МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2003

УДК 624.072.21

© 2003 г. И.С. АСТАПОВ, Н.С. АСТАПОВ, Е.Л. ВАСИЛЬЕВА

КВАДРАТИЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ГИБКОГО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

На конкретных примерах приближения эллиптических интегралов рассмотрен способ квадратичной аппроксимации функций, заданных степенными рядами, являющийся модификацией метода рациональной аппроксимации Паде. Показано, что известные в литературе приближенные формулы для максимального прогиба шарнирно опертого продольно сжатого гибкого стержня нетрудно получить с помощью обобщенной аппроксимации Паде полного эллиптического интеграла первого рода. Построены новые простые формулы для максимального прогиба и описания формы гибкого стержня при плоском изгибе.

Представление функций выражениями, включающими невысокие степени аргумента, оказывается полезным в приближенных вычислениях и часто упрощает расчетные формулы. В задачах прикладной математики в качестве аппроксимации суммы ряда обычно берется несколько первых, нередко не больше двух или трех, членов ряда. Особенно в том случае, если вычисление следующих членов ряда требует значительных затрат, например, при решении задач методом малого параметра. Однако ценность полученной таким образом аппроксимации снижается из-за того, что получаемое решение является локальным.

Рассматриваемый здесь пока еще слабо освещенный в литературе способ квадратичной аппроксимации функций, заданных степенными рядами, является модификацией метода рациональной аппроксимации Паде [1] и позволяет значительно расширить границы применимости метода малого параметра [2, 3]. С помощью приближенных выражений модуля полного эллиптического интеграла первого рода через значение интеграла получены более точные, чем существующие, новые формулы для максимального прогиба шарнирно опертого продольно сжатого гибкого стержня при больших нагрузках. На основе квадратичной аппроксимации полных эллиптических интегралов первого и второго рода и некоторых соотношений теории эллиптических функций, связывающих неполные и полные интегралы, построено простое решение для представления формы гибкого стержня при плоском изгибе.

Рациональная аппроксимация Паде – это представление степенного ряда в виде отношения двух полиномов [1]. В общем случае, когда коэффициенты степенного ряда произвольны, принято следующее определение ([1], стр. 31): если существуют многочлены $A_n(x)$, $B_m(x)$ степени n и m соответственно такие, что

$$A_n(x) - B_m(x)s(x) = O(x^{n+m+1}), \quad B_m(0) = 1 \tag{1}$$

то $R_m^n(x) = A_n(x)/B_m(x)$ называется рациональной аппроксимацией Паде степенного ряда $s(x)$. Заметим, что $s(x)$ входит в (1) лишь в первой степени. Аппроксимацию Паде можно применять для приближенного суммирования числовых рядов и для уточнения полученных с помощью рядов решений дифференциальных уравнений. Несколько примеров успешного использования рациональной аппроксимации Паде в теории оболочек можно найти в [2].

Рассмотрим модификацию аппроксимации Паде на конкретном примере аппроксимации полного эллиптического интеграла первого рода

$$F = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad (2)$$

Так как ряд Маклорена

$$F = \frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\right]^2 k^{2n}\right\}$$

сходится абсолютно при $|k| < 1$ ([3], стр. 59), то, пользуясь разложением $p = (2F/\pi)^2$ в ряд, так же сходящийся абсолютно при $|k| < 1$, имеем

$$p = 1+k^2/2+11k^4/32+17k^6/64+\ldots = 1+k^2/2(1+k^2/2+k^4/32+\ldots)+$$
$$+3k^4/32(1+k^2+\ldots)+\ldots = 1+k^2/2(p)+3k^4/32(p^2)+\ldots$$

