

© 2003 г. А.В. АНДРЕЕВ, Р.В. ГОЛЬДШТЕЙН, Ю.В. ЖИТНИКОВ

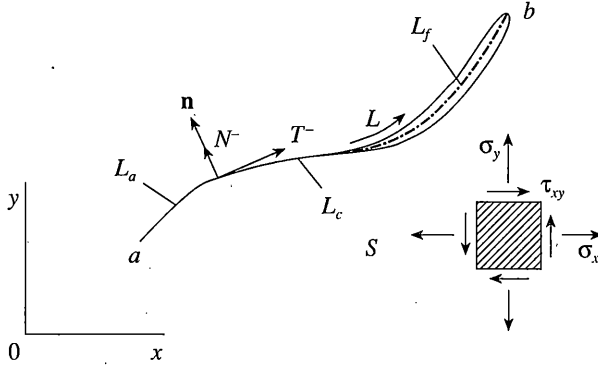
ЭВОЛЮЦИЯ РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ ГЛАДКИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТРЕЩИН СО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ С ТРЕНИЕМ ПОВЕРХНОСТЯМИ В ПРОЦЕССЕ НАГРУЖЕНИЯ

Анализ равновесия упругих систем с трением показывает, что в общем случае напряженно-деформированное состояние не определяется конечными значениями приложенных нагрузок, а существенно зависит от истории нагружения [1]. Связано это с тем, что в областях налегания в результате взаимодействия поверхностей по закону сухого трения Кулона возникают зоны скольжения и сцепления. Так, при квазистатическом изменении внешних нагрузок в зависимости от некоторых параметров, скольжение на части трещины или на всей ее поверхности может прекратиться. В результате возможно образование зон сцепления двух типов с нулевым [2–5] и ненулевым скачком смещений [1, 6, 7]. Таким образом, для корректного исследования предельного равновесия трещин с областями налегания необходима разработка методов решения задач об эволюции полостей и трещин-разрезов в процессе нагружения, а также выявление закономерностей, ее сопровождающих [1, 6–9].

В данной работе в рамках двумерной задачи линейной теории упругости исследуется эволюция равновесного состояния гладкой криволинейной трещины произвольной формы со взаимодействующими с трением поверхностями в процессе сложного нагружения. Разработанный инкрементальный метод решения позволяет проанализировать широкий класс задач о предельном равновесии трещин сложной геометрии при различных способах нагружения. Кроме того, предложенный подход допускает естественное обобщение на задачи о росте трещин произвольной формы в процессе нагружения. В качестве примера получены решения задач о предельном равновесии криволинейных трещин-разрезов и уплощенных полостей в условиях двухосного растяжения – сжатия при различных способах приложения нагрузки.

Ранее на основе анализа асимптотики решения вблизи границ областей налегания и раскрытия, скольжения и сцепления, проводилось исследование пространственных задач о равновесии плоских в плане трещин-разрезов и уплощенных полостей [1, 7]. В указанных работах анализ асимптотик позволил проследить за эволюцией скачка касательных смещений в зоне налегания, получить проверяемые до решения задачи и допускающие удобную геометрическую интерпретацию условия начала скольжения поверхностей трещины, перехода их в состояние сцепления, а также установить единственность решения при заданной траектории нагружения. Анализ процесса скольжения поверхностей трещин в [9] был выполнен на основе перехода от исходной нелинейной задачи к задаче в приращениях, при этом удалось получить линейную задачу по приращению угла скольжения, и был установлен ряд свойств решения такой задачи. Примеры описания процесса скольжения поверхностей трещин различной геометрии при конкретных траекториях сложного нагружения рассмотрены в [8, 10]. В рамках плоской задачи исследовалась эволюция равновесного состояния прямолинейной трещины конечной длины [6, 11] и некоторых видов ломаных трещин [12]. В [5] получено решение задачи о произвольной криволинейной трещине с поверхностями, взаимодействующими по закону сухого трения Кулона. При этом рассматривались зоны сцепления с нулевым скачком смещений, то есть решение задачи было получено без учета истории нагружения.

1. Постановка краевой задачи. Рассмотрим равновесие изотропной линейно-упругой плоскости, ослабленной гладкой криволинейной трещиной (уплощенной полостью), вытянутой вдоль некоторой линии L (фиг. 1). Обозначим через t параметр, от-



