

## **МЕТОД РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ**

Рассматривается универсальный метод расчета напряженно-деформированного состояния упругой стержневой системы при наличии нелинейностей, вызванных односторонними связями и трением в скользящих парах. Отличительной особенностью предлагаемого метода является возможность автоматизации расчета.

В основу метода положен принцип суммирования приращений деформаций и внутренних усилий, возникающих в процессе пропорционального нагружения системы внешней нагрузкой, зависящей от одного параметра, что позволяет заменить соответствующие нелинейные уравнения рекуррентной последовательностью линейных уравнений.

В результате представляется возможным определить уровень внешней нагрузки, при котором происходит смена расчетных схем. Циклическое повторение процедуры определения этого уровня составляет содержание предлагаемого шагового метода.

Установлено, что учет одностороннего характера связей и сил трения в скользящих парах приводит к существенному изменению картины напряженно-деформированного состояния упругих систем.

**1. Введение.** Рассмотрим упругую систему, содержащую наряду с двусторонними (обычными) связями значительное число односторонних связей, обусловленных зазорами и скользящими парами. При квазистатическом нагружении такой системы происходит включение одних связей и выключение других связей, в результате чего изменяются расчетная схема (РС) системы и разрушающие уравнения задачи. Следовательно, при решении задачи оказывается невозможным получить взаимно однозначное соответствие между действующей внешней нагрузкой, внутренними силовыми факторами (ВСФ) и перемещениями, что, в конечном итоге, приводит к решению нелинейной задачи о напряженно-деформированном состоянии (НДС) данной системы.

Теоретические и экспериментальные исследования показали [1, 2], что силы трения, имеющие место в скользящих парах связей, оказывают существенное влияние на перераспределение значений их реакций и поэтому трение необходимо учитывать в расчетах НДС систем с односторонними связями.

Развитию и обобщению методов статического и кинематического анализа упругих дискретных систем с односторонними лишними (в смысле статической неопределимости) связями посвящена работа [3].

Ряд важных результатов, относящихся к исследованию общих статических и кинематических свойств упругих дискретных систем с односторонними связями, получен в [4–6].

Первым численным методом явился метод последовательных попыток, заключающийся в последовательном испытании возможных вариантов рабочих систем, т.е. систем, получаемых друг из друга включением или выключением связей, и применяемый для решения широкого круга инженерных задач [4].

Поскольку в указанном методе поиск рабочей системы конечного вида не носит целенаправленного характера, то рост числа односторонних связей в системе приводит к резкому возрастанию количества вариантов рабочих систем, необходимых для пересчета. Например, в [3] показано, что число таких вариантов для системы с  $n$  односторонними связями будет равно  $2^n$ . Кроме того, установлена возможность закливания процесса расчета методом последовательных попыток.

Указанные недостатки этого метода привели к необходимости создания более эффективных методов поиска конечной рабочей системы, к числу которых можно отнести итерационные методы и методы математического программирования.

Общие вопросы расчета упругих дискретных систем с односторонними связями методами математического программирования рассмотрены в работах [4, 5, 7]. Разработке алгоритмов расчета систем с односторонними связями при действии переменной нагрузки посвящены работы [8, 9].

В качестве РС при идеализации упругих систем в большинстве перечисленных работ используются стержни и их системы. В некоторых работах [10] для решения практических задач расчета систем с односторонними связями используется метод конечных элементов (МКЭ). В них рассматриваются контактирующие элементы системы, односторонние связи которых непрерывно распределены по их поверхности и число этих связей достаточно велико.

Определенную математическую завершенность задача статического расчета систем с односторонними связями без учета трения получила в результате ее сведения к задаче квадратичного программирования [4].

Практически отсутствуют работы, в которых методы нелинейного программирования используются для расчета упругих систем с учетом трения в односторонних связях.

Следует отметить целый ряд работ, например [11], в которых разработаны итерационные методы решения плоских контактных задач математической теории упругости при наличии трения Кулона между контактирующими поверхностями. Некоторые теоретические вопросы реализации МКЭ и метода итераций в определении сил трения рассмотрены в [12].

Как показано в работе [13], следствием неконсервативного характера сил трения является гистерезисный характер зависимости между внешней нагрузкой и упругими деформациями в системе. В результате анализ контактных задач с трением требует рассмотрения "истории" нагружения и приближенной численной формулировки. Численное решение подобных задач [13] получено для условий квазистатического нагружения однопараметрической внешней нагрузкой, при этом неконсервативные силы трения рассматриваются как консервативные тангенциальные силы, вычисляемые в итеративной процедуре на каждом шаге приращения внешней нагрузки.

Предложенная в [13] процедура решения задачи одностороннего контакта позволяет на каждом шаге использовать систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами, поскольку величина шага выбирается достаточно малой, чтобы в пределах его можно было считать зависимость между усилиями и деформациями в системе линейными.

В данной работе ставится задач создания универсального метода для определения НДС упругой стержневой системы при наличии нелинейностей, вызванных односторонними связями и трением.

Отличительной особенностью предлагаемого метода является возможность автоматизации итерационной процедуры расчета систем с односторонними связями.

**2. Постановка задачи.** Рассматриваются упругие системы, моделируемые прямолинейными составными, в смысле кусочно-постоянной жесткости, пространственными брусками и тонкостенными [14] стержнями произвольного поперечного сечения, нагруженные системой сосредоточенных сил и моментов, а также распределенных усилий. Количество стержневых элементов, их относительная ориентация, число и характер связей, их расположение в системе могут быть произвольными.

