МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2003

УДК 539.3:534.1

© 2003 г. Г.Р. ГУЛГАЗАРЯН

О ЛОКАЛИЗОВАННЫХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ У СВОБОДНОГО ТОРЦА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЗАМКНУТОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Исследован вопрос существования собственных колебаний локализованных у свободного торца замкнутой круговой полубесконечной упругой цилиндрической оболочки. Исходя из системы уравнений соответствующей теории Кирхгофа–Лява для динамического равновесия цилиндрических оболочек, получены дисперсионные уравнения. Доказана асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для полубесконечной пластинки. Приводится механизм с помощью которого расчленяются локализованные у свободного торца возможные типы колебаний. Для цилиндрических оболочек с разными радиусами и толщинами приведены приближенные значения безразмерной характеристики собственной частоты и характеристики затухания соответствующих форм колебаний.

Введение. Начало исследования упругих поверхностных волн связано с работой Рэлея [1], в которой установлено существование упругих волн, распространяющихся вдоль свободной границы полупространства, с амплитудой, быстро убывающей с глубиной. Такие волны, возникающие в упругих телах различной геометрии, обычно называются поверхностными волнами типа Рэлея. Волны, локализованные вблизи свободной границы полубесконечной пластинки, и волны в полубесконечной цилиндрической оболочке, затухающие от свободного торца оболочки вдоль направления ее образующих, также относятся к поверхностным волнам типа Рэлея [2–11]. В случае полубесконечной пластинки со свободной границей, в рамках гипотезы Кирхгофа–Лява, независимо друг от друга существуют планарные и изгибные волны локализованные вблизи границы пластинки [6]. Для цилиндрических оболочек с малой кривизной два указанных типа движения оказываются связанными, давая начало двум новым типам локализованных у кромки колебаний (преимущественно изгибных и преимущественно тангенциальных) [12–13]. Применяя асимптотические методы, развитые в применении к теории оболочек (см. [14], стр. 349), в [13] доказано существование третьего типа колебаний – "сверхнизкочастотных колебаний" локализованных у свободного края полубесконечной круговой цилиндрической оболочки. В данной работе получены дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот возможных типов колебаний локализованных у свободного края полубесконечной круговой цилиндрической оболочки. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для полубесконечной пластинки. Приведены численные значения безразмерной характеристики затухания и собственной частоты для оболочек с радиусами $R = 2$, $R = 40$, толщинами $h = 1/50$, $h = 1/100$ и коэффициентом Пуассона $\sigma = 1/3$. При этом длины волн соответствующих колебаний определяются из условия существований стоячих волн по периметру направляющей окружности цилиндрической оболочки. В дальнейшем радиусы цилиндрических оболочек выбираются кратными первоначальному. Численный анализ показывает, что первые частоты являются частотами преимущественно изгибного типа колебаний. С увеличением радиуса цилиндрических оболочек первые собственные частоты увеличиваются и соответствующие формы колебаний затухают быстрее. При уменьшении толщины оболочки первые частоты уменьшаются и соответствующие формы колебаний затухают медленнее. Полученная асимптотическая формула служит хорошим ориентиром для нахождения собственной частоты рассматриваемой задачи.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассматриваются свободные колебания замкнутой полубесконечной круговой тонкой упругой цилиндрической оболочки, когда ее образующие ортогональны краю оболочки. Введем на срединной поверхности оболочки криволинейные координаты (α, β), где α $(0 \le \alpha < +\infty)$ и β $(0 \le \beta \le s)$ являются соответственно длиной образующей и длиной дуги направляющей окружности, s – полная длина окружности ([14], стр. 155).

В качестве исходных уравнений, возьмем уравнения, соответствующие теории Кирхгофа–Лява для цилиндрических оболочек [14–16]:

$$-\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha^2}-\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\beta^2}-\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\sigma}{R}\frac{\partial u_3}{\partial\alpha} = \lambda u_1$$

$$-\frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial\beta^2}-\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_3}{\partial\beta}-\frac{\mu^4}{R^2}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial\beta^2}+2(1-\sigma)\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha^2}\right)-$$

$$-\frac{\mu^4}{R}\left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial\beta^3}+(2-\sigma)\frac{\partial^3 u_3}{\partial\beta\partial\alpha^2}\right) = \lambda u_2 \tag{1.1}$$

$$\mu^4\Delta\Delta u_3+\frac{\mu^4}{R}\left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial\beta^3}+(2-\sigma)\frac{\partial^3 u_2}{\partial\beta\partial\alpha^2}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta}-\frac{\sigma}{R}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+\frac{u_3}{R^2} = \lambda u_3$$

Здесь u_1, u_2, u_3 – проекции вектора смещений, соответственно в направлениях α, β и нормали к поверхности оболочки, R – радиус направляющей окружности срединной поверхности, $\mu^4 = h^2/12$ (h – толщина оболочки), Δ – оператор Лапласа

$$\lambda = (1-\sigma^2)\omega^2\rho/E \tag{1.2}$$

где ρ – плотность, E – модуль Юнга, σ – коэффициент Пуассона, ω – угловая частота. Граничные условия определяются следующими выражениями:

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+\sigma\left(\frac{\partial u_2}{\partial\beta}-\frac{u_3}{R}\right)\right|_{\alpha=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial u_1}{\partial\beta}+\frac{4\mu^4}{R}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha}\right)\right|_{\alpha=0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_3}{\partial\alpha^2}+\sigma\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial\beta^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta}\right)\right|_{\alpha=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^3 u_3}{\partial\alpha^3}+(2-\sigma)\frac{\partial^3 u_3}{\partial\alpha\partial\beta^2}+\frac{2-\sigma}{R}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha\partial\beta}\right|_{\alpha=0} = 0 \tag{1.3}$$

$$u_i(\alpha,\beta) = u_i(\alpha,\beta+2\pi/k)(i=\overline{1,3}); \quad \sum_{j=1}^{3}|u_j|\big|_{\alpha=+\infty} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_3}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=+\infty} = 0 \tag{1.4}$$

где соотношения (1.3) являются условиями свободного края при $\alpha = 0$, а условия (1.4) являются условиями периодичности колебаний и условиями убывания возмущений при $\alpha \to +\infty$ соответственно. Предполагается, что $sk/(2\pi) = n_0$, $n_0 \in N$.