Фиг. 1

считываемый вдоль линии L . Предположим, что под действием внешней нагрузки, изменяющейся в зависимости от параметра нагружения θ ($\theta \geq 0$), на части трещины (полости) $L_f(\theta)$ ее поверхности не контактируют и свободны от напряжений (фиг. 1). При этом в области налегания на некоторой ее части $L_c(\theta)$ имеет место скольжение, а остальная часть $L_a(\theta)$ находится в состоянии сцепления. Полагая, что при $\theta = 0$ расстояние между поверхностями трещины $v_n^o(t)$ ($v_n^o(t) \equiv 0$ соответствует трещине-разрезу) – однозначная функция и мало по сравнению с размерами L ($v_n^o(t) \ll L$), будем сносить условия на поверхностях трещины на линию разреза L (фиг. 1). В этом случае граничные условия задачи имеют вид

$$N^+(t, \theta) + iT^+(t, \theta) = N^-(t, \theta) + iT^-(t, \theta), \quad t \in L_a(\theta)$$

$$T^\pm(t, \theta) = \mu \frac{v_\tau(t, \theta)}{|v_\tau(t, \theta)|} N^\pm(t, \theta), \quad v_\tau = \frac{d(v_\tau^+ - v_\tau^-)}{d\theta}, \quad t \in L_c(\theta)$$

$$N^\pm(t, \theta) + iT^\pm(t, \theta) = 0, \quad t \in L_f(\theta) \quad (1.1)$$

$$v_n^+ - v_n^- = -v_n^o(t), \quad t \in L_a(\theta) \cup L_c(\theta)$$

$$v_\tau^+ - v_\tau^- = v_\tau^f(t, \theta), \quad t \in L_a(\theta)$$

где N^\pm и T^\pm – нормальная и касательная компоненты напряжения на поверхностях трещины, v_n^\pm и v_τ^\pm – нормальная и касательная компоненты вектора смещений, v_τ^f – фиксированный скачок касательной компоненты смещения в области сцепления, μ – коэффициент трения Кулона, $\sqrt{i} = -1$. Здесь и далее верхний знак "плюс" ("минус") означает принадлежность функции к левой (правой) поверхности трещины при движении в направлении увеличения параметра контура t . Отметим, что наличие областей сцепления с ненулевым скачком касательного смещения $v_\tau^f(t, \theta)$ обусловлено тем, что нормальное и касательное напряжения на трещине изменяются в процессе нагружения, что может привести к прекращению скольжения.

В областях реализации того или иного взаимодействия поверхностей трещины справедливы следующие условия:

$$\begin{aligned} v_n^+ - v_n^- > -v_n^0(t), \quad t \in L_f(\theta) \\ N^\pm(t, \theta) < 0, \quad t \in L_c(\theta) \cup L_a(\theta) \\ \mu |N^\pm(t, \theta)| > |T^\pm(t, \theta)|, \quad t \in L_a(\theta) \end{aligned} \quad (1.2)$$

которые позволяют выявлять состояние поверхностей трещины при данном параметре нагружения θ .

Будем предполагать, что напряжения и смещения являются непрерывными функциями координат и параметра нагружения.

Как отмечалось выше, равновесное состояние системы с трением является функционалом траектории нагружения, что обусловлено наличием областей сцепления с ненулевым скачком касательного смещения $v_\tau^f(t, \theta)$, значения которого при данном θ зависят от предыстории нагружения. Как следствие, для исследования эволюции системы при движении по траектории нагружения представляется целесообразным перейти от системы граничных условий (1.1) с дополнительными условиями (1.2) к условиям на приращения скачков смещений поверхностей трещины и напряжений на них.

Далее будем опускать аргумент θ у неизвестных функций, подразумевая, если не оговорено противное, что конечные величины записаны при параметре нагружения θ , а приращения соответствуют вариации параметра нагружения от θ до $\theta + \delta\theta$.

Граничные условия (1.1) при параметре нагружения $\theta + \delta\theta > 0$ имеют вид:

$$\begin{aligned} N + \delta N = 0, \quad T + \delta T = 0, \quad t \in L_f(\theta + \delta\theta) \\ [v_n] + \delta[v_n] = -v_n^0(t), \quad T + \delta T = \mu \frac{v_\tau + \delta v_\tau}{|v_\tau + \delta v_\tau|} (N + \delta N), \quad t \in L_c(\theta + \delta\theta) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$[v_n] + \delta[v_n] = -v_n^0(t), \quad [v_\tau] + \delta[v_\tau] = v_\tau^f(t, \theta + \delta\theta), \quad t \in L_a(\theta + \delta\theta)$$

Здесь и далее квадратными скобкам обозначены скачки соответствующих компонент вектора смещений на трещине. В силу указанного выше предположения о непрерывной зависимости решения от параметра нагружения $N(t, \theta + \delta\theta) = N + \delta N$, $T(t, \theta + \delta\theta) = T + \delta T$, $v_\tau(t, \theta + \delta\theta) = v_\tau + \delta v_\tau$, $[v_\tau(t, \theta + \delta\theta)] = [v_\tau] + \delta[v_\tau]$ и $[v_n(t, \theta + \delta\theta)] = [v_n] + \delta[v_n]$, что эквивалентно разложению решения в ряд по малому значению $\delta\theta$.

