1^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u - \operatorname{dn} u \operatorname{zn} u)$$

и известных [5] правил действий с эллиптичеекими функциями и интегралами.

Величина u определена в (2.4), k_1 соответствует невозмущенному движению. Многоточием в (4.1) обозначена совокупность членов выше пятой степени относительно $q_2, p_2, |r_1|^{1/2}$.

При $\alpha = \pi/2$ имеем $k_1 = \sqrt{2}/2$. Вычисления показывают, что для этого значения k_1 матрица фундаментальных решений системы (3.6) при $w = \pi$ имеет вид

$$\mathbf{X}(\pi) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ x_{21}(\pi) & 1 \end{Vmatrix}, \quad x_{21}(\pi) = 1.694$$

Корни характеристического уравнения (3.9) кратные: $\rho_1 = \rho_2 = 1$, а матрица $\mathbf{X}(\pi)$ не приводится к диагональной форме. Поэтому в рамках линейных уравнений возмущенного движения имеет место орбитальная неустойчивость. Покажем, однако, что в полной нелинейной системе уравнений возмущенного движения колебания твердого тела с амплитудой, равной $\pi/2$, орбитально устойчивы. При доказательстве воспользуемся результатами, полученными ранее [7]. Для их применения надо гамильтониан возмущенного движения (4.1) привести к нормальной форме, по коэффициентам которой можно судить об устойчивости или неустойчивости.

В соответствии с алгоритмом из [7] предварительно нормализуем линейную систему (3.2) с гамильтонианом (3.3) и независимой переменной w. Для этого сделаем замену q_2, $p_2 \to q_2^*$, p_2^* по формулам

$$q_2 = n_{11}q_2^* + n_{12}p_2^*, \quad p_2 = n_{21}q_2^* + n_{22}p_2^* \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} n_{11} &= -cx_{12}, \quad n_{12} = c^{-1}x_{11} - cx_{12}w \\ n_{21} &= -cx_{22}, \quad n_{22} = c^{-1}x_{21} - cx_{22}w \\ c &= [x_{21}(\pi)/\pi]^{1/2} = 0.734 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Величины x_{ij} в (4.4) – это функции $x_{ij}(w)$, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений (3.6) и начальным условиям (3.7).

Замена (4.3) унивалентная, каноническая и имеет период π по w. Преобразованным линейным уравнениям (3.2) отвечает гамильтониан $h_2^* = -{}^1\!/\!_2\, p_2^{*2}$.

Дополнив равенства (4.3) еще двумя соотношениями

$$w = w^*, \quad r_1 = r_1^* - {}^1\!/\!_2\, p_2^{*2} - \omega_1^{-1} g_2(n_{11}q_2^* + n_{12}p_2^*, \quad n_{21}q_2^* + n_{22}p_2^*, w) \tag{4.5}$$

где g_2 – функция из (3.1), получим каноническое унивалентное преобразование $q_2, p_2, r_1, w \to q_2^*, p_2^*, r_1^*, w^*$ по всем четырем фазовым переменным, приводящее гамильтониан возмущенного движения (4.1) к виду

$$H^* = r_1^* - {}^1\!/\!_2\, p_2^{*2} + H_4^* + \ldots \tag{4.6}$$

Гамильтониан (4.6) имеет период π по w. Согласно [7] при решении вопроса об устойчивости из коэффициентов формы четвертой степени H_4^* относительно q_2^*, p_2^*, $|r_1^*|^{1/2}$ как правило, достаточно знать только коэффициент $g_{40}(w)$ при q_2^{*4}. Из соотношений (4.1) – (4.5) и (3.1) для него можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} g_{40} = \omega_1^{-3}[&(s_{40}n_{11}^4 + s_{31}n_{11}^3 n_{21})\omega_1^2 + c_{20}(s_{20}n_{11}^2 + s_{11}n_{11}n_{21} + s_{02}n_{21}^2)^2 - \\ &-(s_{20}n_{11}^2 + s_{11}n_{11}n_{21} + s_{02}n_{21}^2)(l_{20}n_{11}^2 + l_{11}n_{11}n_{21} + l_{02}n_{21}^2)\omega_1] \end{aligned}$$

При помощи канонической замены переменных q_2^*, p_2^*, r_1^*, $w \to \xi_2, \eta_2, \eta_1, \xi_1$ в гамильтониане (4.6) можно [7] нормализовать члены четвертой степени и он примет вид

$$\Gamma = \eta_1 - {}^1\!/\!_2\,\eta_2^2 + h_{40}\xi_2^4 + h_{20}\xi_2^2\eta_1 + h_{00}\eta_1^2 + O_6$$

где через O_6 обозначена π-периодическая по ξ_1 совокупность членов выше пятой степени относительно ξ_2, η_2, $|\eta_1|^{1/2}$. Коэффициенты h_{ij} – постоянные величины, причем

$$h_{40} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g_{40}dw$$

Исследуемое периодическое движение орбитально устойчиво, если знаки коэффициента h_{40} и коэффициента при η_2^2 в нормализованном гамильтониане одинаковы, и неустойчиво, если эти знаки противоположны [7].

Вычисления показывают, что $h_{40} = -0.078 < 0$, и следовательно, колебания с амплитудой, равной $\pi/2$, орбитально устойчивы.

Тем самым доказательство теоремы 1 об устойчивости плоских колебаний и вращений волчка Ковалевской завершено.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00405) и ФЦП "Интеграция" (проект А0097).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.: ЧеРо, 1999. 569 с.
2. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
3. *Иртегов В.Д.* Об устойчивости маятниковых колебаний гироскопа С.В. Ковалевской // Тр. Казан. авиац. ин-та. Математика и механика. 1968. Вып. 97. С. 38–40.
4. *Маркеев А.П.* Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // ПММ. 2001. Т.65. Вып.1. С. 51–58.
5. *Журавский А.М.* Справочник по эллиптическим функциям. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1941. 235 с.
6. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М. : Наука, 1966. 530 с.
7. *Маркеев А.П.* Исследование устойчивости периодических движений автономной гамильтоновой системы в одном критическом случае // ПММ. 2000. Т.64. Вып. 5. С. 833–847.

Москва

Поступила в редакцию
3.11.2000