Поэтому, ограничиваясь тремя членами разложения и разрешая относительно k вместо бикубического уравнения $p = 1 + k^2/2 + 11k^4/32 + 17k^6/64$ биквадратное уравнение

$$p = 1+k^2p/2+3k^4p^2/32 \qquad (3)$$

в котором неявным образом учтен член $17k^6/64$, получим значение k с не меньшей точностью. Так, для $p = 1.5$ получим $k = 0.784$ для бикубического уравнения, $k = 0.758$ для биквадратного уравнения и $k = 0.759$, пользуясь точным выражением (2); для $p = 2$ получим $k = 0.971$, $k = 0.880$ и $k = 0.885$ соответственно. Из уравнения (3) можно получить приближенное выражение модуля k полного эллиптического интеграла первого рода через значение F интеграла и, наоборот, значение интеграла $F = \pi\sqrt{p}/2$ выразить через k:

$$F = \pi/\sqrt{2-k^2+\sqrt{4-4k^2-k^4/2}}$$

Погрешность вычисления интеграла по этой формуле не превосходит 1% для $0 \le k \le 0.89$.

К эллиптическим интегралам приводят различные задачи физики, механики и математики, например, задача об устойчивости ферромагнитного слоя при перемагничивании, о периоде колебания маятника, о продольном изгибе стержня, о движении шатуна паровой машины, о длине дуги эллипса. Эллиптические интегралы не выражаются в элементарных функциях, поэтому представление таких интегралов приближенными выражениями оказывается полезным и в аналитических выкладках и при вычислениях. Так, известно [4, 5], что наибольший безразмерный (отнесенный к длине) прогиб f продольно сжатого безразмерной нагрузкой p (отнесенной к нагрузке Эйлера) шарнирно опертого упругого стержня дается формулой $f = 2k/(\pi\sqrt{p})$. Кроме того, k и p связаны соотношением $F = \pi\sqrt{p}/2$, где k – модуль полного эллиптического интеграла первого рода F, записанного в форме Лежандра. Отметим, что в задаче о продольном изгибе модуль k эллиптического интеграла F имеет геометрический смысл синуса половины угла между касательной к оси изогнутого стержня в его вершине и первоначально прямолинейным направлением стержня. Выражая k из (3), получим формулу для наибольшего прогиба

$$f = \frac{2\sqrt{\sqrt{6p-2}-2}}{\sqrt{3}\pi p} \qquad (4)$$

или, при $p - 1 \ll 1$:

$$f = \frac{2\sqrt{2p-2}}{\pi p} \tag{5}$$

Результаты расчетов убеждают, что формула (5) грубее (4), хотя существенно точнее распространенной в курсах теории упругости и сопротивления материалов аналогичной формулы, отличается от нее лишь множителем p в знаменателе и качественно полнее описывает зависимость нагрузка – прогиб для любых нагрузок [6].

В общем случае, когда коэффициенты степенного ряда произвольны, обозначим через $S(x)$ сумму степенного ряда, первые несколько членов которого известны. Если $V(x)$, $W(x)$, $R(x)$ – полиномы степени не выше v, w, r соответственно, удовлетворяющие соотношению $V(x) + W(x)S(x) + R(x)S^2(x) = O(x^{v+w+r+2})$, то соответствующая квадратичная аппроксимация ([1], стр. 319) для $S(x)$ определяется уравнением $V(x) + W(x)C(x) + R(x)C^2(x) = 0$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая $v \le 2$, $w \le 2$, $r \le 2$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, из соотношения

$$a_0 + b_0x + c_0x^2 + (a_1 + b_1x + c_1x^2)S(s) + (a_2 + b_2x + c_2x^2)S^2(x) = O(x^8) \tag{6}$$

получим систему линейных однородных уравнений для определения коэффициентов a_i, b_i, c_i. Тогда функция $C(x)$, удовлетворяющая уравнению (назовем его определяющим)

$$a_0 + b_0x + c_0x^2 + (a_1 + b_1x + c_1x^2)C + (a_2 + b_2x + c_2x^2)C^2 = 0 \tag{7}$$

является квадратичной аппроксимацией Паде функции $S(x)$. Основное отличие квадратичной аппроксимациии от рациональной в том, что $S(x)$ входит в (6) во второй степени. Одним из преимуществ данной аппроксимации является обращаемость: пользуясь одним и тем же уравнением, можно выразить C через x или наоборот, x через C. Выбор соответствующей ветви обычно определяется из постановки задачи.