Условия в областях раскрытия, налегания и сцепления при $\theta + \delta\theta > 0$ будут

$$\begin{aligned} [v_n] + \delta[v_n] > -v_n^0(t), \quad t \in L_f(\theta) \\ N + \delta N < 0, \quad t \in L_c(\theta + \delta\theta) \cup L_a(\theta + \delta\theta) \\ \mu |N + \delta N| > |T + \delta T|, \quad t \in L_a(\theta + \delta\theta) \end{aligned} \quad (1.4)$$

При малой вариации $\delta\theta$ параметра нагружения скачок смещения в области сцепления не изменяется, – изменяется только положение границы области сцепления, т.е. $dv_\tau^f(t, \theta)/d\theta = 0$ при $t \in L_a(\theta)$. Кроме того, при расширении области сцепления в сторону областей раскрытия или скольжения можно пренебречь изменением скачка касательной компоненты смещений в последних ($dv_\tau(t, \theta)/d\theta \approx 0$, $t \in L_a(\theta + \delta\theta) \setminus L_a(\theta)$), что обусловлено непрерывной зависимостью смещений от координат и параметра

нагружения. Используя это обстоятельство, граничные условия (1.3) можно переписать в виде

$$\delta N = -N, \quad \delta T = -T, \quad t \in L_f(\theta + \delta\theta)$$

$$\delta[v_n] = -v_n^o(t) - [v_n], \quad \delta T - \mu \frac{v_\tau + \delta v_\tau}{|v_\tau + \delta v_\tau|} \delta N = -T + \mu \frac{v_\tau + \delta v_\tau}{|v_\tau + \delta v_\tau|} N, \quad t \in L_c(\theta + \delta\theta) \quad (1.5)$$

$$\delta[v_n] = -v_n^o(t) - [v_n], \quad \delta[v_\tau] = 0, \quad t \in L_a(\theta + \delta\theta)$$

Граничные условия (1.5) на приращения напряжений и скачков смещений с дополнительными условиями (1.4) дают возможность исследовать последовательное изменение взаимных смещений точек поверхностей трещины и напряжений на них в процессе нагружения по заданной траектории.

Для описания возможных режимов нагружения введем понятие траектории нагружения, как некоторой кривой на плоскости $(\tau, \mu\sigma)$. Здесь

$$\tau(t, \theta) = |T_0(t, \theta)|, \quad \sigma(t, \theta) = |N_0(t, \theta)|, \quad t \in L \quad (1.6)$$

Следует отметить ряд особенностей рассмотренной постановки задачи об эволюции криволинейной трещины (уплощенной полости) в процессе нагружения. Прежде всего, как отмечалось выше, указанная краевая задача нелинейна, так как упругие поля напряжений и смещений зависят от подлежащего определению распределения областей реализации краевых условий одного типа (и наоборот). Как следствие, полное решение, а именно определение неизвестных областей раскрытия, скольжения и сцепления, построение полей нормальных и касательных компонент напряжений и смещений, должно строиться самосогласованно. Это означает, что на каждом этапе решения распределение областей следует полагать известным, в соответствии с этим распределением должны строиться упругие поля, затем на их основе распределение областей необходимо уточнять. Кроме того, силы трения зависят от распределения нормальных напряжений в области контакта, последние, в общем случае, зависят от распределения касательных напряжений. Как следствие, при решении рассмотренных краевых задач не существует возможности разделения решения на последовательные этапы определения нормальных и касательных групп неизвестных, подобно тому, как осуществляется разделение задачи о плоской в плане пространственной трещине на нормальную и сдвиговую задачи [1, 7, 8].

На основе анализа граничных условий (1.1), можно сделать вывод о том, что для трещин-разрезов ($v_n^o(t) \equiv 0$) решения, получаемые без учета истории нагружения [5], должны совпадать с решениями, получаемыми при ее учете в том случае, если на поверхностях трещины не образуются области сцепления с ненулевым скачком смещений ($v_\tau^f(t, \theta) = 0$). Таким образом, в этих случаях нет необходимости проводить интегрирование по параметру нагружения. Кроме того, на этапах нагружения, когда области сцепления на поверхностях трещины не расширяются, и, следовательно, фиксированный скачок смещений на всей длине трещины не изменяется, также отсутствует зависимость решения от траектории нагружения.

