

УДК 539.3:534.1

© 2003 г. А.В. СИБИРЯКОВ

ИМПУЛЬСНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

В настоящее время в соответствии с требованиями практики большое внимание уделяется динамической прочности конструкций и, в частности, реакции упругих систем на действие внешних импульсных воздействий. Решение этих задач позволяет оценить напряженно-деформированное состояние конструкций при ударных нагрузках, что необходимо при выборе и рационализации конструктивно-силовой компоновки машин и аппаратов, работающих в условиях интенсивных динамических воздействий.

Решение этой сложной многоплановой задачи предъясвляет повышенные требования и к методам расчета на прочность с тем, чтобы применяемые расчетные схемы более полно и всесторонне описывали моделируемые реальные процессы.

Во многих публикуемых работах отмечается, что реакция элементов конструкции на внешние импульсные воздействия изучена в недостаточной мере, особенно, как отмечается в обзорах, посвященных состоянию работ в данной области, это относится к деталям, имеющим сложную структуру, таким, в частности, за расчетные схемы которых можно принять неоднородные пластинки и оболочки, моделирующие конструкции, выполненные из композиционных материалов. Однако сама проблема оказывается настолько сложной и разноплановой, что о полном ее решении говорить не приходится.

При решении отмеченных задач весьма распространены численные методы, среди них, по-видимому, наиболее применяемым и общим является метод конечных элементов, но его использование требует создания специальных моделей неоднородных сред и более тонких расчетов, учитывающих появление большого количества волн, что из-за громоздкости осуществить весьма сложно.

Особенно важным для приложений, но и наиболее сложным, является изучение начального, неустановившегося этапа распространения возмущения внутри элементов конструкции. Имеющиеся, весьма немногочисленные, экспериментальные данные показывают, что разрушение деталей из композиционных материалов наступает именно на этом этапе и связано с расслоением (иногда это явление используется и для отделения дефектной части монолитных структур).

Таким образом, учитывая еще и широкий класс конструкций, испытывающих ударные воздействия, следует отметить актуальность изучения нестационарного импульсного нагружения элементов конструкций и их динамической реакции.

Конечной целью, по-видимому, должно стать создание теории расчета элементов конструкций на нестационарное воздействие. В первую очередь это относится к тонкостенным несущим элементам – пластинам и оболочкам, но до решения этой глобальной проблемы еще очень далеко.

Особенно важно создание подобной теории для композиционных элементов конструкций, что связано со спецификой их структуры, с невысокой поперечной прочностью. Создание этой теории, видимо, должно стать обобщением исследований напряженно-деформированных состояний отдельных, конкретных элементов. Поэтому очень важно выявить общие закономерности и особенности подобных явлений, которые должны быть учтены при построении расчетных схем импульсно нагруженных элементов конструкций.

За модель композиционного материала принята упругая среда, составленная из ортотропных слоев с неизменной в пределах слоя толщиной. В [1] указывается на экспериментально установленную упругость свойств конструкционных композитов вплоть до разрушения. Поэтому при постановке задач применялись волновые уравнения теории упругости. Проведенное сравнение примененных методов расчета с опубликованными в литературе результатами экспериментов показывает хорошее совпадение. Многими авторами отмечается сложность и высокая стоимость экспериментов, что делает развитие методов расчета еще более ценным.

Известно, что при импульсном нагружении в элементах конструкции появляются волны напряжений, переносящих внешнее воздействие. Всякая неоднородность внутри тела, например граница раздела слоев, является преградой, на которой волны напряжений делятся на прошедшие и отраженные, их амплитуды зависят от соотношений механических характеристик смежных слоев. Волна любого типа – расширения или сдвига (вращения) – порождает при этом отраженные и прошедшие волны всех типов. Таким образом, при встрече со всякой неоднородностью количество волн в теле существенно увеличивается. Эти волны взаимодействуют и способны усиливая друг друга создать значительные по величине растягивающие напряжения, что и приводит к наиболее характерной для динамически нагруженных деталей форме разрушения – расслоению или отколу. При описании этого явления приходится учитывать все появившиеся волны, что существенно усложняет задачу. Из литературных источников следует, что при постановке подобных задач, как правило, проводятся различные осреднения реальной структуры материала и даже замена его однородным, что существенно искажает волновую картину, но упрощает задачу и даже иногда позволяет применить хорошо развитый аппарат статической классической теории пластин и оболочек, хотя некоторые осреднения, как отмечается в [2], все же неизбежны. В первую очередь при проверке откольной прочности следует обращать внимание на нормальные поперечные напряжения. Поскольку расслоение наступает практически сразу за приложением импульса давления, в нестационарной задаче затуханием можно пренебречь, что и сделано в подавляющем большинстве опубликованных работ.