Например, функции $y = \cos x$ и $x = \arccos y$ в окрестности $y = 1$ приближенно удовлетворяют семикоэффициентному определяющему уравнению

$$x^4(28y - 361) + 3x^2(256y + 2789) - 3(59y^2 - 6208y + 6149) = 0 \tag{8}$$

и трехкоэффициентному уравнению

$$x^2(y^2 - 4y) - 3(y^2 - 1) = 0 \tag{9}$$

Используя (9), получим формулу $y \approx \pi/2 - \sqrt{3(y^2-1)/(y^2-4y)}$, по которой $\arcsin y$ вычисляется с четырьмя верными знаками на промежутке [0.9; 1]. Заметим, что из (8) выводятся формулы, позволяющие вычислять $\arcsin y$ и $\arccos y$ с десятью верными знаками на промежутке [0.8; 1] и с пятью на – [0; 1].

Рациональная аппроксимация Паде получается из квадратичной, если в (6) положить $a_2 = b_2 = c_2 = 0$, следовательно квадратичная аппроксимация является более точной, потому что в качестве допустимых привлекается более широкий класс функций, чем рациональные. Например, для суммы ряда $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + x^3/16 - \ldots$ любая рациональная аппроксимация Паде оказывается приближенной, а квадратичная аппроксимация, генерируемая уравнением (7) при $a_0 = b_0 = -a_2 = 1$ и остальных коэффициентах равных нулю, то есть полученная из уравнения $1 + x - C^2(x) = 0$, совпадает с самой функцией $C(x) = \sqrt{1+x}$.

При выводе определяющих заданную функцию уравнений часть коэффициентов a_i, b_i, c_i в (6) можно полагать равными нулю. Таким образом, число трехкоэффициентных определяющих уравнений для любой функции равно $C_9^3 = 84$, причем часть уравнений может генерировать одну и ту же аппроксимацию. Например, среди 84 трехкоэффициентных соотношений, определяющих полный эллиптический интеграл первого рода F, лишь следующие семь генерируют различные аппроксимации, расположенные в порядке возрастания точности:

$$x - 4y^2 + 4y = -\frac{13}{16}(x^2), \quad F = \frac{\pi(1+\sqrt{k^2+1})}{4}, \quad f = \frac{4\sqrt{\sqrt{p}-1}}{\pi\sqrt[4]{p}} \tag{10}$$

$$x - 2y^2 + 2 = -\frac{11}{16}(x^2), \quad F = \frac{\pi\sqrt{2k^2+4}}{4}, \quad f = \frac{2\sqrt{2p-2}}{\pi\sqrt{p}}$$

$$xy - 4y^2 + 4y = -\frac{9}{16}(x^2), \quad F = \frac{\pi(k^2+4)}{8}, \quad f = \frac{4\sqrt{\sqrt{p}-1}}{\pi\sqrt{p}} \tag{11}$$

$$xy - 2y^2 + 2 = -\frac{7}{16}(x^2), \quad F = \frac{\pi(k^2+\sqrt{k^4+16})}{8}, \quad f = \frac{2\sqrt{2p-2}}{\pi\sqrt[4]{p^3}} \tag{12}$$

$$xy^2 - 4y^2 + 4y = -\frac{5}{16}(x^2), \quad F = \frac{2\pi}{4-k^2}, \quad f = \frac{4\sqrt{\sqrt{p}-1}}{\pi\sqrt[4]{p^3}} \tag{13}$$

$$xy^2 - 2y^2 + 2 = -\frac{3}{16}(x^2), \quad F = \frac{\pi}{\sqrt{4-2k^2}}, \quad f = \frac{2\sqrt{2p-2}}{\pi p} \tag{14}$$