Как отмечалось выше, для криволинейных трещин в общем случае выявление этапов перехода поверхностей в состояние сцепления необходимо осуществлять в процессе построения полного решения задачи. С этой точки зрения представляют значительный интерес приближенные оценки, позволяющие выявлять состояние поверхностей

до решения задачи с тем, чтобы не проводить интегрирование по параметру нагружения. Так, на основе неравенства

$$\min_{t \in L} (\tau - \mu\sigma) > 0 \quad (1.7)$$

можно выделить класс задач, в которых на поверхностях трещины не возникает областей сцепления. Напротив, при выполнении неравенства

$$\min_{t \in L} (\mu\sigma - \tau) > 0 \quad (1.8)$$

можно утверждать, что вся поверхность трещины находится в состоянии сцепления. Таким образом, неравенства (1.7) и (1.8) являются соответственно нижней и верхней оценкой условий нагружения, при которых будет наблюдаться зависимость решения от процесса приложения нагрузки. Отметим, что трещину с начальным раскрытием ($v_n^o(t) \neq 0$) в данном контексте можно рассматривать как трещину-разрез, к поверхностям которой приложены фиктивные нагрузки, индуцирующие раскрытие $v_n^o(t)$. В этом случае выявление наличия областей сцепления на основе (1.7) необходимо осуществлять, подставляя в выражения (1.6) суперпозицию действительных и фиктивных нагрузок.

Отметим также, что решение, полученное без учета истории нагружения [5], следует в рамках решения задачи (1.5), интерпретировать как одношаговое нагружения до конечных значений внешних нагрузок (при $v_n^o(t) \equiv 0$).

2. Основные уравнения. Предположим, что на поверхностях трещины напряжения непрерывны, смещения имеют разрыв

$$(u^+ - u^-) + i(v^+ - v^-) \equiv \frac{i(1 + \kappa)}{2G} g(t), \quad t \in L \quad (2.1)$$

причем на концах трещины скачок смещений (фиг. 1) равен нулю, т.е.

$$g(a) = g(b) = 0 \quad (2.2)$$

а напряжения и вращения на бесконечности отсутствуют. Здесь u^\pm и v^\pm – компоненты вектора смещений поверхностей трещины относительно прямоугольной декартовой системы координат (фиг. 1), $\kappa = 3 - 4\nu$ при плоской деформации и $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ при плоском напряженном состоянии, ν – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига.

Тогда, на основе принципа суперпозиции с использованием интегральных представлений комплексных потенциалов [13], напряжения на поверхностях трещины можно представить в виде [14]:

$$N(t') + iT(t') = -p_0(t') + \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{2g'(t)}{t-t'} dt + k_1(t, t') g'(t) dt + k_2(t, t') \overline{g'(t)} dt \right], \quad t' \in L \quad (2.3)$$

где $p_0(t) = -N_0 - iT_0$; N_0 и T_0 – напряжения на линии трещины в сплошной плоскости, регулярные ядра даются соотношениями

$$k_1(t, t') = \frac{d}{dt} \ln \frac{t-t'}{\bar{t}(-\bar{t}')} , \quad k_2(t, t') = -\frac{d}{dt} \frac{t-t'}{\bar{t}-\bar{t}'} \quad (2.4)$$

а скачок производной от смещений имеет вид (см. (2.1)):

$$g'(t) = -\frac{2iG}{1 + \kappa dt} d[(u + iv)^+ - (u + iv)^-] \quad (2.5)$$

Используя последнее соотношение, получим выражение скачков нормальных и касательных компонент смещений поверхностей трещины в виде

$$[v_n] = \frac{1+\kappa}{2G} \operatorname{Re} \left[\frac{d\bar{t}}{ds} \int_b^t g'(\zeta) d\zeta \right], \quad [v_\tau] = -\frac{1+\kappa}{2G} \operatorname{Im} \left[\frac{d\bar{t}}{ds} \int_b^t g'(\zeta) d\zeta \right] \quad (2.6)$$

Здесь предполагается, что, в соответствии с (2.2), скачки компонент смещений равны нулю в правой вершине трещины (точка b), s – параметр длины дуги.

На основе выражения (2.3), используя установленное в [9] свойство непрерывности скачков смещений на трещине при малой вариации как нагрузки, так и областей раскрытия и взаимных сдвиговых смещений, запишем вариацию напряжений в форме

$$\delta N(t') + i\delta T(t') = \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{2\delta g'(t)}{t-t'} dt + k_1(t, t') \delta g'(t) dt + k_2(t, t') \overline{\delta g'(t) dt} \right] - \delta p_0(t') \quad t' \in L \quad (2.7)$$

Приращения скачков нормальной и касательной компонент смещений в соответствии с (2.6) будут равны

$$\delta[v_n] = \frac{1+\kappa}{2G} \operatorname{Re} \left[\frac{d\bar{t}}{ds} \int_b^t \delta g'(\zeta) d\zeta \right], \quad \delta[v_\tau] = -\frac{1+\kappa}{2G} \operatorname{Im} \left[\frac{d\bar{t}}{ds} \int_b^t \delta g'(\zeta) d\zeta \right] \quad (2.8)$$