Для построения прикладных теорий, учитывая отмеченную сложность и стоимость эксперимента, используя хорошее совпадение его с результатами решений волновых задач, сначала в точной постановке теории упругости решается задача о поперечном импульсном нагружении одних из наиболее распространенных несущих элементов конструкций – композиционных пластин, пологих и цилиндрических оболочек. Решение проводится стандартно, с использованием интегрального преобразования Лапласа–Карсона по времени и разложения в ряды Фурье, удовлетворяющие граничным условиям на боковых сторонах. В пространстве изображений получены выражения, определяющие напряжения и перемещения любой точки рассматриваемого элемента. При их записи используется единая весьма компактная система, позволяющая учесть любое (конечное) число слоев. При переходе в пространство оригиналов можно использовать различные методы (при необходимости даже численные и приближенные), например, полученные изображения представляют линейной комбинацией экспонент, коэффициентами при которых являются ряды Лорана, построенные в окрестности бесконечно удаленной точки. Таким образом, обращение каждого члена последовательности можно провести, воспользовавшись первой теоремой Хевисайда и теоремой о произведении изображений. Применение разложения в ряды для обращения в данном случае является наиболее удобным способом, так как, во-первых, при исследовании реальных процессов, как правило, достаточно ограничиться несколькими первыми членами рядов, причем обращение можно провести с любой точностью, во-вторых, даже в частных случаях степенные ряды являются наиболее удобной формой записи получаемых оригиналов. Оригиналы представляют собой свертки в смысле Лапласа–Карсона функций, определяющих

внешнее воздействие и полиномов. Каждый член оригинала можно трактовать как элементарную волну, имеющую определенную амплитуду, скорость распространения и определенное время возникновения. В отличие от решений одномерных задач эти волны не повторяют полностью форму внешнего импульса, в частности, даже при конечном по времени внешнем воздействии, элементарные волны не имеют заднего фронта и существуют, вообще говоря, бесконечно долго. Следует отметить, что у всех волн напряжений, имеющих скорости только волн расширения амплитуды такого последствия оказываются весьма малыми. Необходимо указать, что отмеченное разделение оригинала на элементарные волны является всего лишь удобной физической интерпретацией. Реально оригиналы представляются суперпозицией волн, появившихся к данному моменту времени.

При обращении возможно и непосредственное вычисление интеграла Бромвича с использованием леммы Жордана. Однако, этот путь, как было проверено при непосредственных вычислениях, практически не уточняет результата, но требует значительно большего времени для расчета.

Поскольку, как уже отмечалось, главной формой разрушения импульсно нагруженных элементов конструкций является расслоение, то основное внимание следует уделить точности расчета нормальных поперечных напряжений. Отмеченное время появления расслоений и сколов позволяет несколько упростить расчетные формулы. Важно исследовать именно начальную неустановившуюся стадию распространения нагружения. Используя теорему операционного исчисления о начальном значении, удастся доказать, что при малом времени формулы, описывающие нормальные поперечные напряжения и перемещения совпадают со стержневыми, точнее с формулами, описывающими напряжения и перемещения в бесконечном равномерно нагруженном слое, имеющем ту же поперечную структуру.

Так для пространства изображений, поперечные напряжения для i -го слоя при импульсе внешнего давления $F(x, y, p)$ в начале распространения записываются так:

$$\begin{aligned} \sigma_x^i(x, y, z, p) = & F(x, y, p) 2^{n-i} c_{i,n} \sum_{\eta_1 \dots \eta_i} \eta_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 + \eta_{j+1} \eta_j c_{j,j+1}) \times \\ & \times \exp \left[\sum_{j=1}^{i-1} \eta_j \lambda_j h_j + \eta_i \lambda_i (z - z_{i-1}) \right] / \left\{ \sum_{\eta_1 \dots \eta_n} \eta_n \prod_{j=1}^{n-1} (1 + \eta_{j+1} \eta_j c_{j,j+1}) \exp \sum_{j=1}^n \eta_j \lambda_j h_j \right\}, \\ \lambda_j = & p \sqrt{\frac{\rho_j}{C_{33}^j}}, \quad c_{i,j} = \sqrt{\frac{C_{33}^i \rho_i}{C_{33}^j \rho_j}}. \end{aligned}$$

Здесь n – число слоев, x_i – координата верхней границы i -го слоя, $x_0 = 0$, C_{33}^i , ρ_i – механические характеристики материала i -го слоя.