Система, наряду с двусторонними (обычными) связями, содержит односторонние связи и начальные натяги (начальные реакции связей) и в ней имеют место силы трения в скользящих парах.

Будем полагать, что связи имеют такую форму и геометрию, что их можно моделировать стержневыми элементами с плоскими контактными площадками. Кроме того, считаем, что максимальный размер контактной площадки мал в сравнении с характерными размерами поперечного сечения, вследствие чего реактивные усилия (реакции) в связях рассматриваются как сосредоточенные силы.

Упругие свойства связей в системе могут быть учтены путем их моделирования эквивалентными по жесткости стержневыми элементами, причем жесткость реальной связи определяется расчетным путем, например, с использованием конечно – элементных моделей. Заменяя реальную связь “фиктивным” стержневым элементом, необходимо выполнить условие, заключающееся в том, чтобы размеры фиктивного стержневого элемента и реальной связи по линии действия соответствующей реакции были равны.

Для математического описания рассматриваемой статически неопределимой системы пространственных брусьев и тонкостенных стержней используются методы строительной механики [15].

В работе [3] показано, что для упругих систем, содержащих односторонние связи, при малых деформациях свойство нелинейности обусловлено только включением и выключением односторонних связей в процессе нагружения и получило название конструктивной нелинейности. При пропорциональном нагружении внешней нагрузкой, зависящей от одного параметра, на каждом шаге нагружения, разграниченных между собой включением или выключением какой-либо односторонней связи, такие системы ведут себя как линейные.

Тогда для двух состояний упругой системы, которым соответствуют две рабочие системы, одна из которых сменяет другую, справедливо положение, согласно которому при пропорциональном нагружении конечной внешней нагрузкой  $P$  и переходе от рабочей системы  $A$  к рабочей системе  $B$  можно считать, что система  $A$  продолжает существовать, неся некоторую внешнюю нагрузку  $P_A$ , а на систему  $B$  передается только доля нагрузки, равная  $P - P_A$ . При этом в предельном состоянии системы  $B$  усилия в каждом элементе заданной упругой системы представляют собой сумму усилий, которые образуются в ней, как в элементе обеих систем  $A$  и  $B$ .

В работах [4, 6] указано на справедливость принципа суммирования приращений деформаций и внутренних усилий, возникающих в процессе пропорционального нагружения системы. Метод многоступенчатого нагружения получил название шагового метода или метода последовательных нагружений.

С учетом отмеченного свойства линейности упругой системы, представляется возможным определить уровень внешней нагрузки, при котором происходит смена рабочих систем и относящихся к ним РС.

Для этого в исходной РС все односторонние связи необходимо представить двухсторонними (обычными) связями и приложить однопараметрическую внешнюю нагрузку  $P^* = P\mu$ . Момент перехода от одной рабочей системы к другой определяется минимальными значениями параметра  $\mu$ , при которых происходит изменение знака усилия в одной из односторонних связей. При этом на новую рабочую систему будет действовать нагрузка  $(1 - \mu)P$ . Величина параметра  $\mu$ , задающая шаг приращения внешней нагрузки, определяется из соотношений между величиной усилия в каждой односторонней связи промежуточной рабочей системы и суммарным значением усилия в этой связи, полученным на предыдущем шаге. Циклическое повторение процедуры определения параметра  $\mu$  составляет содержание предлагаемого шагового метода.

Раскрытие статической неопределимости системы производится методом сил, для чего образуется основная и эквивалентная система. Реакции в связях основной системы определяются из уравнений равновесия.

Лишние (избыточные) усилия  $(X_1, X_2, \dots, X_r)$  определяются из матричного уравнения метода сил, выражающего условия совместности перемещений точек контакта элементов упругой системы

$$\{\delta_{ik}\}\{X_k\} = -\{\delta_{ip}\} \quad (i = 1, \dots, r) \quad (2.1)$$

где  $r$  – число лишних усилий в системе.

Коэффициент канонических уравнений определяются с помощью интеграла Мора

$$\delta_{ik} = \sum_{s=1}^s \int_{L_s} \left( \frac{N_x^{(i)} N_x^{(k)}}{EF^s} + \frac{k_y Q_y^{(i)} Q_y^{(k)}}{GF^s} + \frac{k_z Q_z^{(i)} Q_z^{(k)}}{GF^s} + \frac{M_y^{(i)} M_y^{(k)}}{EJ_y^s} + \frac{M_z^{(i)} M_z^{(k)}}{EJ_z^s} + \frac{M_x^{(i)} M_x^{(k)}}{EJ_x^s} \right) dx \quad (2.2)$$

Заметим, что при вычислении коэффициентов (2.2) можно учесть самоуравновешенные ВСФ в тонкостенных стержнях незамкнутого профиля поперечного сечения, например, путем введения эффективной жесткости на кручение в шестое слагаемое формулы (2.2).

Суммирование слагаемых ведется по всем стержням упругой системы, имеющим длину  $L_s$ , включая и фиктивные стержневые элементы. Вычисление интегралов в последнем соотношении осуществляется методом Симпсона. Для определения ВСФ, входящих в соотношения (2.2), применяется метод сечений.

Решение системы уравнений равновесия и уравнений (2.1) осуществляется методом Гаусса. После получения реакций в основных и избыточных связях определяются ВСФ, напряжения и перемещения в любой точке каждого стержневого элемента.

Силы трения в односторонних связях в отсутствие скольжения рассматриваются на каждом шаге как усилия в обычных тангенциальных связях, ограниченные по абсолютной величине своими предельными значениями, зависящими от силы нормального давления и коэффициента трения скольжения. Силы трения скольжения представляются как внешние парные усилия, определяемые на каждом шаге значениями соответствующих сил давления и направлениями упругих смещений в односторонних связях.