Таким образом, подставляя выражения (2.7) и (2.8) в граничные условия (1.5), получим систему интегральных уравнений относительно приращений производной от скачков смещений на трещине в виде

$$\operatorname{Re} \delta \Omega(t') = -N, \quad \operatorname{Im} \delta \Omega(t') = -T, \quad t' \in L_f(\theta + \delta\theta)$$

$$\operatorname{Im} \delta \Omega(t') + \mu \frac{v_\tau + \delta v_\tau}{|v_\tau + \delta v_\tau|} \operatorname{Re} \delta \Omega(t') = -T - \mu \frac{v_\tau + \delta v_\tau}{|v_\tau + \delta v_\tau|} N \quad \delta \Gamma_n(t') = -v_n^\circ(t) - [v_n], \quad (2.9)$$

$$t' \in L_c(\theta + \delta\theta)$$

$$\delta \Gamma_n(t') = -v_n^\circ(t) - [v_n], \quad \delta \Gamma_\tau(t') = 0, \quad t' \in L_a(\theta + \delta\theta)$$

$$\delta \Omega(t') = -\delta p_0(t') + \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{2\delta g'(t)}{t-t'} dt + k_1(t, t') \delta g'(t) dt + k_2(t, t') \overline{\delta g'(t) dt} \right], \quad t' \in L \quad (2.10)$$

$$\delta \Gamma_n(t) = \frac{1+\kappa}{2G} \operatorname{Re} \left[\frac{d\bar{t}}{ds} \int_b^t \delta g'(\zeta) d\zeta \right], \quad \delta \Gamma_\tau(t) = -\frac{1+\kappa}{2G} \operatorname{Im} \left[\frac{d\bar{t}}{ds} \int_b^t \delta g'(\zeta) d\zeta \right] \quad (2.11)$$

Эта система имеет единственное решение в классе функций, не ограниченных на концах контура интегрирования, при выполнении дополнительного условия [15]

$$\int_L \delta g'(t) dt = 0 \quad (2.12)$$

которое является следствием условий (2.2).

Система интегральных уравнений (2.9) относительно приращений скачков смещений с дополнительным условием (2.12) позволяет построить алгоритм расчета последовательных изменений взаимных смещений точек поверхностей трещины и напряжений на них в процессе нагружения по заданной траектории.

Отметим, что коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещины при данном значении θ выражаются через производную от скачков смещений в виде [14]:

$$k_1^\pm(\theta) - ik_2^\pm(\theta) = \mp \lim_{t \rightarrow l^\pm} [\sqrt{2|t - l^\pm|} g'(t, \theta)] \quad (2.13)$$

Здесь нижние знаки относятся к левой вершине трещины (началу) $t = a = l^-$, а верхние – к правой (концу) $t = b = l^+$ (фиг. 1).

3. Численная реализация решения. Будем исследовать эволюцию напряженно-деформационного состояния ненагруженной упругой плоскости, ослабленной криволинейной трещиной (уплощенной полостью), в процессе нагружения по заданной траектории, т.е. в начальный "момент" нагружения $\theta = 0$ будем полагать (см. (1.6)):

$$\tau(t, 0) = 0, \quad \sigma(t, 0) = 0, \quad [v_\tau(t, 0)] = 0, \quad [v_n(t, 0)] = v_n^0(t), \quad t \in L \quad (3.1)$$

Отметим, что данное предположение не влечет за собой ограничения общности, поскольку при движении по траектории нагружения предыдущее (нетривиальное) состояние является "начальным" для последующего.

Предположим, что при параметре нагружения $\theta \geq 0$ известны области раскрытия $L_f(\theta)$, скольжения $L_c(\theta)$ и сцепления $L_a(\theta)$, а также распределение напряжений $N(t, \theta)$, $T(t, \theta)$ ($t \in L$) и скачков смещений $v_n(t, \theta)$, $v_\tau(t, \theta)$ ($t \in L$).

Для численного решения системы сингулярных интегральных уравнений (СИУ) (2.9) с дополнительным условием (2.12) используем метод механических квадратур, основанный на определенных формулах для интерполяционного полинома и квадратурных формулах для сингулярных интегралов [14, 16–19].

Пусть форма гладкой криволинейной трещины L определяется параметрическим уравнением

$$x = x(\xi), \quad y = y(\xi), \quad |\xi| \leq 1 \quad (3.2)$$

Тогда переменная точка контура представляется в следующем виде:

$$t = \omega(\xi) = x(\xi) + iy(\xi), \quad t' = \omega(\eta) \quad (3.3)$$

Отметим, что для гладких контуров функции $x(\xi)$, $y(\xi)$, имеют непрерывные производные $x'(\xi)$, $y'(\xi)$, которые не обращаются одновременно в нуль.