2. Математические и механические особенности задачи. Сформулированная граничная задача, фактически, является задачей на собственные значения в неограниченной области. Поэтому, вследствие излучения изгибными волнами энергии на бесконечность, можно ожидать существование комплекснозначного спектра задачи. Однако, поскольку мы интересуемся локализованными волновыми движениями, не связанными с переносом энергии на бесконечность, то при усиленной форме затухания как в (1.4), можно ожидать, что спектр задачи (1.1), (1.3), (1.4) будет действительным. Для детального анализа спектра рассматриваемой граничной задачи следует дополнительно ввести некоторые понятия. Для пары вектор-функций $f^{(j)}(\alpha, \beta) = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)})$ $(j = 1, 2)$ введем скалярное произведение по формуле

$$(f^{(1)}, f^{(2)}) = \int_0^{+\infty}\int_0^{s}\sum_{j=1}^{3} u_j^{(1)}\bar{u}_j^{(2)}d\beta d\alpha \tag{2.1}$$

Обозначим через L_μ оператор, соответствующий левой части системы уравнений (1.1), первоначально определенный на гладких вектор-функциях $f = (u_1, u_2, u_3)$, удовлетворяющих условиям (1.3), (1.4). Нетрудно проверить, что для таких вектор-функций выполняется соотношение

$$(L_\mu f^{(1)}, f^{(2)}) = (f^{(1)}, L_\mu f^{(2)}) \tag{2.2}$$

Более того, для любой функции $f = (u_1, u_2, u_3)$ удовлетворяющей условиям (1.3), (1.4) имеет место неравенство (см. [15], стр. 38):

$$(L_\mu f, f) \geq 0 \tag{2.3}$$

Из (2.3) следует, что с задачей на собственные значения (1.1), (1.3), (1.4) можно связать неотрицательно определенный самосопряженный оператор – расширение по Фридрихсу оператора L_μ (см. [16], а также [17], стр. 350) для которого сохраняем обозначение L_μ. Исходя из вышеуказанных свойств задачи (1.1), (1.3), (1.4) можно доказать следующее утверждение:

Оператор L_μ, при $\mu \neq 0$ имеет неотрицательный дискретный спектр с предельной точкой на $+\infty$ ([16], стр. 362).

3. Вывод и анализ характеристического уравнения. В первом, втором и третьем уравнениях системы (1.1), спектральный параметр λ формально заменим на λ_1, λ_2, λ_3 соответственно. Для последующих вычислений целесообразно систему уравнений (1.1) (с вышеуказанными изменениями) представить в виде [18]:

$$\begin{aligned}
\Gamma u_1 &= \frac{1}{R}\left\{\frac{\partial^3 u_3}{\partial\alpha^3} - \frac{\partial^3 u_3}{\partial\alpha\partial\beta^2} + \frac{2\lambda_2\sigma}{1-\sigma}\frac{\partial u_3}{\partial\alpha} + \frac{1+\sigma}{1-\sigma}\frac{\partial^2 G}{\partial\alpha\partial\beta}\right\}\\
\Gamma u_2 &= \frac{1}{R}\left\{\frac{\partial^3 u_3}{\partial\beta^3} + (2+\sigma)\frac{\partial^3 u_3}{\partial\alpha^2\partial\beta} + \frac{2\lambda_1}{1-\sigma}\frac{\partial u_3}{\partial\beta} - \frac{2}{1-\sigma}\frac{\partial^2 G}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial\beta^2} - \frac{2\lambda_1}{1-\sigma}G\right\}\\
\mu^4\Delta\Delta u_3 &+ \frac{\mu^4}{R}\left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial\beta^3} + (2-\sigma)\frac{\partial^3 u_2}{\partial\alpha^2\partial\beta}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta} - \frac{\sigma}{R}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha} + \frac{u_3}{R^2} = \lambda_3 u_3
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где G и оператор Γ, имеют вид

$$\begin{aligned}
G &= \mu^4\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\beta^2} + \frac{2(1-\sigma)}{R}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^3 u_3}{\partial\beta^3} + (2-\sigma)\frac{\partial^3 u_3}{\partial\beta\partial\alpha^2}\right)\\
\Gamma &= \Delta\Delta + \left(\lambda_1 + \frac{2}{1-\sigma}\lambda_2\right)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \left(\frac{2}{1-\sigma}\lambda_1 + \lambda_2\right)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \frac{2\lambda_1\lambda_2}{1-\sigma}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Пусть $R^{-1} = kr_0/2$, где k имеет размерность обратную длине, а r_0 – безразмерный параметр (см. п. 1.). Периодическое затухающее по α решение системы (3.1) ищем в виде

$$(u_1, u_2, u_3) = (u_{cm}\cos km\beta, \upsilon_{sm}\sin km\beta, \cos km\beta)\exp(k\chi\alpha) \tag{3.3}$$

Подставим (3.3) в (3.1). Из первых двух уравнений системы (3.1) получим

$$\begin{aligned}&\left(c_m + \frac{r_0^2}{4}a^2 g_m d_m\right)u_{cm} = \frac{r_0\chi}{2}\left\{a_m - a^2 m^2\frac{1+\sigma}{1-\sigma}l_m + \frac{r_0^2}{4}a^2\frac{\sigma}{1-\sigma}d_m\right\}\\&\left(c_m + \frac{r_0^2}{4}a^2 g_m d_m\right)\upsilon_{cm} = -\frac{r_0 m}{2}\{b_m - a^2 g_m l_m\}\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}c_m &= (\chi^2 - m^2)^2 + ((1-\sigma)/2\eta_1^2 + \eta_2^2)\chi^2 - (\eta_1^2 + (1-\sigma)/2\eta_2^2)m^2 + (1-\sigma)/2\eta_1^2\eta_2^2,\\ a_m &= \sigma\chi^2 + m^2 + \sigma\eta_2^2, \quad b_m = (2+\sigma)\chi^2 - m^2 + \eta_1^2\\ l_m &= (2-\sigma)\chi^2 - m^2, \quad d_m = 2(1-\sigma)\chi^2 - m^2, \quad a^2 = \mu^4 k^2\\ g_m &= 2/(1-\sigma)\chi^2 - m^2 + \eta_1^2, \quad \eta_1^2 = 2\lambda_1/((1-\sigma)k^2), \quad \eta_2^2 = 2\lambda_2/((1-\sigma)k^2)\end{aligned} \tag{3.5}$$

Из третьего уравнения системы (3.1), учитывая соотношения (3.4), (3.5) получим уравнение

$$\begin{aligned}&r_{mm}c_m + 0.25r_0^2\{c_m + m^2 b_m - \sigma\chi^2 a_m + a^2(r_{mm}g_m d_m - 2m^2 l_m b_m) +\\&+ 0.25r_0^2 a^2 d_m(b_m + \sigma\chi^2) + a^4 m^2 g_m l_m^2\} = 0\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$r_{mm} = a^2(\chi^2 - m^2)^2 - (1-\sigma)/2\eta_3^2, \quad \eta_3^2 = 2\lambda_3/((1-\sigma)k^2) \tag{3.7}$$

Уравнение (3.6) является многочленом четвертой степени относительно χ^2.