**3. Метод расчета систем с односторонними связями.** Полагаем, что в каждой односторонней связи, рассматриваемой как двусторонняя, имеет место начальный натяг, усилие которого равно  $R_0$ , а реально существующие в связях усилия имеют положительный знак. В разомкнутых односторонних связях допускается начальный зазор  $\delta_0$  положительного или отрицательного знака в направлении осей, лежащих в поперечном сечении стержневого элемента. В соответствии с принятым подходом, конечное НДС упругой системы определяется суммой приращений внешних усилий  $\Delta P_j$  и усилий в связях  $R_j$ , соответствующих им напряжений и деформаций  $\delta_j$ , которые система получает на каждом интервале приращения однопараметрической внешней нагрузки.

Конечные значения усилий и деформаций в системе находятся из соотношений

$$R_k = \sum_{j=1}^N R_j + R_0, \quad \delta_m = \sum_{j=1}^N \delta_j + \delta_0 \quad (3.1)$$

где  $R_k$  – конечное значение реакции в  $k$ -й связи,  $\delta_m$  – конечное значение перемещения в  $m$ -й разомкнутой связи,  $N$  – число шагов приращения нагрузки.

На начальном этапе расчета для исходной рабочей системы, нагруженной внешней нагрузкой  $P$ , решается статически неопределимая задача. Приращение внешней нагрузки, получаемое системой на  $j$ -м шаге, будет равно

$$\Delta P_j = K_j P_{j-1} \quad (3.2)$$

где  $K_j$  – параметр, определяющий величину шага приращения внешней нагрузки, соответствующего физически существующему приращению усилий;  $P_{j-1}$  – остаточная доля расчетной нагрузки, полученная на предыдущем шаге и равная

$$P_{j-1} = P - \sum_{v=1}^{j-1} \Delta P_v \quad (3.3)$$

Для следующей промежуточной рабочей системы с номером шага  $j + 1$  эта величина определяется как

$$P_j = (1 - K_j)P_{j-1} \quad (3.4)$$

В случае действия на упругую систему некоторой совокупности внешних сил, соотношения (3.2)–(3.4) применяются для каждого из этих усилий. Если рассматривать всю последовательность шагов от 1 до  $j$ , то остаточная доля внешней нагрузки, прикладываемой к упругой системе на  $j$ -м шаге, составляет

$$P_j = \sum_{v=1}^{j-1} (1 - K_v)P \quad (3.5)$$

Для определения параметра  $K_j$  на каждом шаге рассматриваются только те односторонние связи, в которых после приложения внешней нагрузки  $P_{j-1}$  реакции связей либо перемещения имеют знак, противоположный знаку величин  $R_k$  и  $\delta_m$ , определяемых соотношениями (3.1). В соответствии с принятым правилом знаков для усилий и перемещений, эти условия для  $j$ -го шага имеют вид

$$R_0 + \sum_{v=1}^{j-1} R_v + R_j < 0, \quad \delta_0 + \sum_{v=1}^{j-1} \delta_v + \delta_j > 0 \quad \text{при } \delta_0 < 0 \quad (3.6)$$

Условия (3.6) для усилий физически соответствуют размыканию контактных связей, а для перемещений – перекрытию контактных поверхностей связей. В данном случае, в силу линейной зависимости реакций от внешней нагрузки в двусторонних связях, справедливы соотношения

$$K_F = \frac{\sum_{v=1}^{j-1} R_v + R_0}{R_j} < 0, \quad K_\delta = \frac{\sum_{v=1}^{j-1} \delta_v + \delta_0}{\delta_j} < 0 \quad (3.7)$$

Величина относительного перемещения в разомкнутой односторонней связи принимается положительной, если оно происходит по направлению единичных усилий, действующих в основной системе.

Как следует из соотношения (3.7), для реализации первого шага необходимо наличие начальных зазоров  $\delta_0$  и самоуравновешенной системы нагрузок  $R_0$  в связях. Для практического применения предлагаемого метода в этом случае необходимо положить значения  $R_0$  и  $\delta_0$  равными достаточно малым величинам.

Величина параметра  $K_j$ , входящего в (3.2) и (3.5), определится из соотношения

$$K_j = \min |K_F, K_\delta| \quad (F = \overline{1, c}; \quad \delta = \overline{1, b}) \quad (3.8)$$

где  $c$  – число односторонних связей, имеющих в конце  $(j - 1)$ -го шага реакции, удовлетворяющие условию (3.6),  $b$  – число разомкнутых односторонних связей, реализующих на  $(j - 1)$ -м шаге и удовлетворяющих условию (3.6).

Таким образом, величина коэффициента  $K_j$  определяет ту долю внешней нагрузки, прикладываемой к системе на каждом шаге, при которой происходит выключение или включение одной или сразу нескольких односторонних связей. Для значений приращений внешней нагрузки (3.2) равны нулю либо реакции, либо зазоры в отдельных связях.