$$xy^2 - 4y + 4 = -\frac{1}{16}(x^2), \quad F = \frac{\pi}{1+\sqrt{1-k^2}}, \quad f = \frac{4\sqrt{\sqrt{p}-1}}{\pi p} \tag{15}$$

$$x = k^2, \quad y = 2F/\pi$$

Здесь в каждой строке справа приведена соответствующая формула для максимального прогиба f шарнирно опертого продольно сжатого нагрузкой p гибкого стержня, самой точной является (15). Отметим, что две группы формул (11), (13), (15) и (10), (12), (14) устроены похожим образом: формулы каждой группы отличаются одна от другой лишь множителем в знаменателе, а соответствующие формулы разных групп – числителями. Примечательно, что формулы (10) и (11) широко распространены в учебной литературе [7–10], однако все более точные формулы (12)–(15) ускользнули от внимания исследователей, использовавших традиционные методы аппроксимации [6]. Заметим, что формула (14) совпадает с (5) и в [11] она получена заменой под знаком интеграла выражения $\sin\varphi$ на $\sqrt{2}/2$.

Рассмотрим другие известные в литературе формулы для максимального прогиба стержня. Наиболее распространенной [12–16] и наименее точной является формула

$$f = \frac{2\sqrt{2p-2}}{\pi}, \quad x + 2y^2 - 2y^4 = -\frac{19}{16}(x^2) \tag{16}$$

впервые опубликованная в [17]. Справа в (16) дано соответствующее соотношение четвертого порядка относительно y, генерирующее эту аппроксимацию. Следующие формулы, расположенные в порядке возрастания точности,

$$f = \frac{2\sqrt{2p-2}}{\pi}\left[1-\frac{1}{8}(p-1)\right]$$
$$x+\frac{1}{32}(81y^2-99y^4+19y^6-y^8) = -\frac{17}{16}(x^2) \tag{17}$$

$$f = \frac{2\sqrt{2p-2}}{\pi}\left[1-\frac{41}{64}(p-1)\right]$$
$$x+\frac{1}{2048}(11025y^2-19635y^4+10291y^6-1681y^8) = -\frac{35}{64}(x^2) \tag{18}$$

$$f = \frac{2\sqrt{2p-2}}{\pi}\left[1-\frac{19}{16}(p-1)\right]$$
$$x+\frac{1}{128}(1225y^2-2555y^4+1691y^6-361^8) = \frac{671}{1024}(x^3) \tag{19}$$

$$f = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{p}}\sqrt{\sqrt{9\sqrt{p}-8}-1}, \quad x+\frac{9}{16}x^2+4-4y = -\frac{25}{64}(x^3) \tag{20}$$

$$f = \frac{4\sqrt{\sqrt{6p-2}-2}}{\sqrt{3}\pi p}, \quad xy^2+\frac{3}{16}x^2y^4-2y^2+2 = \frac{21}{4096}(x^4) \tag{21}$$

впервые даны в [18], [4], [13], [10] и [6] соответственно. Формулы (20) и (21) можно получить с помощью квадратичной аппроксимации, соотношения (17)–(19) не влекут квадратичную аппроксимацию. Существенно более точную, чем формулы (17)–(19), и содержащую такие же члены квадратичную аппроксимацию генерирует вблизи $x = 0$ соотношение

$$x+\frac{1}{16}(237y^2-571y^4+463y^6-129y^8) = -\frac{1513}{2048}(x^4)$$

Расчеты показывают, что для любых $p > 1$ формулы (12)–(15) точнее формул (17)–(18), например, относительная погрешность при вычислениях по (15) приближенно в 9 раз меньше, чем по (18) и в 17 раз меньше, чем по (17). Кроме того, хотя вблизи $p = 1$ формула (20) незначительно точнее (15), но для всех $p > 1.1$ более точной оказывается формула (15).