Пусть $\chi_j = G_j(a^2, r_0^2, \sigma, m, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$, $j = \overline{1,4}$ являются попарно различными нулями уравнений (3.6) с отрицательными действительными частями и $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)})$, $j = \overline{1,4}$ являются нетривиальными решениями вида (3.3) системы (3.1) при $\chi = \chi_j$, $j = \overline{1,4}$ соответственно. Представляя решение задачи (1.1), (1.3), (1.4) в виде $u_i = \sum_{j=1}^4 w_j u_i^{(j)}$, $i = \overline{1,3}$ и учитывая граничные условия (1.3), получим систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^{4}\frac{M_{ij}^{(m)}w_j}{c_m^{(j)} + 0.25a^2 r_0^2 g_m^{(j)} d_m^{(j)}} = 0 \quad (i = \overline{1,4}) \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}M_{1j}^{(m)} &= \chi_j^2 a_m^{(j)} - \sigma m^2 b_m^{(j)} - \sigma c_m^{(j)} + 0.25r_0^2 a^2\sigma d_m^{(j)}(m^2 - \eta_1^2) - a^2 m^2 l_m^{(j)}(\chi_j^2 + \sigma m^2 - \sigma\eta_1^2)\\ M_{2j}^{(m)} &= m\chi_j\left\{a_m^{(j)} + b_m^{(j)} + a^2\left(4c_m^{(j)} - \frac{l_m^{(j)}}{1-\sigma}(2\chi_j^2 + 2\sigma m^2 + (1-\sigma)\eta_1^2)\right) +\right.\\ &\left.+ a^2\frac{r_0^2}{4}\left(4b_m^{(j)} + \frac{2\sigma}{1-\sigma}d_m^{(j)} - 4a^2\sigma\chi_j^2 g_m^{(j)}\right)\right\}\\ M_{3j}^{(m)} &= (\chi_j^2 - \sigma m^2)c_m^{(j)} + 0.25r_0^2((1-\sigma)a^2\chi_j^2 g_m^{(j)}(2\chi_j^2 - (1+\sigma)m^2) - \sigma m^2 b_m^{(j)})\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$M_{4j}^{(m)} = \chi_j\{(\chi_j^2-(2-\sigma)m^2)c_m^{(j)}+$$
$$+0.25r_0^2((1-\sigma)a^2\chi_j^2g_m^{(j)}(2\chi_j^2-(1-\sigma)m^2)-(2-\sigma)m^2b_m^{(j)})$$

Здесь $a_m^{(j)}$, $b_m^{(j)}$, $c_m^{(j)}$, $l_m^{(j)}$, $d_m^{(j)}$, $g_m^{(j)}$ значения a_m, b_m, c_m, l_m, d_m, g_m из (3.4) при $\chi=\chi_j, j=\overline{1,4}$ соответственно. Чтобы система (3.8) имела нетривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathrm{Det}\left\|M_{ij}^{(m)}\right\|_{i,j=1}^4 = 0 \tag{3.10}$$

Численный анализ уравнения (3.10) показывает, что значение $\mathrm{Det}\left\|M_{ij}^{(m)}\right\|_{i,j=1}^4$ обнуляется или становится малым числом когда любые два χ – корня уравнения (3.6) являются кратными или близкими друг другу. Это сильно усложняет расчеты и может привести к появлению ложных решений. Оказывается, что множитель обнуляющий определитель можно выделить. Для этого введем обозначения:

$$\begin{gathered}
x_j = \chi_j/m \;\; (j=\overline{1,4}), \quad \eta_{im} = \eta_i/m \;\; (i=\overline{1,3}), \quad \varepsilon_m = r_0/(2m)\\
\sigma_1 = \sigma_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1+x_2+x_3+x_4, \quad \sigma_4 = \sigma_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2x_3x_4\\
\sigma_2 = \sigma_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4\\
\sigma_3 = \sigma_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_1x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4\\
\bar\sigma_k = \sigma_k(x_1,x_2,x_3,0), \quad \bar{\bar\sigma}_k = \sigma_k(x_1,x_2,0,0), \quad k=\overline{1,4}
\end{gathered} \tag{3.11}$$

Заметим, что $\bar\sigma_4 = \bar{\bar\sigma}_4 = \bar{\bar\sigma}_3 = 0$. Пусть f_n, $n=\overline{1,6}$ является n-й степени симметрическим многочленом от переменных x_1, x_2, x_3, x_4. Известно, что этот многочлен выражается через элементарные симметрические многочлены единственным образом [19]. Обозначим

$$f_n = f_n(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4), \quad \bar f_n = f_n(\bar\sigma_1,\bar\sigma_2,\bar\sigma_3,0), \quad \bar{\bar f}_n = f_n(\bar{\bar\sigma}_1,\bar{\bar\sigma}_2,0,0), \quad n=\overline{1,6} \tag{3.12}$$

Тогда имеем

$$\begin{gathered}
f_1 = \sigma_1, \quad f_2 = \sigma_1^2-\sigma_2, \quad f_3 = \sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2+\sigma_3, \quad f_4 = \sigma_1^4-3\sigma_1^2\sigma_2+\sigma_2^2+2\sigma_1\sigma_3-\sigma_4\\
\bar f_5 = \bar\sigma_1^5-4\bar\sigma_1^3\bar\sigma_2+3\bar\sigma_1\bar\sigma_2^2+3\bar\sigma_1^2\bar\sigma_3-2\bar\sigma_2\bar\sigma_3, \quad \bar{\bar f}_6 = \bar{\bar\sigma}_1^6-5\bar{\bar\sigma}_1^4\bar{\bar\sigma}_2+6\bar{\bar\sigma}_1^2\bar{\bar\sigma}_2^2-\bar{\bar\sigma}_2^3
\end{gathered} \tag{3.13}$$

Сделав элементарные действия над столбцами определителя (3.10), получим

$$\mathrm{Det}\left\|M_{ij}^{(m)}\right\|_{i,j=1}^4 = m^{21}K\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^4 \tag{3.14}$$

$$K = (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4)$$

$$m_{11} = -(2-\sigma)a^2m^2x_1^4+d_1x_1^2+d_2, \quad m_{12} = -(2-\sigma)a^2m^2\bar{\bar f}_3+d_1\bar{\bar f}_1$$

$$m_{13} = -(2-\sigma)a^2m^2\bar f_2+d_1, \quad m_{14} = -(2-\sigma)a^2m^2f_1$$

$$m_{21} = -\frac{2\sigma}{1-\sigma}a^2m^2\delta_mx_1^5+d_3x_1^3+d_4x_1, \quad m_{22} = -\frac{2\sigma}{1-\sigma}a^2m^2\delta_m\bar{\bar f}_4+d_3\bar{\bar f}_2+d_4$$

$$m_{23} = -\frac{2\sigma}{1-\sigma}a^2m^2\delta_m\bar{f}_3 + d_3\bar{f}_1, \quad m_{24} = -\frac{2\sigma}{1-\sigma}a^2m^2\delta_m f_2 + d_3$$

$$m_{31} = \delta_m x_1^6 + d_5 x_1^4 + d_6 x_1^2 + d_7, \quad m_{32} = \delta_m\bar{\bar{f}}_5 + d_5\bar{\bar{f}}_3 + d_6\bar{\bar{f}}_1$$

$$m_{33} = \delta_m\bar{f}_4 + d_5\bar{f}_2 + d_6, \quad m_{34} = \delta_m f_3 + d_5 f_1$$