На каждом  $j$ -м шаге для найденного значения коэффициента  $K_j$  осуществляется суммирование полученных приращений внешних усилий, реакций связей и зазоров с их суммарными значениями, определяемыми в результате предшествующих шагов, т.е.

$$\begin{aligned}
 P_{j,n} &= \sum_{v=1}^{j-1} \Delta P_{v,n} + P_{j-1} K_j \quad (n = \overline{1, \alpha}) \\
 R_{j,p} &= R_{0,p} + \sum_{v=1}^{j-1} R_{v,p} + R_{j,p} K_j \quad (p = \overline{1, \beta}) \\
 \delta_{j,q} &= \delta_{0,q} + \sum_{v=1}^{j-1} \delta_{v,q} + \delta_{j,q} K_j \quad (q = \overline{1, \gamma})
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

где  $\Delta P_{v,n}$  – определяется соотношением (3.2);  $P_{j-1}$  – соотношением (3.3);  $\alpha$  – общее число внешних усилий, действующих в системе;  $\beta$  – общее число реакций в системе на  $j$ -м шаге;  $\gamma$  – общее число односторонних связей на  $j$ -м шаге;  $R_{v,p}$ ,  $R_{j,p}$ ,  $\delta_{v,q}$ ,  $\delta_{j,q}$  – величины, смысл которых определяется выражениями (3.1) и (3.6).

Внешняя нагрузка  $P_{j-1}$  на каждом шаге процесса прикладывается к недеформированной основной системе, представляющей собой рабочую систему частного вида. С учетом особенностей используемой математической модели НДС, переход к новой рабочей системе, в случае выключения односторонней избыточной связи, осуществляется путем обнуления соответствующих строки и столбца канонических уравнений (2.1), при этом диагональный элемент полагается равным единице.

Если на начальном этапе расчета упругая система содержит разомкнутые избыточные связи, матрица коэффициентов уравнений метода сил содержит нулевые строки и столбцы, соответствующие этим связям. Введение односторонней избыточной связи на  $j$ -м шаге производится на основании решения уравнений метода сил (2.2) для значений внешней нагрузки, определяемой выражением (3.5) для  $(j-1)$ -го шага.

Если вводимые или исключаемые на одном из этапов расчета связи являются избыточными, то по отношению к предшествующему этапу вид основной системы не меняется. Тогда, в силу линейности задачи, отпадает необходимость использования интегралов Мора (2.2) для определения свободных членов уравнений метода сил (2.1). Они могут быть получены из выражения

$$\delta_{ip}^j = \delta_{ip}^{j-1} (1 - K_j)$$

В случае, если исключаемая на  $j$ -м шаге односторонняя связь относится к числу основных, определяемых уравнениями равновесия, необходимо решать статически неопределимую задачу для новой основной системы, в которой рассматриваемая связь будет избыточной. При численной реализации процедуры замены основной связи избыточной необходимым условием существования новой основной системы является неравенство нулю определителя системы уравнений равновесия.

Последовательность действий на каждом шаге процедуры вычислений состоит в проверке условий (3.6), вычислении соотношений (3.7) и (3.8) и выполнении расчетов с помощью выражений (3.9) и (3.5). Признаком окончания шагового процесса является удовлетворение условий (3.6). В случае выполнения на  $j$ -м шаге этих условий, коэф-

коэффициент  $K_j$ , входящий в (3.9), полагается равным единице и шаг с номером  $j$  считается последним. Значения  $P_{j,r}$ , входящие в (3.9), будут соответствовать нагрузке  $P$  и величины реакций и перемещений – их окончательным значениям. В результате упругая система будет нагружена совокупностью самоуравновешенных усилий, которые определяют ее окончательное НДС.

**4. Метод определения сил трения в односторонних связях.** Рассмотрим способы сил трения в односторонних связях. Силы трения в односторонних связях при отсутствии проскальзывания можно считать консервативными силами в избыточных связях основной системы, ограниченными по абсолютной величине значением произведения коэффициента трения скольжения  $K_f$  на усилие нормального давления.

На начальном этапе расчета полагается, что в односторонних связях, имеющих начальный натяг, в результате последовательного возрастания внешней нагрузки реализуются тангенциальные силы трения покоя. В стержневой РС они рассматриваются как силы в двусторонних избыточных связях. При дальнейшем возрастании внешней нагрузки на каждом  $j$ -м шаге алгоритма возможно возникновение проскальзывания в отдельных односторонних связях. Условие проскальзывания, в общем случае, имеет вид

$$|F_{ti}| > K_{fi} F_{pi}$$

где  $F_{ti}$ ,  $F_{pi}$  – тангенциальная сила и сила нормального давления, реализующиеся в  $i$ -й односторонней связи на этапе приложения нагрузки  $P_{j-1}$ , величина которой определяется соотношением (3.5).

Возникновение проскальзывания в одной из связей с трением переводит систему в новое состояние, которому соответствует иная РС в итерационной процедуре определения НДС.

Минимальная доля внешней нагрузки  $P_{j-1}$ , которая определяет момент возникновения проскальзывания в  $i$ -й односторонней связи, находится из условия пересечения графика функции силы нормального давления, умноженной на коэффициент  $K_{fi}$ , с графиком функции абсолютных значений тангенциальной силы сдвига. Численные значения этих функций в конце  $j$ -го шага приложения внешней нагрузки определяются соотношениями

$$F_{ti} = |F_{t\Sigma i} + \Delta F_{ti}|, \quad F_{t\Sigma i} = \sum_{v=1}^{j-1} F_{t,v,i} \quad (4.1)$$