Суммирование ведется по независимым переменным η_j , принимающим по два значения ± 1 . Эта асимптотика является единой для всех рассматриваемых объектов.

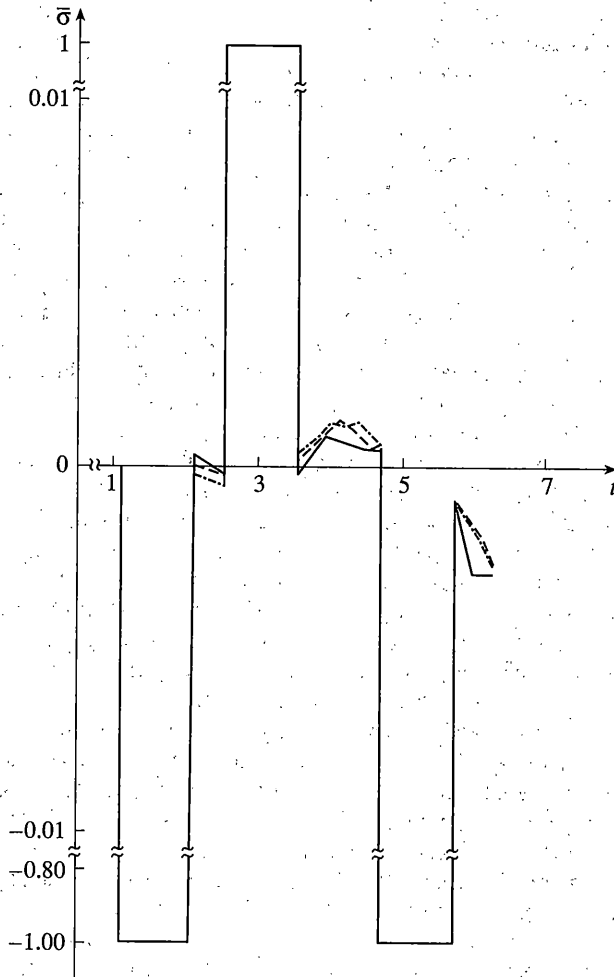
Среди общих закономерностей следует также отметить, что другие нормальные напряжения появляются только из-за эффекта Пуассона, а касательные напряжения оказываются пренебрежимо (несмотря на низкое сопротивление композитов сдвигу) малы. Приведенная формула имеет и самостоятельное значение. Она достаточно проста для ведения проектировочных расчетов. Из нее следует, что изменение механических характеристик даже одного слоя, а тем более замена материала однородным исказит всю волновую картину. Кроме того, она показывает, что все упомянутые ряды Лорана имеют нулевые главные части.

Построенные решения используются далее для контроля правильности построения прикладных теорий расчета. Так в прикладных теориях структура детали и поперечные эффекты должны описываться, по возможности, точно. В классических теориях оболочек не учитываются вообще или учитываются слабо эффекты, связанные с толщиной. Это же делается и при решении многих задач, изучающих реакцию на динамическое и даже ударное нагружение. В данных задачах такой учет необходим. Поэтому при построении прикладных теорий за основу может быть принята классическая теория пластин и оболочек, основанная на гипотезе Кирхгофа–Лява. Она распространена на слоистую среду и дополнена точным учетом поперечного обжатия. Построение теории основано на методе, предложенной в [3]. Классические уравнения с учетом введенных гипотез, последовательно интегрируются (это относится к уравнениям Коши и уравнениям равновесия) и приводятся к интегро-дифференциальным, что сразу выделяет значения функций на координатной поверхности и этим облегчает постановку граничных условий на лицевых сторонах оболочки. При описании неоднородного материала используется аппарат обобщенных функций, что существенно упрощает построение системы разрешающих уравнений и не требует удовлетворения межслоевых условий, которые, как можно показать, содержатся в полученных уравнениях. Построенная система разрешающих уравнений менее громоздка, чем точная и определяет все искомые функции. При расчете конкретных конструкций ее следует дополнить граничными условиями на боковых сторонах пластины, а также начальными условиями.