$$m_{41} = \delta_m x_1^7 + d_8 x_1^5 + d_9 x_1^3 + d_{10}x_1, \quad m_{42} = \delta_m\bar{\bar{f}}_6 + d_8\bar{\bar{f}}_4 + d_9\bar{\bar{f}}_2 + d_{10}$$

$$m_{43} = \delta_m\bar{f}_5 + d_8\bar{f}_3 + d_9\bar{f}_1, \quad m_{44} = \delta_m f_4 + d_8 f_2 + d_9, \quad \delta_m = 1 + 4a^2m^2\varepsilon_m^2$$

$$d_1 = 1-\sigma^2 - 0.5\sigma(1-\sigma)\eta_{1m}^2 + 2a^2m^2\varepsilon_m^2\sigma(1-\sigma)(1-\eta_{1m}^2) + a^2m^2((1-\sigma)^2 + \sigma(2-\sigma)\eta_{1m}^2),$$

$$d_2 = \sigma(1-\eta_{1m}^2)(0.5(1-\sigma)\eta_{2m}^2 + a^2m^2(1-\varepsilon_m^2)) \tag{3.15}$$

$$d_3 = 2(1+\sigma)\delta_m + a^2m^2(4\eta_{2m}^2 - \sigma\eta_{1m}^2 - 2(3+\sigma)) + 4\sigma a^4m^4\varepsilon_m^2(1-\eta_{1m}^2)$$

$$d_4 = \eta_{1m}^2 + \sigma\eta_{2m}^2 + a^2m^2\left(\frac{4-2\sigma}{1-\sigma} - 3\eta_{1m}^2 - 2(1-\sigma)\eta_{2m}^2(1-\eta_{1m}^2)\right) -$$

$$-2a^2m^2\varepsilon_m^2\left(\frac{2-\sigma}{1-\sigma} - 2\eta_{1m}^2\right), \quad d_5 = 0.5(1-\sigma)\eta_{1m}^2 + \eta_{2m}^2 - 2 - \sigma - a^2m^2\varepsilon_m^2(4-2(1-\sigma)\eta_{1m}^2),$$

$$d_6 = 1 + 2\sigma - 0.5(1+\sigma)((2-\sigma)\eta_{1m}^2 + \eta_{2m}^2) + 0.5(1-\sigma)\eta_{1m}^2\eta_{2m}^2 +$$
$$+ a^2m^2\varepsilon_m^2(1-\sigma^2)(1-\eta_{1m}^2) - \sigma(2+\sigma)\varepsilon_m^2,$$

$$d_7 = \sigma(1-\eta_{1m}^2)(\varepsilon_m^2 - 1 + 0.5(1-\sigma)\eta_{2m}^2)$$

$$d_8 = 0.5(1-\sigma)\eta_{1m}^2 + \eta_{2m}^2 - 4 + \sigma - 2a^2m^2\varepsilon_m^2(1-\sigma)(2-\eta_{1m}^2)$$

$$d_9 = 5 - 2\sigma - 0.5(4 - 3\sigma + \sigma^2)\eta_{1m}^2 - 0.5(5-3\sigma)\eta_{2m}^2 + 0.5(1-\sigma)\eta_{1m}^2\eta_{2m}^2 +$$
$$+ a^2m^2\varepsilon_m^2(1-\sigma)^2(1-\eta_{1m}^2) - (4-\sigma^2)\varepsilon_m^2,$$

$$d_{10} = (2-\sigma)(1-\eta_{1m}^2)(\varepsilon_m^2 - 1 + 0.5(1-\sigma)\eta_{2m}^2)$$

Уравнение (3.10) эквивалентно уравнению

$$\operatorname{Det}\|m_{ij}\|_{i,\,j=1}^4 = 0 \tag{3.16}$$

Учитывая возможные соотношения между λ_1, λ_2 и λ_3, уравнение (3.16) определяет частоты соответствующих типов колебаний.

4. Асимптотика дисперсионного уравнения оператора L_μ при $r_0 \to 0$. Для исследования асимптотики дисперсионного уравнения оператора L_μ восстановим спектральный параметр λ. Приравняв все λ_i, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, получим

$$\eta_1^2 = \eta_2^2 = \eta_3^2 = \eta^2 = 2\lambda/((1-\sigma)k^2), \quad \eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_{3m} = \eta_m = \eta/m \tag{4.1}$$

При этом уравнение (3.6) становится характеристическим уравнением для системы (1.1) и при $r_0/2 = 1$ эквивалентно уравнению (4) из [13], а уравнение (3.16) становится дисперсионным уравнением для задачи (1.1), (1.3), (1.4) и является обобщением уравнения (7) из [13]. Отметим, что предельный переход $r_0 \to 0$ здесь понимается в том смысле, что фиксируя длину волн в цилиндрической оболочке радиуса R: $l = 2\pi/(km)$, переходим к цилиндрической оболочке радиуса R' кратному R: $R' = nR$, и к пределу $r_0' = r_0/n \to 0$ при $n \to \infty$. С учетом (4.1) при $r_0 \to 0$ уравнение (3.6) преобразуется к совокупности уравнений

$$c_m = 0 \quad \text{или} \quad r_{mm} = 0 \tag{4.2}$$

которые являются характеристическими уравнениями для уравнения планарных и изгибных колебаний полубесконечной пластинки соответственно $(\chi/m)^2$ – корни уравнения (4.2) имеют вид (см. [3, 5, 20]):

$$\begin{aligned}(\chi_1/m)^2 &= y_1^2 = 1-\eta_m^2, \quad (\chi_2/m)^2 = y_2^2 = 1-0.5(1-\sigma)\eta_m^2,\\ (\chi_3/m)^2 &= y_3^2 = 1+A\eta_m, \quad (\chi_4/m)^2 = y_4^2 = 1-A\eta_m, \quad A^2 = (1-\sigma)/(2a^2m^2)\end{aligned} \tag{4.3}$$

Разделим обе части уравнения (3.6) на a^2m^8, и запишем в следующем виде:

$$(x^2-y_1^2)(x^2-y_2^2)(x^2-y_3^2)(x^2-y_4^2)+\varepsilon_m^2P_m(x^2)+\varepsilon_m^4\bar{d}_m(\bar{b}_m+\sigma x^2) = 0 \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}P(x^2) &= 2(1-\sigma)^{-1}A^2[(x^2-y_1^2)(x^2-y_2^2)+\bar{b}_m-\sigma x^2\bar{a}_m+\\ &+a^4m^4\bar{g}_m\bar{l}_m^2+a^4m^4(x^2-y_3^2)(x^2-y_4^2)\bar{g}_m\bar{d}_m-2a^2m^2\bar{b}_m\bar{l}_m]\\ \bar{a}_m &= \sigma x^2+1+\sigma\eta_m^2, \quad \bar{b}_m = (2+\sigma)x^2-1+\eta_m^2, \quad \bar{l}_m = (2-\sigma)x^2-1\\ \bar{d}_m &= 2(1-\sigma)x^2-1, \quad \bar{g}_m = 2(1-\sigma)^{-1}x^2-1+\eta_m^2, \quad x = \chi/m\end{aligned} \tag{4.5}$$