Таким образом, используя замену переменных (3.3) и сохраняя обозначения известных функций, выражение (2.10) можно преобразовать к виду

$$\delta\Omega(\eta) = \frac{1}{\pi\omega'(\eta)} \int_{-1}^1 [K(\xi, \eta)\delta g'(\xi) + L(\xi)\overline{\delta g'(\xi)}]d\xi - \delta p_0(\eta), \quad |\eta| < 1 \quad (3.4)$$

Здесь и далее $\delta p_0(\eta) = \sigma p_0(\omega(\eta))$, а интегральные ядра имеют вид

$$K(\xi, \eta) = \operatorname{Re} \frac{\omega'(\eta)}{\omega(\xi) - \omega(\eta)}, \quad L(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \frac{\partial \omega(\xi) - \omega(\eta)}{\partial \eta \overline{\omega(\xi) - \overline{\omega(\eta)}}} \quad (3.5)$$

Далее будем полагать, что ядро $K(\xi, \eta)$ можно представить в форме

$$K(\xi, \eta) = 1/(\xi - \eta) + k(\xi, \eta) \quad (3.6)$$

при этом ядра $k(\xi, \eta)$, $L(\xi, \eta)$ и свободный член $p_0(\eta)$ – непрерывные на отрезке $[-1, 1]$ функции своих аргументов.

Поскольку производная от скачков смещений на концах изолированного разреза имеет корневую особенность, в силу аддитивности приращений производной от скачков смещений на трещине будем полагать, что вспомогательная функция

$$\delta u(\xi) = \delta g'(\xi) \sqrt{1 - \xi^2}, \quad |\xi| \leq 1 \quad (3.7)$$

непрерывна в области своего определения.

Применяя квадратурные формулы к выражению (3.4), с учетом (3.7), получим

$$\delta \Omega(\eta_m) = -\delta p_0(\eta_m) + \frac{1}{n\omega'(\eta_m)} \sum_{k=1}^n [K(\xi_k, \eta_m) \delta u(\xi_k) + L(\xi_k, \eta_m) \overline{\delta u(\xi_k)}] \quad (3.8)$$

$$\xi_k = \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2n}\right) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad \eta_m = \cos \frac{\pi m}{n} \quad (m = 1, 2, \dots, n-1) \quad (3.9)$$

Выражая (2.11), с учетом замен (3.3) и (3.7), перепишем в форме

$$\delta \Gamma_n(\eta) = \frac{1+\kappa}{2G} \operatorname{Re} \left[\frac{\overline{\omega'(\eta)}}{|\omega'(\eta)|} \int_1^\eta \frac{\delta u(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right] \quad (3.10)$$

$$\delta \Gamma_\tau(\eta) = -\frac{1+\kappa}{2G} \operatorname{Im} \left[\frac{\overline{\omega'(\eta)}}{|\omega'(\eta)|} \int_1^\eta \frac{\delta u(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right]$$

Рассмотрим интеграл следующего вида:

$$I(\eta) = \int_1^\eta \frac{\delta u(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad |\eta| < 1 \quad (3.11)$$

Заменой переменной $\xi = \cos x$, используя (3.9), преобразуем его к виду

$$I(\eta_m) = - \int_0^{\pi m/n} \delta u(\cos(x)) dx \quad (3.12)$$

Разделив промежуток интегрирования $x \in [0, \pi m/n]$ на m одинаковых интервалов длиной π/n , выберем в качестве их внутренних точек абсциссы $x_k = (2k-1)\pi/2n$. Тогда в соответствии с (3.9) ординатами в этих точках будут являться значения функции $\delta u(\xi_k)$, что позволяет аппроксимировать интеграл (3.12) суммой

$$I(\eta_m) = -\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{k \leq m} \delta u(\xi_k) \quad (3.13)$$

Таким образом, выражения (3.10) можно переписать так:

$$\delta \Gamma_n(\eta_m) = -\frac{1+\kappa\pi}{2G} \operatorname{Re} \left[\frac{|\omega'(\eta_m)|}{\omega'(\eta_m)} \sum_{k=1}^{k \leq m} \delta u(\xi_k) \right] \quad (3.14)$$

$$\delta \Gamma_\tau(\eta_m) = \frac{1+\kappa\pi}{2G} \operatorname{Im} \left[\frac{|\omega'(\eta_m)|}{\omega'(\eta_m)} \sum_{k=1}^{k \leq m} \delta u(\xi_k) \right]$$

На основе (3.8) и (3.14) система СИУ (2.9) сводится к алгебраической системе уравнений следующего вида:

$$\operatorname{Re} \delta \Omega(\eta_m) = -N, \quad \operatorname{Im} \delta \Omega(\eta_m) = -T, \quad \omega(\eta_m) \in L_f(\theta + \delta \theta)$$

$$\operatorname{Im} \delta \Omega(\eta_m) + \mu \frac{v_\tau + \delta v_\tau}{|v_\tau + \delta v_\tau|} \operatorname{Re} \delta \Omega(\eta_m) = -T - \mu \frac{v_\tau + \delta v_\tau}{|v_\tau + \delta v_\tau|} N \quad \delta \Gamma_n(\eta_m) = -v_n^0(\eta_m) - [v_n], \quad (3.15)$$

$$\omega(\eta_m) \in L_c(\theta + \delta \theta)$$

$$\delta \Gamma_n(\eta_m) = -v_n^0(\eta_m) - [v_n], \quad \delta \Gamma_\tau(\eta_m) = 0, \quad \omega(\eta_m) \in L_a(\theta + \delta \theta)$$