Равновесные закритические формы продольно сжатых стержней были впервые исследованы Лагранжем и подробно изучены с применением таблиц эллиптических интегралов в [4]. Однако для практического использования известные в литературе способы оказываются трудоемкими из-за необходимости вычисления величин, выражаемых через эллиптические интегралы первого и второго рода. Соответствующих приближенных формул, приспособленных для этих целей и пригодных для описания формы гибкого стержня при больших нагрузках, нет.

Пусть t – расстояние от конца стержня до произвольной точки оси, отнесенное к длине стержня; $x(t)$ и $y(t)$ – искомые безразмерные (отнесенные к длине стержня) декартовы координаты точки $t(0 \le t \le 1)$, причем ось Ox направлена вдоль первоначально прямолинейной оси стержня и $x(0) = y(0) = y(1) = 0$. Введем обозначения для неполных и полных эллиптических интегралов первого и второго рода

$$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

$$F = F(\pi/2), \quad E = E(\pi/2)$$

В этих обозначениях точные координаты точки, лежащей на оси изогнутого продольно сжимающей нагрузкой p стержня на расстоянии t от его конца (расстояние считается вдоль оси стержня), вычисляются по формулам $x(t) = 2[E - E(\varphi)]/(\pi\sqrt{p}) - t$, $y(t) = f\cos\varphi$, где f – наибольший безразмерный (отнесенный к длине) прогиб стержня, φ – амплитуда ($-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$) эллиптического интеграла, которая находится из уравнения $F(\varphi) = (1/2 - t)\pi\sqrt{p}$ [4, 5]. Заметим, что для вычисления максимального прогиба f используется лишь полный эллиптический интеграл первого рода. Однако вычисление координаты $y(t)$ в общем случае требует решения уравнения, в котором неизвестное φ стоит под знаком неполного эллиптического интеграла первого рода, а для вычисления координаты $x(t)$ необходимы еще значения эллиптических интегралов второго рода.

Для построения приближенных формул для $x(t)$ и $y(t)$ воспользуемся квадратичной аппроксимацией полных эллиптических интегралов и известными формулами из теории эллиптических функций [5]. Зная k, вычислим амплитуду φ из приближенных равенств, связывающих значения полных и неполных эллиптических интегралов

$$1 - k^2\sin^2\varphi = \sqrt{1-k^2}\left(\frac{1-2q\cos 2\pi t}{1+2q\cos 2\pi t}\right)^2, \quad q = \frac{1-\sqrt[4]{1-k^2}}{2(1+\sqrt[4]{1-k^2})}$$

которые получены из равенства (49), данного на стр. 214, и стр. 220 [5] с учетом равенства $F(\varphi)/F = 1 - 2t$. После упрощений имеем

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{k}\sqrt{k^2 - 1 + \sqrt{1-k^2}\left(\frac{1-2q\cos 2\pi t}{1+2q\cos 2\pi t}\right)^2}$$

Для вычисления $E(\varphi)$ используем равенство (68) ([5], с. 230), учитывая лишь члены, содержащие q в степени не выше второй.

Теперь алгоритм вычисления координат $x(t)$, $y(t)$ ($0 \le t \le 1$) упругой линии шарнирно опертого продольно сжатого нагрузкой p стержня ($p \ge 1$, $p = 1$ – нагрузка Эйлера) можно окончательно записать так:

1. По данной нагрузке p вычисляем модуль k из уравнения

$$7pk^4 + (81p - 102\sqrt{p} + 53)k^2 - 64p + 64 = 0 \tag{22}$$

причем перед квадратными корнями оба раза берем знак +.