Методы операционного исчисления являются, видимо, наиболее эффективным математическим аппаратом при решении основных интегро-дифференциальных уравнений с разрывными подынтегральными функциями, общее уравнение теории может быть сразу записано в пространстве изображений по координате z .

Для удобства решения трансформанты могут быть разделены на систему последовательно решаемых равенств, определяющих неизвестные в пределах отдельных слоев. Конечный результат доказывается методом математической индукции. Обращение по поперечной координате проводится аналитически с использованием известных теорем операционного исчисления. Переход к оригиналу по времени проводится описанным выше методом. В процессе решения получены известные формулы, определяющие скорости распространения волн. Все перемещения, а с ними и напряжения переносятся волнами трех типов, отличающихся, прежде всего, скоростями распространения. В векторах перемещений и в величинах напряжений эти части можно выделить, но разделить волновой процесс в целом на три составляющие не удастся. Так волны, отраженная от границы раздела слоев, также как и прошедшая через границу, вызванные падающей волной любого типа, будут иметь составляющие всех трех типов. Прозрачность границы раздела слоев также меняется со временем, а равенство характеристических импедансов смежных слоев является лишь необходимым условием полной прозрачности границы.

Построенная теория позволяет достаточно точно определять нормальные напряжения и перемещения, касательные напряжения, как и в классической теории оболочек, определяются по уравнениям равновесия. Все напряжения и перемещения имеют ярко выраженный волновой характер, что соответствует постановке задачи. Однако полученные уравнения все же достаточно сложны и предполагают избавление от производных по координатам, лежащим в поверхности приведения, до исследования распространения импульса по толщине слоистого пакета. Это существенно ограничивает круг решаемых задач. Определенные упрощения могут быть получены при исследовании откольной прочности. Здесь достаточно рассмотреть первые моменты нагружения. В этом случае нормальные напряжения можно определять независимо от граничных условий на боковой поверхности оболочки и решение это совпадает с точным, полученным по уравнениям теории упругости.

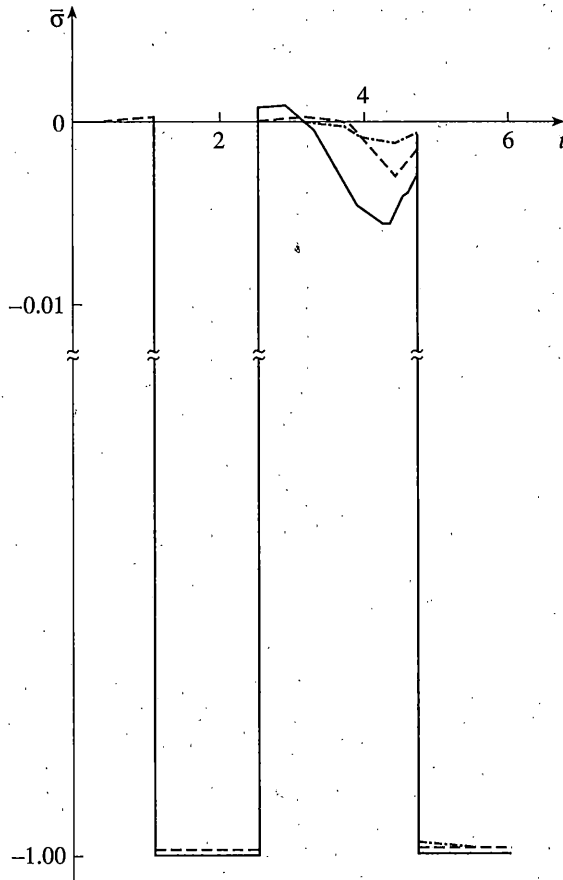


Фиг. 1

Несмотря на несомненное упрощение расчетных формул практически без потери точности по сравнению с четырехмерным решением, построенная теория не лишена и известных недостатков. Так при обращении интегрального преобразования по поперечной координате необходимо вводить граничные условия на боковых сторонах пластины.