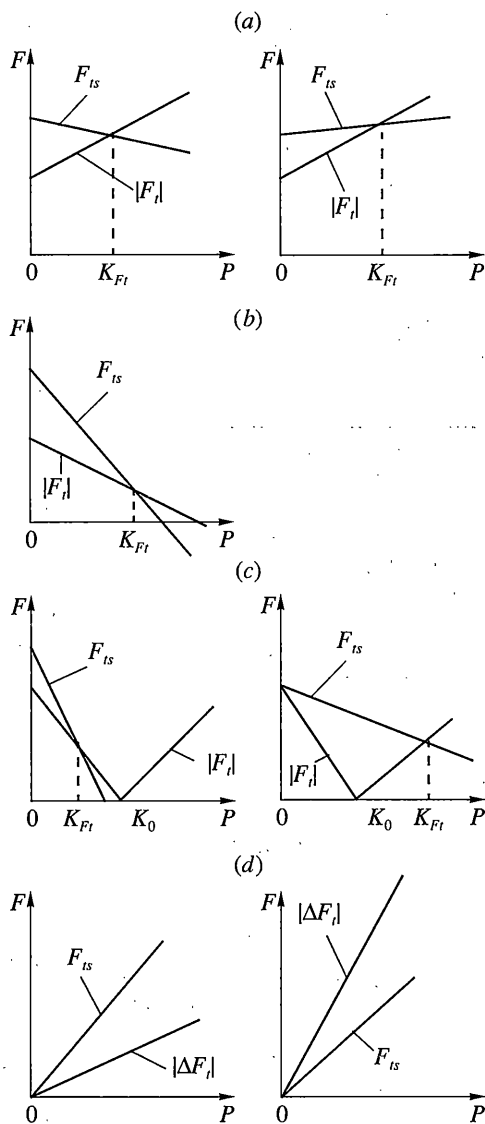
$$F_{tsi} = K_{fi}(F_{p\Sigma i} + \Delta F_{pi}), \quad F_{p\Sigma i} = \sum_{v=1}^{j-1} F_{p,v,i} \quad (4.2)$$

В формулах (4.1) и (4.2) введены обозначения:  $F_{tsi}$  – предельное значение силы сдвига в  $i$ -й связи;  $\Delta F_{ti}$  – приращение величины тангенциальной силы в  $i$ -й связи;  $\Delta F_{pi}$  – приращение величины силы нормального давления в  $i$ -й связи. Для связей без проскальзывания возможна реализация нескольких вариантов взаимного изменения величин  $F_{ti}$  и  $F_{tsi}$  в функции внешней нагрузки, графики которых изображены на фиг. 1, *a-d*.

Первый вариант (фиг. 1, *a*) характеризуется тем, что величины  $F_{t\Sigma i}$  и  $\Delta F_{ti}$ , входящие в (4.1), имеют одинаковый знак. Условие пересечения графиков функций  $F_t$  и  $F_{ts}$  определяется выражениями

$$K_{Ft}^i = \frac{F_{p\Sigma i} K_{fi} - |F_{t\Sigma i}|}{|\Delta F_{ti}| - \Delta F_{pi} K_{fi}} \quad (4.3)$$

$$|F_{t\Sigma i} + \Delta F_{ti}| > K_{fi}(F_{p\Sigma i} + \Delta F_{pi}) > 0$$



Фиг. 1

где  $K_{F_t}^i$  – параметр, определяющий величину шага приращения нагрузки  $P_{j-1}$ , приводящего к проскальзыванию в  $i$ -й связи.

В случае, если  $F_{t\Sigma i}$  и  $\Delta F_{ti}$  имеют противоположные знаки, возможны два варианта относительного изменения величин  $F_t$  и  $F_{ts}$ . В первом варианте (фиг. 1, b) величины  $F_{t\Sigma i}$  и  $F_{t\Sigma i} + \Delta F_{ti}$  имеют одинаковый знак и абсцисса точки пересечения прямых определяется соотношением

$$K_{F_t}^i = \frac{|F_{t\Sigma i}| - F_{p\Sigma i} K_{fi}}{|\Delta F_{ti}| - \Delta F_{pi} K_{fi}} \quad (4.4)$$

$$|F_{t\Sigma i} + \Delta F_{ti}| > K_{fi}(F_{p\Sigma i} + \Delta F_{pi})$$



Во втором варианте (фиг. 1, с) величины  $F_{i\Sigma i}$  и  $F_{i\Sigma i} + \Delta F_{ti}$  имеют противоположный знак и абсцисса точки излома функции  $F_t$  находится как

$$K_{0i} = \frac{-F_{t\Sigma i}}{\Delta F_{ti}} > 0$$

В зависимости от того, левее или правее этой точки происходит пересечение графиков  $F_t$  и  $F_{ts}$ , возможны два дополнительных случая. Если  $K_{F_t}^i < K_{0i}$ , то  $K_{F_t}^i$  определяется равенством

$$K_{F_t}^i = \frac{|F_{t\Sigma i}| \cdot K_{0i} - F_{p\Sigma i} K_{fi} \cdot K_{0i}}{|F_{ti}| + \Delta F_{pi} K_{fi}} \quad (4.5)$$

$$F_{p\Sigma i} K_{fi} + \Delta F_{pi} K_{fi} K_{0i} < 0$$

Для второго случая, когда  $K_{F_t}^i > K_{0i}$ , величина  $K_{F_t}^i$  находится по формуле

$$K_{F_t}^i = \frac{K_{fi} \cdot (1 - K_{0i})(F_{p\Sigma i} + \Delta F_{pi} \cdot K_{0i})}{F_{i\Sigma i} + \Delta F_{ti} - \Delta F_{pi} K_{fi}(1 - K_{0i})} + K_{0i} \quad (4.6)$$

$$F_{p\Sigma i} K_{fi} + \Delta F_{pi} K_{fi} K_{0i} > 0$$

Возможность изменения РС в результате проскальзывания приводит к необходимости замены в итерационной процедуре соотношения (3.8) соотношением

$$K_{j,m} = \min |K_F, K_\delta, K_{F_t}^\lambda| \quad (\lambda = \overline{1, d}) \quad (4.7)$$

где  $d$  – число связей трения покоя, для которых на  $j$ -м шаге справедливы выражения (4.1)–(4.6).