Легко заметить, что при

$$\varepsilon_m \ll 1, \quad y_i \neq y_3, \quad i = 1, 2 \tag{4.6}$$

x^2 – корни уравнения (4.4) можно представить в виде

$$x_i^2 = y_i^2+\alpha_i^{(m)}\varepsilon_m^2+\beta_i^{(m)}\varepsilon_m^4+\ldots \quad (i = \overline{1,4}) \tag{4.7}$$

$$\alpha_i^m = P(y_i^2)/\left(\prod_{j=1,\, j\neq i}^{4}(y_j^2-y_i^2)\right) \quad (i = \overline{1,4}) \tag{4.8}$$

При $r_0 \to 0$, учитывая (4.7), (3.9) можно написать

$$\begin{aligned}M_{1j}/m^4 &= (1-\sigma^2-0.5\sigma(1-\sigma)\eta_m^2)y_j^2+0.5\sigma(1-\sigma)\eta_m^2(1-\eta_m^2)-a^2m^2[(3-\sigma+\\ &+0.5(2-\sigma)(3+\sigma)\eta_m^2)y_j^2-(1-\eta_m^2)(2-0.5(2-\sigma)(1-\sigma)\eta_m^2)]+O(\varepsilon_m^2) \quad (j = \overline{1,4})\\ M_{2j}/m^4 &= 2(1+\sigma)y_j^3+(1+\sigma)\eta_m^2y_j-a^2m^2[2(1-\sigma)^{-1}(3-\sigma^2-(2-\sigma)\eta_m^2)y_j^3-\\ &-((2-\sigma)(1-\eta_m^2)(1-0.5(1-\sigma)\eta_m^2)+2\sigma(1-\sigma)^{-1}+\eta_m^2)y_j]+O(\varepsilon_m^2) \quad (j = \overline{1,4})\\ M_{3j}/m^6 &= (y_j^2-\sigma)(y_j^2-y_1^2)(y_j^2-y_2^2)+O(\varepsilon_m^2) \quad (j = \overline{3,4}),\\ M_{4j}/m^7 &= y_j(y_j^2-2+\sigma)(y_j^2-y_1^2)(y_j^2-y_2^2)+O(\varepsilon_m^2) \quad (j = \overline{3,4}),\\ M_{31}/m^6 &= M_{32}/m^6 = M_{41}/m^7 = M_{42}/m^7+O(\varepsilon_m^2)\end{aligned} \tag{4.9}$$

Используя выражения (4.9) и соотношение (3.14), уравнение (3.16) можно привести к виду

$$\operatorname{Det}\|m_{ij}\|_{i,j=1}^{4} = N(\eta_m)\{K_1(\eta_m)K_2(\eta_m)K_3(\eta_m) + O(\varepsilon_m^2)\} = 0 \tag{4.10}$$

$$N(\eta_m) = (1+\sigma)y_1(y_3+y_1)(y_3+y_2)(y_4+y_1)(y_4+y_2)$$

$$K_1(\eta_m) = y_3^2y_4^2 + 2(1-\sigma)y_3y_4 - \sigma^2, \quad K_2(\eta_m) = y_1(2(1+\sigma)-\eta_m^2) - \eta_m^2y_2$$

$$K_3(\eta_m) = N_1(\eta_m) + a^2m^2N_2(\eta_m) + a^4m^4N_3(\eta_m), \quad N_1(\eta_m) = 0.5(1-\sigma)(2+\sigma\eta_m^2) \tag{4.11}$$

$$N_2(\eta_m) = 0.5\sigma(2-\sigma)\eta_m^4 + (3-3\sigma+\sigma^2)\eta_m^2 - 2(1-\sigma)$$

$$N_3(\eta_m) = (1-\sigma)^{-1}((2-\sigma)y_1^2-1)((2-\sigma)y_2^2-1)$$

Из (4.10) следует, что при $r_0 \to 0$ уравнение (3.16) распадается на уравнения

$$K_1(\eta_m) = y_3^2y_4^2 + 2(1-\sigma)y_3y_4 - \sigma^2 = 0 \tag{4.12}$$

$$K_2(\eta_m) = y_1(2(1+\sigma)-\eta_m^2) - \eta_m^2y_2 = 0 \tag{4.13}$$

$$\begin{gathered} K_3(\eta_m) = 0.5(2-\sigma)[(2-\sigma)a^4m^4 + \sigma a^2m^2]\eta_m^4 + [0.5\sigma(1-\sigma) + \\ + (3-3\sigma+\sigma^2)a^2m^2 - 0.5(2-\sigma)(3-\sigma)a^4m^4]\eta_m^2 + (1-\sigma)(1-a^2m^2)^2 = 0 \end{gathered} \tag{4.14}$$

Уравнения (4.12), (4.13) являются дисперсионными уравнениями изгибных и планарных волн аналогичной задачи для полубесконечной пластинки [3–9]. Заметим, что уравнение (4.13) эквивалентно дисперсионному уравнению Рэлея пленарного колебания пластин для аналогичной задачи [6–11]:

$$(2-\eta_m^2)^4 = 16(1-\eta_m^2)(1-0.5(1-\sigma)\eta_m^2) \tag{4.15}$$

Уравнение (4.14) является биквадратным уравнением относительно η_m и может иметь максимум два положительных корня. Поэтому, исходя из теоремы Руше, можно утверждать, что при малых ε_m уравнение (4.10) имеет не более четырех положительных η_m-корней, причем приближенными значениями этих корней являются корни уравнения (4.12)–(4.14). Уравнение (4.14) появляются из-за того, что используется система уравнений соответствующей теории Кирхгофа–Лява для динамического равновесия строго цилиндрических оболочек. При использовании системы уравнений соответствующей технической теории цилиндрических оболочек уравнение (4.14) не появляется [12], [20].

Обозначим η_m-корни уравнения (4.12)–(4.14) через $\eta_m^{(i)}$ ($i = \overline{1,3}$) соответственно. В табл. 1 приведены приближенные значения некоторых η_m-корней уравнения (4.12), (4.14) с параметрами $\sigma = 1/3$, $k = 1$, $h = 1/50$, $h = 1/100$.