Можно предложить прикладную теорию расчета композиционных пластин и оболочек, позволяющую несколько расширить круг решаемых задач, приблизив его к областям, решаемым в статической или стационарной динамической теории. Рассматриваются те же объекты, к принятой гипотезе Кирхгофа-Лява, дополненной точным учетом сжимаемости нормали, добавим еще одну, принятую в статических теориях. Будем считать, что поперечная нормальная деформация слабо влияет на напряженно-деформированное состояние в поверхности приведения оболочки, сказанное ранее позволяет сделать это, обратное же влияние может быть учтено.

При построении теории используются те же методы. Явное получение функций, описывающих напряжения и перемещения на поверхности приведения позволяет, вообще говоря, решать широкий класс задач. Удастся в общем виде построить все функции, оп-



Фиг. 2

ределяющие перемещения и напряжения в пределах каждого слоя и удовлетворить граничным условиям на лицевых поверхностях оболочки. Остается уточнить эти соотношения учетом реальных граничных условий на боковых сторонах оболочки при решении конкретных задач, а также учесть начальные условия.

Структура изображений (в первую очередь нормальных поперечных напряжений) получается существенно проще, чем при решении по первому варианту прикладной теории. Обращение проводится по ранее отмеченной схеме (могут быть использованы и упомянутые приближенные методы).

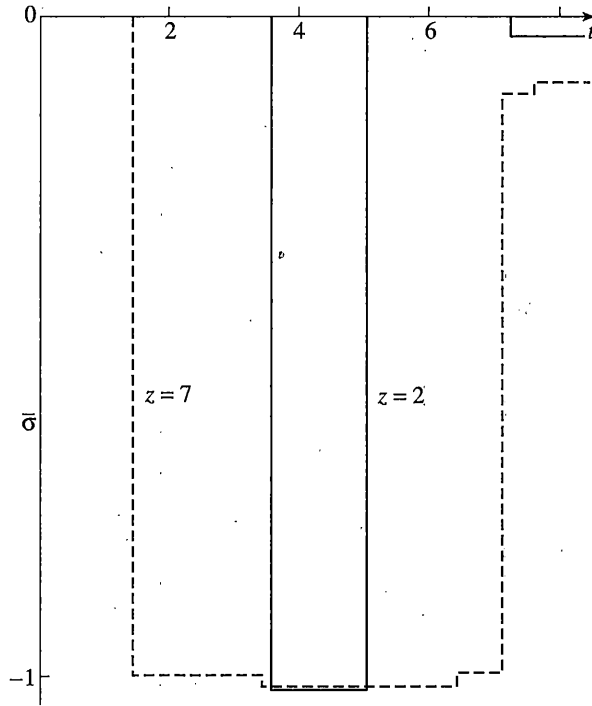
Асимптотика решения совпадает с точной. Для каждой из построенных теорий, для каждого объекта приводились численные расчеты. В них при разных длительностях внешнего воздействия и при различных сочетаниях материалов пластин и оболочек сравнивались точная и предлагаемые прикладные теории.

Численно проверялось, что эффект Пуассона практически не влияет на точность определения поперечных эффектов, на это, в частности, указывает асимптотика решений.

Следует отметить, что, как и предполагалось в [4], при ненулевой гауссовой кривизне появляется некоторое “конструктивное” затухание.

В качестве иллюстрации приведем расчет шарнирно опертой пластины. Внешнее воздействие (импульс давления) принимался в виде

$$F(x, y, t) = A[\Theta(t - 0) - \Theta(t - T)][\Theta(x - a/8) - \Theta(x + a/8)] \sin(\pi y/b)$$



Фиг. 3

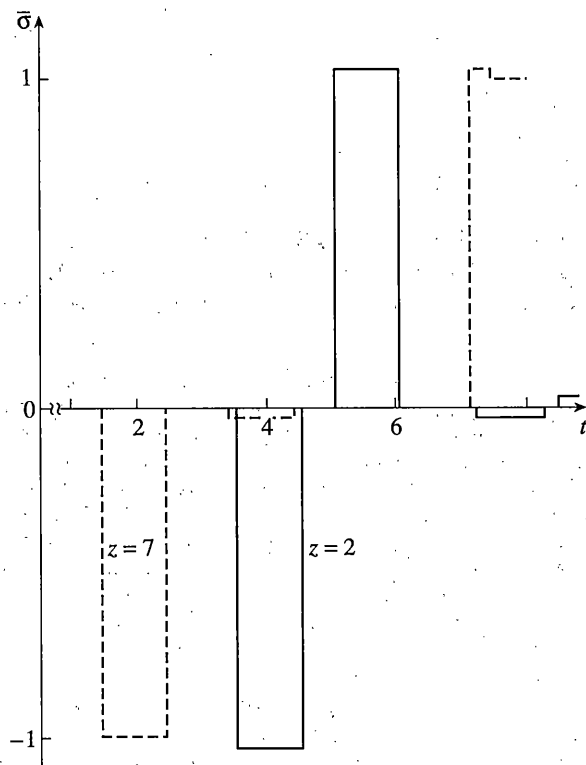
где $\Theta_i \equiv \Theta_i(x - x_i)$ ($i = 1, \dots, n - 1$) – единичная функция Хевисайда, A – амплитуда внешнего воздействия.