Значение коэффициентов  $K_{j,m}$  определяет ту величину приращения внешней нагрузки  $P_{j-1}$ , которая приводит к изменению РС вследствие выключения или включения односторонней связи, либо вследствие выключения связи трения покоя. В случае включения односторонней связи в результате возникновения силы трения покоя, возможны два варианта изменения величин  $K_{F_t} \Delta F_p$  и  $|\Delta F_{ti}|$  (фиг. 1, d). Если  $|\Delta F_{ti}| \leq K_{fi} \Delta F_{pi}$ , то в связи происходит залипание контактных поверхностей, приводящее к необходимости введения в РС избыточной двухсторонней связи трения. В случае, если  $|\Delta F_{ti}| > K_{fi} \Delta F_{pi}$ , в связи возникает проскальзывание, вызывающее необходимость введения внешних парных усилий, определяемых выражением (4.2).

Приведенные теоретические предпосылки послужили основой для создания итерационной процедуры определения сил трения в общем алгоритме расчета НДС упругих стержневых систем с односторонними связями при наличии сил трения.

Указанная процедура состоит из последовательности этапов. На каждом  $j$ -м шаге, при условии отсутствия связей трения скольжения, проводится расчет упругой системы на нагрузку  $P_{j-1}$ , определяемую соотношением (3.5), и находятся величины сил нормального давления  $F_{p\Sigma i} + \Delta F_{pi}$  в связях с проскальзыванием, а также направления относительных перемещений в этих связях. Далее, на этом же шаге проводится расчет системы на суммарную внешнюю нагрузку  $P_{j-1} + F_{ts}$ , в результате которого определяются новые величины сил нормального давления, относительных смещений и соответствующих им тангенциальных сил скольжения. Признаком окончания итерационного процесса определения сил трения является выполнение условия

$$|F_{pi}^j - F_{pi}^{j-1}| / F_{pi}^{j-1} < \chi_\epsilon \quad (\epsilon = \overline{1, u}) \quad (4.8)$$

где  $\chi_\varepsilon$  – заданная величина относительной погрешности при определении силы нормального давления в  $i$ -й односторонней связи на двух ближайших итерациях  $j$  и  $j - 1$ ,  $u$  – общее число связей с проскальзыванием на  $j$ -м шаге процесса. Практически, итерационный процесс носит колебательный характер и сходится на значения  $\chi_\varepsilon = 0.05$  за 2–3 итерации.

В заключение описания метода сформулируем общий алгоритм расчета параметров НДС систем с односторонними связями и трением с учетом процедуры определения сил трения скольжения.

На первом этапе проводится расчет упругой системы при внешней нагрузке  $P$ . С помощью формул (3.6), (3.7), (4.1)–(4.7) определяется коэффициент  $K_{j,m}$ . В соответствии с выражением (3.5), путем замены в нем величины  $K_j$  на  $K_{j,m}$ , вычисляется остаточная доля внешней нагрузки  $P_j$ . По формуле (3.9) определяется действительная величина приращения внутренних и внешних усилий, а также деформаций для рассматриваемого варианта РС.

В случае выключения односторонней связи, изложенная последовательность повторяется для найденного значения внешней нагрузке  $P_j$ . В случае включения односторонней связи, вводятся двухсторонние избыточные связи, либо парные внешние усилия проскальзывания в зависимости от реализации одного из вариантов, показанных на фиг. 1,  $d$ . Для второго из указанных вариантов, а также в случае, если на предыдущих этапах шагового процесса имело место выключение избыточных связей трения, операции вычисления коэффициента  $K_{j,m}$  предшествует операция определения сил трения скольжения. Далее проводятся расчеты по формулам (3.5) и (3.9). Признаком окончания шагово-итерационного процесса является совместное выполнение условий (3.6) и

$$|F_{t\sigma i} + \Delta F_{ti}| < K_{fi}(F_{p\sigma i} + \Delta F_{pi}) \quad (4.9)$$

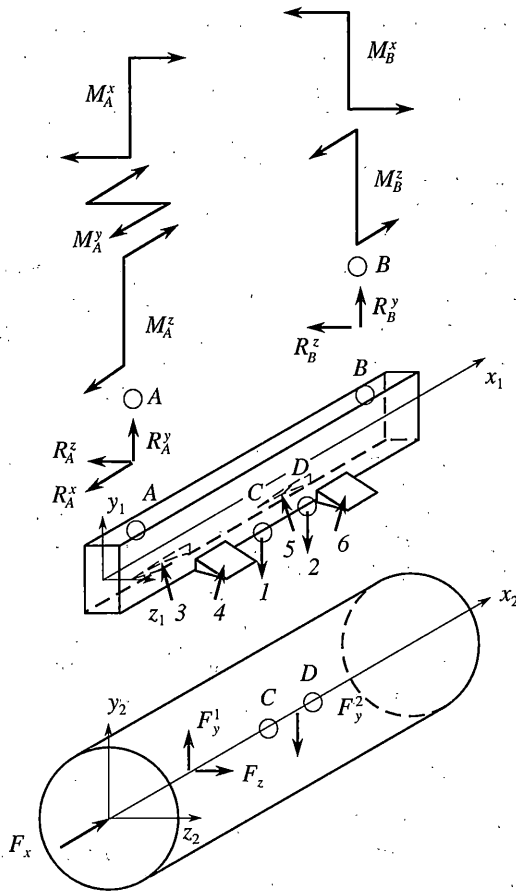
и на очередном шаге. Выражение (4.9) должно удовлетворяться для всех тангенциальных усилий в связях, у которых на текущем шаге отсутствует сдвиг.