Уравнение (4.13) имеет решение $\eta_m^{(2)} \approx 0.9194$. В табл. 2–5, используя дисперсионное уравнение (3.16), приведены некоторые безразмерные характеристики собственных значений η/m и характеристики коэффициентов затухания соответствующих форм $k\chi_0/m$ в зависимости от m, r_0, a, σ. В качестве коэффициентов затухания, приведены значения следующих величин

$$k\chi_0/m = \max\{k\mathrm{Re}\chi_1/m, k\mathrm{Re}\chi_2/m, k\mathrm{Re}\chi_3/m, k\mathrm{Re}\chi_4/m\} \tag{4.16}$$

Таблица 1

m	$h = 1/50, \sigma = 1/3, k = 1$					m	$h = 1/100, \sigma = 1/3, k = 1$				
	$\eta_m^{(1)}$	$\eta_m^{(3)}$	m	$\eta_m^{(1)}$	$\eta_m^{(3)}$		$\eta_m^{(1)}$	$\eta_m^{(3)}$	m	$\eta_m^{(1)}$	$\eta_m^{(3)}$
1	0.0099	–	9	0.0897	–	1	0.0050	–	9	0.0449	–
2	0.0199	–	90	0.8972	–	2	0.0100	–	180	0.8972	–
3	0.0299	–	95	0.9471	–	3	0.0149	–	190	0.9470	–
4	0.0399	–	100	0.9969	–	4	0.0199	–	200	0.9969	–
5	0.0498	–	180	1.7944	0.1721	5	0.0249	–	350	1.7446	0.0904
6	0.0598	–			0.2739	6	0.0299	–			0.1431
7	0.0698	–	190	1.8941	0.2600	7	0.0349	–	360	1.7944	0.1721
8	0.0797	–			0.4170	8	0.0399	–			0.2739

Таблица 2

m	$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$			$\eta_1 = \eta_2 = 0, \eta_3 = \eta$			$\eta_1 = \eta_2 = \eta, \eta_3 = 0$			$\eta_1 = \eta_3 = \eta, \eta_2 = 0$		
	$k\chi_0/m$		η/m	$k\chi_0/m$		η/m	$k\chi_0/m$		η/m	$k\chi_0/m$		η/m
1	–0.0100	*b*	0.0067	–0.0103	*b*	0.0075	–0.0090	*e*	0.0150	–0.0102	*b*	0.0075
2	–0.0257	*b*	0.0182	–0.0246	*b*	0.0187	–0.0326	*e*	0.0749	–0.0258	*b*	0.0187
3	–0.0359	*b*	0.0287	–0.0354	*b*	0.0291	–0.0620	*e*	0.1737	–0.0360	*b*	0.0291
4	–0.0440	*b*	0.0390	–0.0436	*b*	0.0393	–0.0876	*e*	0.3087	–0.0441	*b*	0.0393
5	–0.0491	*b*	0.0491	–0.0489	*b*	0.0494	–0.0979	*e*	0.4723	–0.0492	*b*	0.0494
6	–0.0520	*b*	0.0591	–0.0518	*b*	0.0594	–0.1139		0.6441	–0.0521	*b*	0.0594
	–		–	–		–	–0.0130		0.6535	–		–
7	–0.0535	*b*	0.0693	–0.0534	*b*	0.0694	–0.1798	*e*	0.7723	–0.0536	*b*	0.0694
90	–0.0577	*b*	0.8971	–0.0557	*b*	0.8972	–0.3935	*e*	0.9194	–0.0557	*b*	0.8972
95	–0.1794	*b*	0.9194	–		–	–0.3934	*e*	0.9194	–		–
	–0.0557	*b*	0.9470	–0.0557	*b*	0.9470	–		–	–0.0557	*b*	0.9470
100	–0.2840	*e*	0.9194	–		–	–0.3934	*e*	0.9194	–0.2394	lo	0.9428
	–0.0568	*b*	0.9968	–0.0557	*b*	0.9969	–		–	–0.0568	*b*	0.9969
180	–0.9509	*n*	0.1728	–		–	–0.9851	*n*	0.1728	–0.9835	*n*	0.0397
	–0.9210	*n*	0.2734	–		–	–0.9621	*n*	0.2734	–		–
	–0.3933	*e*	0.9194	–0.0557	*b*	1.7944	–0.3933	*e*	0.9194	–0.2606	lo	0.9428
190	–0.9291	*n*	0.2601	–		–	–0.9656	*n*	0.2601	–0.9624	*n*	0.0887
	–0.8836	*n*	0.4169	–		–	–0.9090	*n*	0.4169	–		–
	–0.3933	*e*	0.9194	–0.0557	*b*	1.8941	–0.3933	*e*	0.9194	–0.2606	lo	0.9428

В табл. 2–5 представлены характеристики коэффициентов затухания и собственные частоты для оболочек с параметрами $R = 2$, $r_0 = k = 1$, $h = 1/50$, $\sigma = 1/3$; $R = 40$, $r_0 = 1/20$, $k = 1$, $h = 1/50$, $\sigma = 1/3$; $R = 2$, $r_0 = k = 1$, $h = 1/100$, $\sigma = 1/3$; $R = 40$, $r_0 = 1/20$, $k = 1$, $h = 1/100$, $\sigma = 1/3$ соответственно.

Первые колонки соответствуют задаче (1.1), (1.3), (1.4), вторые колонки – преимущественно изгибному типу колебаний, третьи – преимущественно планарному типу, а чет-

Таблица 3

m	$\eta_1=\eta_2=\eta_3=\eta$			$\eta_1=\eta_2=0,\ \eta_3=\eta$			$\eta_1=\eta_2=\eta,\ \eta_3=0$			$\eta_1=\eta_3=\eta,\ \eta_2=0$		
	$k\chi_0/m$		η/m	$k\chi_0/m$		η/m	$k\chi_0/m$		η/m	$k\chi_0/m$		η/m
1	–0.0465	*b*	0.0100	–0.0465	*b*	0.0100	–0.0951	*e*	0.3877	–0.0465	*b*	0.0100
2	–0.0548	*b*	0.0199	–0.0548	*b*	0.0199	–0.3041	*e*	0.8721	–0.0548	*b*	0.0199
3	–0.0555	*b*	0.0299	–0.0555	*b*	0.0299	–0.4514	*e*	0.9110	–0.0555	*b*	0.0299
4	–0.0556	*b*	0.0399	–0.0556	*n*	0.0399	–0.4535	*e*	0.9168	–0.0556	*b*	0.0399
5	–0.0557	*b*	0.0498	–0.0557	*n*	0.0498	–0.4111	*e*	0.9183	–0.0557	*b*	0.0498
90	–0.0557	*b*	0.8972	–0.0557	*n*	0.8972	–0.3933	*e*	0.9194	–0.0557	*b*	0.8972
95	–0.1795	e	0.9194	–			–0.3933	*e*	0.9194	–0.0870	lo	0.9428
	–0.0557	*b*	0.9471	–0.0557	*b*	0.9471	–		–	–0.0557	*b*	0.9471
100	–0.2839	*e*	0.9194	–			–0.3933	*e*	0.9194	–0.2391	lo	0.9428
	–0.0557	*b*	0.9969	–0.0557	*b*	0.9969	–		–	–0.0557	*b*	0.9969
180	–0.9509	*n*	0.1721	–			–0.9851	*n*	0.1721	–0.9835	*n*	0.0397
	–0.9208	*n*	0.2739	–			–0.9618	*n*	0.2739	–		–
	–0.3933	*e*	0.9194	–0.0557	*b*	1.7944	–0.3933	*e*	0.9194	–0.2606	lo	0.9428
190	–0.9291	*n*	0.2599	–			–0.9656	*n*	0.2599	–0.9835	*n*	0.0397
	–0.8835	*n*	0.4170	–			–0.9089	*n*	0.4170	–		–
	–0.3933	*e*	0.9194	–0.0557	*b*	1.8941	–0.3933	*e*	0.9194	–0.2606	lo	0.9428

вертые – преимущественно осесимметричному типу. Численный анализ показывает, что при пренебрежении некоторыми компонентами инерционных сил существуют и другие типы колебаний. Отметим, что первые частоты собственных колебаний цилиндрических оболочек, где присутствуют инерционные силы изгибного типа, являются частотами колебаний преимущественно изгибного типа.