Здесь функции $\delta \Omega(\eta_m)$ и $\delta \Gamma_n(\eta_m)$, $\delta \Gamma_\tau(\eta_m)$ имеют вид (3.8) и (3.14) соответственно. Дополнительное условие (2.12) преобразуется к виду

$$\sum_{k=1}^n \delta u(\xi_k) = 0 \quad (3.16)$$

Таким образом, система алгебраических уравнений (3.15), (3.16) позволяет однозначно определить набор значений приращений неизвестной функции $\delta u(\xi_k)$, и в соответствии с формулами

$$\delta [v_n] |_{t=\omega(\eta_m)} = -\frac{1 + \kappa \pi}{2G} \frac{1}{n} \operatorname{Re} \left[\frac{\omega'(\eta_m)}{\omega'(\eta_m)} \sum_{k=1}^{k \leq m} \delta u(\xi_k) \right] \quad (3.17)$$

$$\delta [v_\tau] |_{t=\omega(\eta_m)} = \frac{1 + \kappa \pi}{2G} \frac{1}{n} \operatorname{Im} \left[\frac{\omega'(\eta_m)}{\omega'(\eta_m)} \sum_{k=1}^{k \leq m} \delta u(\xi_k) \right]$$

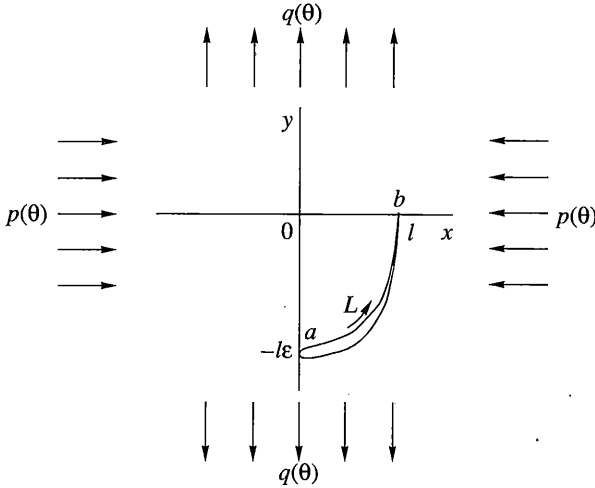
$$\delta N + i \delta T |_{t=\omega(\eta_m)} = -\delta p_0(\eta_m) + \frac{1}{n \omega'(\eta_m)} \sum_{k=1}^n [K(\xi_k, \eta_m) \delta u(\xi_k) + L(\xi_k, \eta_m) \overline{\delta u(\xi_k)}] \quad (3.18)$$

рассчитать приращения скачков смещений поверхностей трещины и напряжений на них при вариации параметра нагружения от θ до $\theta + \delta \theta$.

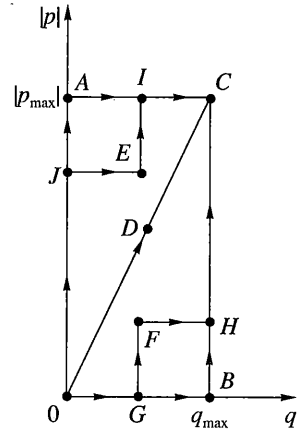
За начальное приближение неизвестных областей раскрытия, налегания и сцепления на каждом этапе инкрементального подхода примем распределение областей $L_f(\theta + \delta \theta)$, $L_c(\theta + \delta \theta)$ и $L_a(\theta + \delta \theta)$, определяемое из условий (1.4), в которых в качестве приращений нормальной и касательной компонент напряжения выбираются приращения δN_0 и δT_0 . Далее, на основе решения системы (3.15), (3.16), определяем приращения $\delta u(\xi_k)$ ($t \in L$), и, рассчитывая δT и δN на основе выражения (3.18), проверяем, в соответствии с условиями (1.12), адекватность положения областей раскрытия, скольжения и сцепления, осуществляя их уточнение вплоть до того момента, когда в рамках данной дискретизации перемещение границ областей прекращается (абсолютная погрешность определения положения границы в этом случае составляет $|\delta \xi| < 1/n$).

Таким образом, на каждом этапе инкрементального подхода реализуется итерационный процесс поиска областей раскрытия $L_f(\theta + \delta \theta)$, скольжения $L_c(\theta + \delta \theta)$ и сцепления $L_a(\theta + \delta \theta)$, причем результатом этого процесса является расчет скачков смещений поверхностей трещины и распределения напряжений на них при параметре нагружения $\theta + \delta \theta$.