**5. Примеры расчета и анализ результатов.** На основании разработанного алгоритма создана программа вычислений для ЭВМ, с помощью которой проведены расчеты НДС ряда упругих систем, моделируемых составными пространственными и тонкостенными стержнями с односторонними связями, силами трения в скользящих парах и начальными натягами. Приведем некоторые результаты.

Рассматривается статически неопределимая система из двух составных тонкостенных стержней кусочно-постоянной жесткости, упругие связи между которыми также представляются стержневыми элементами. Полная РС данной системы (фиг. 2) содержит в узлах  $C$  и  $D$ , а также в точках контакта боковых стержней с нижним стержнем четырнадцать реакций, шесть из которых соответствуют односторонним связям в узлах  $C$  и  $D$  и в боковых стержнях, а восемь – связям трения в боковых стержнях.

Фрагмент этой РС представлен на фиг. 2, где для упрощения восприятия РС показаны только те реакции связей, которые нашли отражение в результатах данной статьи. Кроме того, на фиг. 2 не показаны реакции в ответных узлах крепления нижнего стержня, которые имеют противоположное направление.

Верхний элемент РС представляется составным тонкостенным стержнем, состоящим из пяти участков постоянной жесткости, нижний элемент – тонкостенным стержнем, имеющим постоянную по длине форму поперечного сечения в виде кольца, каждый из боковых элементов – двумя составными стержнями. Следует отметить, что для верхнего стержня, в силу существенной изменчивости его поперечных сечений по длине, жесткостные характеристики в пределах каждого участка вычисляются как средневзвешенные.



Фиг. 2

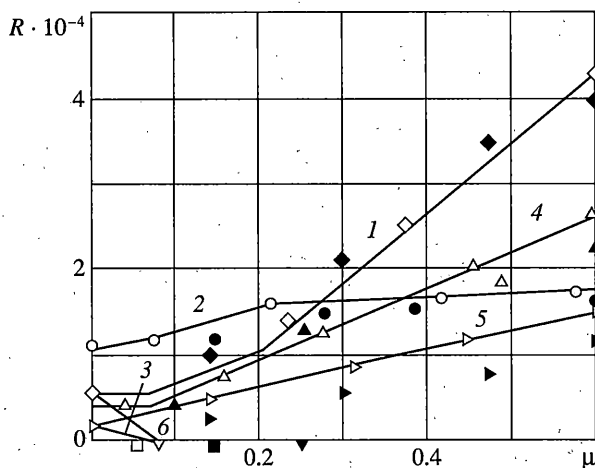
Полагаем, что узел A воспринимает шесть реакций, а узел B – реактивные усилия в направлении осей  $y$  и  $z$ , а также моменты относительно осей  $x$  и  $z$ . В узлах крепления C и D, которые считаем абсолютно жесткими, имеют место боковые зазоры, равные 4.5 мм. Боковые стержни с помощью специальных приспособлений (на фиг. 2 они не показаны), которые также полагаем абсолютно жесткими, обеспечивают возникновение начального натяга, усилия которого образуют самоуравновешенную систему сил по отношению к стержням PC.

Внешние нагрузки представляют собой четыре сосредоточенные силы, действующие по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$  и равные  $F_x = 3.48$  кН,  $F_y^1 = 1.41$  кН,  $F_y^2 = 30.4$  кН,  $F_z = 32.2$  кН.

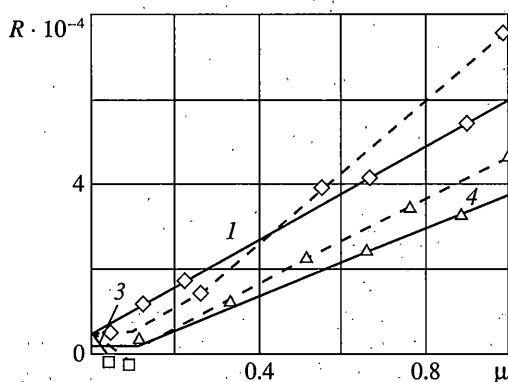
Коэффициенты трения скольжения для стали, с учетом различной шероховатости поверхностей в парах “боковые стержни – нижний стержень” приняты равными 0.2, в парах, образованных элементами узлов C и D продольных стержней, – 0.15.

На фиг. 3 для этой системы показаны графики зависимости усилий  $R$ [Н] в односторонних связях 1–6 от параметра внешней нагрузки  $\mu$  (соответственно кривые 1–6).

Здесь нанесены также экспериментальные значения этих же усилий, полученные в результате лабораторных испытаний. Расчетные значения усилий на фиг. 3 отмечены светлыми маркерами, а экспериментальные значения – темными маркерами.



Фиг. 3



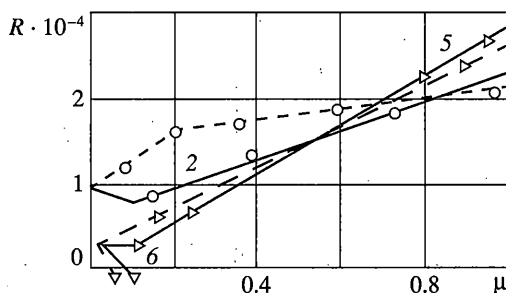
Фиг. 4

Сопоставление экспериментальных данных с результатами расчетов свидетельствует об их хорошем соответствии, так как максимальное расхождение для усилий составляет 16% по отношению к расчетным значениям.