При достаточно больших m собственные колебания задачи (1.1), (1.3), (1.4) расчленяются на квазипоперечные и квазитангенциальные колебания. При дальнейшем увеличении m колебания квазипоперечного типа становятся незатухающими (в таблицах не приводятся), безразмерные характеристики η/m собственной частоты квазитангенциальных колебаний стремятся к корню уравнения Рэлея (4.13) ($\eta/m \approx 0.9194$) и появляются не более двух новых типов колебаний обусловленных продольными и крутильными компонентами силы инерции, характерные для цилиндрических оболочек. Отметим, что используя дисперсионное уравнение (3.16) при $\sigma = 0.3$, $h = 0.06$, $R = 1$, $k = 1$, $r_0 = 2$, получаются результаты вычислений приведенных таблице 1 из [13].

При колебаниях цилиндрических оболочек преимущественно тангенциального типа ($\eta_1 = \eta_2 = \eta$, $\eta_3 = 0$) в зависимости от r_0 и h, кроме планарного колебания рэлеевского типа могут появляться низкочастотные колебания и два новых типа колебаний обусловленных продольными и крутильными компонентами силы инерции (см. табл. 2, 4 и ср. [13]).

Осесимметричные колебания цилиндрических оболочек при достаточно больших m расчленяются на преимущественно продольные и преимущественно изгибные. При дальнейшем увеличении m колебания квазипоперечного типа становятся незатухающими (в таблицах не приводятся) и появляются колебания нового типа обусловленные продольными компонентами силы инерции. Заметим, что $\eta/m \approx 0.9428$ является безразмерной характеристикой собственных частот колебания преимущественно продольного типа аналогичной задачи для полубесконечной пластинки.

Таблица 4

m	$\eta_1=\eta_2=\eta_3=\eta$			$\eta_1=\eta_2=0,\ \eta_3=\eta$			$\eta_1=\eta_2=\eta,\ \eta_3=0$			$\eta_1=\eta_3=\eta,\ \eta_2=0$		
	$k\chi_0/m$		η/m	$k\chi_0/m$		η/m	$k\chi_0/m$		η/m	$k\chi_0/m$		η/m
1	–0.0056	*b*	0.0034	–0.0056	*b*	0.0037	–0.0051	*e*	0.0075	–0.0056	*b*	0.0037
2	–0.0224	*b*	0.0091	–0.0191	*b*	0.0094	–0.0185	*e*	0.0375	–0.0221	*b*	0.0094
3	–0.0265	*b*	0.0144	–0.0260	*b*	0.0146	–0.0367	*e*	0.0873	–0.0265	*b*	0.0146
4	–0.0340	*b*	0.0195	–0.0337	*b*	0.0197	–0.0574	*e*	0.1566	–0.0340	*b*	0.0197
5	–0.0404	*b*	0.0246	–0.0402	*b*	0.0247	–0.0774	*e*	0.2443	–0.0405	*b*	0.0247
6	–0.453	*b*	0.0296	–0.0452	*b*	0.0297	–0.0920	*e*	0.3486	–0.0454	*b*	0.0297
7	–0.0488	*b*	0.0346	–0.0487	*b*	0.0347	–0.0978		0.4660	–0.0488	*b*	0.0347
	–		–	–		–	–0.0110		0.4688	–		–
8	–0.0511	*b*	0.0397	–0.0510	*b*	0.0397	–0.1026		0.5892	–0.0511	*b*	0.0397
	–		–	–		–	–0.0207		0.5949	–		–
9	–0.0526	*b*	0.0447	–0.0525	*b*	0.0447	–0.1351	*e*	0.7003	–0.0526	*b*	0.0447
180	–0.0557	*b*	0.8972	–0.0557	*b*	0.8972	–0.3933	*e*	0.9194	–0.0557	*b*	0.8972
190	–0.1795	*e*	0.9194	–		–	–0.3933	*e*	0.9194	–0.0870	lo	0.9428
	–0.0557	*b*	0.9470	–0.0557	*b*	0.9470	–		–	–0.0557	*b*	0.9470
200	–0.2839	*e*	0.9194	–		–	–0.3933	*e*	0.9194	–0.2392	lo	0.9428
	–0.0557	*b*	0.9969	–0.0557	*b*	0.9969	–		–	–0.0557	*b*	0.9969
350	–0.9735	*n*	0.0916	–		–	–0.9959	*n*	0.0916	–0.9955	*n*	0.0111
	–0.9585	*n*	0.1423	–		–	–0.9900	*n*	0.1423	–		–
	–0.3933	*e*	0.9194	–0.0557	*b*	1.7446	–0.3933	*e*	0.9194	–0.2606	lo	0.9428
360	–0.9509	*n*	0.1723	–		–	–0.9851	*n*	0.1723	–0.9835	*n*	0.0397
	–0.9208	*n*	0.2737	–		–	–0.9618	*n*	0.2737	–		–
	–0.3933	*e*	0.9194	–0.0557	*b*	1.7944	–0.3933	*e*	0.9194	–0.2606	lo	0.9428

Существуют также колебания изгибно-крутильного типа ($\eta_1=0$, $\eta_2=\eta_3=\eta$). Однако по сравнению с преимущественно изгибными колебаниями преимущественно крутильные колебания подавлены при больших m.

Замечание. Чтобы различить типы колебаний, в таблицах между характеристиками коэффициентов затухания и собственными частотами, условимся отмечать буквой *b* – если преимущественно изгибной тип колебаний, *e* – преимущественно планарный тип колебаний, *n* – новый тип колебаний, lo – преимущественно продольный тип колебаний.