Расчеты проводились для двух длительностей импульса: $T = 10^{-6}$ с (с четким окончанием воздействия) и $T \rightarrow \infty$, охватывающих основной интервал динамических нагрузок.

Сравним расчеты по прикладным теориям с точным решением. Определим напряженно-деформированное состояние, необходимое для проверки откольной прочности, квадратной пластины размерами $a = 250$ мм, $b = 250$ мм, $h = 5$ мм, сделанной из органоэластика со следующими механическими характеристиками: $C_{11} = 150$ ГПа, $C_{12} = 3.36$ ГПа, $C_{13} = 3.36$ ГПа, $C_{22} = 12$ ГПа, $C_{23} = 2.21$ ГПа, $C_{33} = 12$ ГПа, $C_{44} = 5.50$ ГПа, $C_{55} = 6$ ГПа, $C_{66} = 5.70$ ГПа, $\rho = 1.6 \cdot 10^3$ кг/м³, $z = 2$ мм.

Результаты расчетов поперечных напряжений в центре пластины представлены на фиг. 1 ($T = 10^{-6}$ с) и фиг. 2 ($T \rightarrow \infty$). По оси абсцисс откладывалось время t [мкс], по оси ординат – напряжения, $\bar{\sigma} = \sigma/A$ отнесенные к модулю максимальной амплитуды внешнего воздействия. Сплошной линией показано точное решение, штриховой и штрих-пунктирной, соответственно, расчеты по первой и второй прикладным теориям. Как и следовало ожидать, короткий импульс внешнего воздействия оказывается более опасным.

На фиг. 3, 4 представлены результаты расчета поперечных нормальных напряжений и перемещений, возникающих в двухслойной квадратной (600×600 мм) пластине при действии длинного ($T \rightarrow \infty$) и короткого ($T = 10^{-6}$ с) импульсов. Первый (нижний) слой пластины – однонаправленный органоэластик с характеристиками: $C_{11}^1 = 150$ ГПа, $C_{12}^1 = 3.36$ ГПа, $C_{22}^1 = 12$ ГПа, $C_{13}^1 = 3.36$ ГПа, $C_{23}^1 = 2.26$ ГПа, $C_{33}^1 = 12$ ГПа, $C_{44}^1 = 4.40$ ГПа, $\rho_1 = 1.6 \cdot 10^3$ кг/м³, $h_1 = 5$ мм.



Фиг. 4

Второй слой – стеклопластик: $C_{11}^2 = 65$ ГПа, $C_{12}^2 = 2.21$ ГПа, $C_{22}^2 = 8.5$ ГПа, $C_{13}^2 = 2.21$ ГПа, $C_{23}^2 = 1.35$ ГПа, $C_{33}^2 = 8.5$ ГПа, $C_{44}^2 = 4.20$ ГПа, $\rho_2 = 2.0 \cdot 10^3$ кг/м³, $h_2 = 10$ мм.

Из-за большого удельного веса стеклопластика волновые сопротивления слоев близки и, следовательно, отличие амплитуд падающей на границу слоев и прошедшей в следующий слой волн невелико.

При длинном импульсе в обоих слоях возникают только сжимающие напряжения. Верхний слой сжат в течение всего рассматриваемого промежутка времени из-за задержки волн в нижнем слое. Характер изменения напряжений в нижнем слое практически не отличается от представленного на фиг. 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Композиционные материалы (справочник). Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
2. Болотин В.В., Гришко А.А. Численное моделирование разрушения слоистых композитов при ударных воздействиях. Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 151–160.
3. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 271 с.
4. Томас Т. Пластическое течение и разрушение твердых тел. М.: Мир, 1964. 479 с.