2. Вычисляем E (перед корнем выбираем знак –) и q, имея k из п. 1:

$$(348k^2 - 2688)E^2 + \pi(14k^4 - 436k^2 + 1664)E + \pi^2(3k^2 - 160) = 0$$

$$q = \frac{1-\sqrt[4]{1-k^2}}{2(1+\sqrt[4]{1-k^2})} \tag{23}$$

3. Для произвольного t $(0 \le t \le 1)$ вычисляем координаты $x(t)$, $y(t)$

$$x(t) = \left(\frac{4E}{\pi\sqrt{p}} - 1\right)t + \frac{8q}{\pi p}\left(\frac{\sin 2\pi t}{q^2 - 1} + q\sin 4\pi t - q^2 \sin 6\pi t\right)$$

$$y(t) = \frac{2}{\pi\sqrt{p}}\sqrt{k^2 - 1 + \sqrt{1-k^2}\left(\frac{1 - 2q\cos 2\pi t}{1 + 2q\cos 2\pi t}\right)^2}$$

Заметим, что относительные погрешности вычисления полного эллиптического интеграла первого рода F по формуле (22) с учетом равенства $F = \pi\sqrt{p}/2$ и полного эллиптического интеграла второго рода E по (23) не превышают 0.04% вплоть до $k = 0.9$. Пользуясь (22), получим для F приближающую функцию, ряд Маклорена которой совпадает с разложением F в ряд до k^{10} включительно. Учитывая геометрический смысл модуля k, уравнение (22) можно применять для вычисления угла наклона касательной к концу стержня при заданной нагрузке p или наоборот, для вычисления нагрузки, при которой концы стержня повернутся на заданный угол. Так, из точного решения следует, что при нагрузке $p = 1.39321$ касательные к стержню в его концах перпендикулярны направлению нагрузки, а из уравнения (22) получим приближенно $p = 1.39320$. Благодаря достигнутой точности аппроксимации эллиптических интегралов, погрешность вычисления координат $x(t)$, $y(t)$ по приведенным здесь формулам составляет не более 3% от длины стержня вплоть до нагрузок, превышающих критическую нагрузку Эйлера в 3.5 раза (из точного решения следует, что уже при нагрузке $p \approx 1.75$ прогиб стержня достигает максимума $f_{\max} \approx 0.403$, а при $p \approx 2.18$ концы стержня соединяются, то есть стержень образует петлю). Это решение может быть использовано для расчетов в более сложных задачах, когда стержни являются составными элементами конструкции, например, для расчетов механических регуляторов, гибких трубопроводов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бейкер Дж.* (мл.), Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.
2. *Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В.* Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. 416 с.
3. *Найфе А.Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
4. *Крылов А.Н.* О формах равновесия сжатых стоек при продольном изгибе // Избр. тр. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 486–538.
5. *Сикорский Ю.С.* Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. М.;Л.: ОГИЗ, 1936. 365 с.
6. *Астапов Н.С.* Приближенные формулы для прогибов сжатых гибких стержней // ПМТФ. 1996. Т. 37. № 4. С. 135–138.
7. *Ржаницын А.Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 476 с.
8. *Биргер И.А., Мавлютов Р.Р.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 560 с.
9. *Филоненко-Бородич М.М., Изюмов С.М., Кудрявцев И.Н. и др.* Сопротивление материалов. М.; Л.: Госстройиздат, 1940. 560 с.
10. *Мостков М.М.* Уточненные решения вопросов устойчивости и изгиба. Минск: Госиздат Белоруссии, 1936. 161 с.
11. *Киселев В.А.* Строительная механика: Спец. курс. Динамика и устойчивость сооружений. М.: Стройиздат, 1980. 616 с.
12. *Динник А.Н.* Устойчивость упругих систем. М.: ОНТИ, 1935. 183 с.

13. *Николаи Е.Л.* О работах Эйлера по теории продольного изгиба // Труды по механике. М.: Гостехтеоретиздат, 1955. С. 436–454.
14. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
15. *Томпсон Дж.М.Т.* Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985. 254 с.
16. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 334 с.
17. Mises R.v. Zur Steuermathematik // ZAMM. 1924. Bd. 4. H. 5. S. 436–438.
18. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 532 с.

Москва, Новосибирск

Поступила в редакцию
28.12.2000