Заключение. В статье, исходя из системы уравнений динамического равновесия цилиндрических оболочек соответствующей теории Кирхгофа–Лява, получены дисперсионные уравнения для полубесконечной цилиндрической оболочки со свободным торцом. Приводится механизм для определения типа колебаний. Установлена асимптотическая связь между рассматриваемой задачей и аналогичной задачей для полубесконечной пластинки. Доказано, что в замкнутой полубесконечной оболочке, кроме квазипоперечного и квазитангенциального типа колебаний, существуют еще новые типы колебаний обусловленные продольными и крутильными компонентами силы инерции. Численный анализ показывает, что первые частоты являются частотами колебаний изгибного типа. При увеличении радиуса цилиндрических оболочек (сохраняя длину волн постоянной) первые частоты увеличиваются и соответствующие формы колебаний за-

Таблица 5

m	$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$			$\eta_1 = \eta_2 = 0, \eta_3 = \eta$			$\eta_1 = \eta_2 = \eta, \eta_3 = 0$			$\eta_1 = \eta_3 = \eta, \eta_2 = 0$		
	$k\chi_0/m$		η/m	$k\chi_0/m$		η/m	$k\chi_0/m$		η/m	$k\chi_0/m$		η/m
1	−0.0370	*b*	0.0050	−0.0370	*b*	0.0050	−0.0676	*e*	0.1981	−0.0370	*b*	0.0050
2	−0.0525	*b*	0.0100	−0.0525	*b*	0.0100	−0.1332	*e*	0.6965	−0.0525	*b*	0.0100
3	−0.0550	*b*	0.0149	−0.0550	*b*	0.0149	−0.3301	*e*	0.8829	−0.0550	*b*	0.0150
4	−0.0554	*b*	0.0199	−0.0554	*b*	0.0199	−0.4343	*e*	0.9086	−0.0554	*b*	0.0199
5	−0.0556	*b*	0.0249	−0.0556	*b*	0.0249	−0.4927	*e*	0.9151	−0.0556	*b*	0.0249
180	−0.0557	*b*	0.8972	−0.0557	*b*	0.8972	−0.3933	*e*	0.9194	−0.0557	*b*	0.8972
190	−0.1795	*e*	0.9194	–		–	−0.3933	*e*	0.9194	−0.0870	lo	0.9428
	−0.0557	*b*	0.9470	−0.0557	*b*	0.9470	–		–	−0.0557	*b*	0.9470
200	−0.2839	*e*	0.9194	–		–	−0.3933	*e*	0.9194	−0.2392	lo	0.9428
	−0.0557	*b*	0.9969	−0.0557	*b*	0.9969	–		–	−0.0557	*b*	0.9969
350	−0.9738	*n*	0.0904	–		–	−0.9959	*n*	0.0903	−0.9955	*n*	0.0111
	−0.9582	*n*	0.1431	–		–	−0.9897	*n*	0.1431	–		–
	−0.3933	*e*	0.9194	−0.0557	*b*	1.7446	−0.3933	*e*	0.9194	−0.2606	lo	0.9428
360	−0.9509	*n*	0.1721	–		–	−0.9851	*n*	0.1721	−0.9835	*n*	0.0397
	−0.9208	*n*	0.2739	–		–	−0.9618	*n*	0.2739	–		–
	−0.3933	*e*	0.9194	−0.0557	*b*	1.7944	−0.3933	*e*	0.9194	−0.2606	*lo*	0.9428

тухают быстрее. При уменьшении толщины оболочки первые частоты уменьшаются и соответствующие формы колебаний затухают медленнее. Процесс затухания зависит от типа колебаний. Колебания квазипоперечного типа затухают медленнее чем колебания квазитангенциального типа. При $r_0/m \to 0$ собственные частоты колебаний квазипоперечных, квазитангенциальных и продольных типов полубесконечной цилиндрической оболочки стремятся к соответствующими частотам аналогичной задачи для полубесконечной пластинки.

Автор выражает благодарность С.А. Амбарцумяну и В.Б. Лидскому за обсуждения научных результатов и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rayleigh J.W.* On waves propogated along the plane surface of an elastic solid // Proc. London Math. Soc. 1885. 17. № 253. P. 4–11.
2. *Ишлинский А.Ю.* Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 3. С. 477–479.
3. *Коненков Ю.К.* Об изгибной волне "рэлеевского" типа // Акуст. ж. 1960. Т. 6. Вып. 1. С. 124–126.
4. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
5. *Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.* К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки // Прикл. механика. 1994. Т. 30. № 2. С. 61–68.
6. *Белубекян М.В., Енгибарян И.А.* Волны, локализованные вдоль свободной кромки пластинки с кубической симметрией // Изв. РАН МТТ. 1996. № 6. С. 139–143.
7. *Багдасарян Р.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б.* Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке // Волновые задачи механики. Н. Новгород. 1992. С. 87–93.

8. *Гулгазарян Г.Р., Казарян К.Б.* Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой некруговой цилиндрической оболочке // Изв. НАН Армении. Механика. 1997. Т. 50. № 1. С. 27–33.
9. *Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г.* Колебания, локализованные у свободного края полубесконечной незамкнутой безмоментной цилиндрической оболочки // Акуст. Вiсник. 1999. Т. 2. № 4. С. 42–48.
10. *Гулгазарян Г.Р.* Волны типа Рэлея в полубесконечной ортотропной гофрированной безмоментной цилиндрической оболочке // Математический анализ и его приложения. Ереван, 2000. Вып. 1. С. 74–88.
11. *Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г.* Волны типа Рэлея в полубесконечной гофрированной цилиндрической оболочке // Изв. РАН МТТ. 2001. № 3. С. 151–158.
12. *Гулгазарян Г.Р.* Волны, локализованные у свабодного края полубесконечной гофрированной цилиндрической оболочки // Математический анализ и его приложения. Ереван, 2000. Вып. 1. С. 14–37.
13. *Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Wilde M.V.* Free localajzed vibrations of a semi-infinite cylindrical shell // J. Acoust. Soc. America 2000. V. 107. № 3. P. 1383–1393.
14. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
15. *Асланян А.Г., Лидский В.Б.* Распределение собственных частот тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1974. 156 с.
16. *Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
17. *Рисс Ф., Секефальви – Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587 с.
18. *Гулгазяран Г.Р.* Приближенные частоты собственных колебаний некруговой цилиндрической оболочки // Изв. НАН Армении. Механика. 1996. Т. 49. № 1. С. 61–70.
19. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968. 431 с.
20. *Гулгазарян Г.Р.* Волны, локализованные у свободного торца круговой замкнутой цилиндрической оболочки с малой кривизной // Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т. 53. № 2. С. 22–29.

Ереван

Поступила в редакцию
27.08.2001

Зав. редакцией *В.М. Кутырева*

Сдано в набор 27.11.2002 Подписано к печати 27.01.2003 Формат бумаги $70 \times 100^1/_{16}$
Офсетная печать Усл.печ.л. 15,6 Усл.кр.-отт. 5,0 тыс. Уч.-изд.л. 18,6 Бум.л. 6,0
Тираж 319 экз. Зак. 6909

Свидетельство о регистрации № 0110261 от 08.02.93 г.
в Министерстве печати и информации Российской Федерации
Учредители: Российская академия наук,
Общество с ограниченной ответственностью "Журналы по механике"

Адрес издателя: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 90
Адрес редакции: 117526, Москва, проспект Вернадского, д. 101. Тел. 434-35-38
Отпечатано в ППП "Типография "Наука", 121099, Москва, Шубинский пер., 6