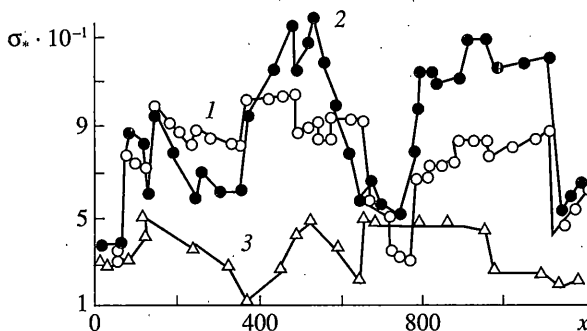
Для оценки влияния односторонних связей на НДС стержневой системы были проведены вычисления для двух вариантов РС. В первой РС учитывается односторонний характер связей, но при отсутствии сил трения; во второй РС все односторонние связи рассматриваются как двусторонние. Результаты расчетов усилий в связях представлены на фиг. 4, 5, где сплошные линии соответствуют первой РС, штриховые линии — второй РС, причем обозначения усилий те же самые, что и на фиг. 3.

Анализ фиг. 4, 5 показывает, что выключение отдельных односторонних связей, в данном случае связей 3 и 6, приводит к существенному возрастанию усилий в остальных связях, т.е. в связях 1, 2, 4 и 5.

Результаты расчетов значений эквивалентных напряжений  $\sigma_*$  [МПа] по одному из наиболее напряженных волокон стержня представлены на фиг. 6 графиками 1–3, где “основной вариант” обозначен РС, учитывающую односторонний характер связей и



Фиг. 5



Фиг. 6

наличие сил трения (кривая 1), вариант “без трения” – РС, в которой отсутствуют силы трения в односторонних связях (кривая 2), и вариант “двусторонние связи” – РС, у которой односторонние связи рассматриваются как двусторонние (кривая 3).

Из сопоставления графиков на фиг. 6, относящихся к основному варианту РС и РС с двусторонними связями, видно, что учет одностороннего характера связей приводит к существенному изменению картины НДС стержневой системы, причем уровень максимальных эквивалентных напряжений увеличивается на 90%.

Сравнивая между собой графики на фиг. 6, соответствующие РС с трением и без трения, можно установить, что наличие сил трения в скользящих парах снижает уровни напряжений в элементах стержневой системы. Различия между уровнями максимальных эквивалентных напряжений для обоих вариантов составляет 55%.

Кроме того, установлено, что начальный натяг может приводить к предотвращению выключения отдельных односторонних связей, в результате чего некоторые элементы стержневой системы разгружаются, другие элементы догружаются. Можно отметить, что начальный натяг повышает жесткостные свойства системы, ограничивая “нежелательные” перемещения.

**6. Заключение.** В результате расчетов и испытаний установлено существенное и неоднозначное влияние односторонних связей на НДС упругих стержневых систем.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фирсанов В.В. Метод расчета напряженно-деформированного состояния установок летательных аппаратов, содержащих конструктивные нелинейности // Техника воздушного флота. Т. 71. № 2, 1997. С. 42–49.

2. *Firsanov V.V.* Strength properties calculation method for aviation constructions involving constructive nonlinearities // Proc. 4th MAI / BUAA intern, symp. on Automatic Control. Moscow, Russia, 1997. P. 92–96.
3. *Рабинович И.М.* Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями. М.: Стройиздат, 1975. 145 с.
4. *Гордеев В.Н., Перельмутер А.В.* Расчет упругих систем с односторонними связями как задача квадратичного программирования // Исследования по теории сооружений. М.: Стройиздат, 1967. Вып. 15. С. 208–212.
5. *Перельмутер А.В.* Использование методов квадратичного программирования для расчета систем с односторонними связями // Исследования по теории сооружений. М.: Стройиздат, 1972. Вып. 19. С. 138–147.
6. *Кузнецов Э.Н.* Статико-кинематический анализ систем, содержащих односторонние связи // Исследования по теории сооружений. М.: Стройиздат, 1972. Вып. 19. С. 148–155.
7. *Баженов В.А., Гуляев В.И.* Исследование траекторий нагружения механических систем с односторонними связями методами нелинейного программирования // Докл. УССР. Сер. Физ.-мат. и техн. науки. 1980. № 2. С. 25–28.
8. *Астрахан А.Х.* Расчет конструкций с односторонними связями на переменные нагрузки // Механика стержневых систем и сплошных сред. Л.: Ленингр. инж.-строит. ин.-т, 1980. С. 64–72.
9. *Портаев Л.П.* Расчет систем с односторонними связями на возрастающую нагрузку // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 1. С. 183–186.
10. *Вовкушевский А.В.* Вычислительная программа для расчета сооружений с односторонними связями методом конечных элементов // Изв. ВНИИ гидротехн. им. Б.Е. Веденеева. 1978. Т. 120. С. 43–46.
11. *Вовкушевский А.В., Дурнев В.А.* Численная реализация некоторых способов решения задачи Синьборини с трением. // Метод конечных элементов и расчет сооружений: Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1985. № 405. С. 14–19.
12. *Кравчук А.С.* К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 122–129.
13. *Torstenfelt Bo.R.* An automatic inerementation technique for contact problems with friction // Computers and Structures. 1984. V. 19. № 3. P. 393–400.
14. *Власов В.З.* Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
15. *Образцов И.Ф., Булычев Л.А., Васильев В.В. и др.* Строительная механика летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1986. 536 с.

Москва

Поступила в редакцию  
10.08.2001