Предложенный метод позволяет пошаговым образом отслеживать изменение равновесного состояния трещин в процессе приложения внешней нагрузки. Вопрос о выявлении режима скольжения, сложность решения которого для криволинейных тре-



Фиг. 2



Фиг. 3

шин обсуждалась выше, представляется целесообразным решать следующим образом. При движении по траектории нагружения направление скольжения (см. третье уравнение (3.15)) на каждом этапе инкрементального подхода первоначально следует определять на основе анализа знака v_τ , при необходимости осуществляя коррекцию при противоположном знаке расчетного значения $v_\tau + \delta v_\tau$. При этом, для точной идентификации "момента" изменения режима скольжения, следует уменьшать приращение $\delta\theta$, реализуя, таким образом, адаптивный по отношению к качественному изменению процесса инкрементальный алгоритм.

Коэффициенты интенсивности напряжений определим по формуле

$$k_1^\pm(\theta) - ik_2^\pm(\theta) = \mp \sqrt{|\omega'(\pm 1)|} u(\pm 1, \theta) / \omega'(\pm 1) \quad (3.19)$$

которая следует из (2.13) на основе (3.3) и (3.7). Используя интерполяционный полином Лагранжа, получим

$$u(-1, \theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} u(\xi_k, \theta) \operatorname{tg} \frac{2k-1}{4n} \pi \quad (3.20)$$

$$u(1, \theta) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k u(\xi_k, \theta) \operatorname{ctg} \frac{2k-1}{4n} \pi$$

Отметим, что анализ эволюции равновесного состояния трещин в полубесконечных (полуплоскость, полоса и клин) и конечных (круг) областях можно реализовать идентичным образом, поскольку интегральные ядра (2.4) для этих областей известны в замкнутой форме. Кроме того, на основе предложенного метода можно проводить исследование краевых трещин в указанных областях.

4. Результаты расчета. В качестве примера применения предложенного инкрементального метода решения задач о трещинах с областями налегания рассмотрим эволюцию криволинейной трещины-разреза в форме дуги эллипса в условиях двухосного растяжения – сжатия (фиг. 2) по различным траекториям нагружения $q = q(\theta) \geq 0$, $p, p = p(\theta) \leq 0$ (фиг. 3). Очевидно, что для указанных процессов приложения нагрузки

Таблица 1

	БУИИ	ODC	OAC	OJEIC	OGFHC	OBC
$k_1^-/q_{\max}\sqrt{l}$	1.0455	1.0455	1.0455	1.0455	1.0976	1.1320
$k_2^-/q_{\max}\sqrt{l}$	1.0792	1.0792	1.0792	1.0792	1.1194	1.1445
$k_2^+/q_{\max}\sqrt{l}$	0	0	0	0	0.1205	0.2411
S_{fr}/S_{cr}	0.1699	0.1699	0.1699	0.1699	0.1729	0.1759
S_{st}/S_{cr}	0.2724	0.2724	0.2724	0.2724	0.3848	0.3933
$\frac{\langle v_t^f \rangle}{l(1+\kappa)q_{\max}/G}$	0	0	0	0	0.0586	0.1014

(траектории ODC, OAC, OJEIC, OGFHC и OBC) взаимное смещение точек поверхностей трещины в области скольжения вблизи точки $(l, 0)$ (правая вершина трещины) будет монотонно увеличиваться, что проверяется в процессе решения. Кроме того, следует отметить, что увеличение сжимающей нагрузки $|p(\theta)|$ на том или ином этапе нагружения приведет к образованию области сцепления, примыкающей к этой вершине.

В табл. 1 приведены расчетные значения коэффициентов интенсивности напряжений (отнесенные к $q_{\max}\sqrt{l}$), относительные размеры областей раскрытия S_{fr} и сцепления S_{st} (S_{cr} – длина трещины), а также средняя величина фиксированного скачка касательной компоненты смещений в области сцепления $\langle v_t^f \rangle$ (отнесенная к $l(1+\kappa)q_{\max}/G$) при различных траекториях нагружения (фиг. 3). Отметим, что из (3.17) и (3.18) следует, что приращения скачков смещений для данной задачи пропорциональны $l(1+\kappa)\delta p_0/G$ ($\delta[v] \sim (1+\kappa)\delta u/G$, $\delta u \sim l\delta p_0$). Следовательно, поскольку напряжения на линии трещины являются линейной однородной функцией внешних нагрузок, величина скачка смещений в конечной точке траектории нагружения пропорциональна $l(1+\kappa)q_{\max}/G$.

Расчет проводился при $\varepsilon = 2$, $\mu = 0.4$, $p_{\max}/q_{\max} = 5$. В первом столбце (БУИИ) для сравнения приведены расчетные значения, полученные при решении аналогичной задачи без учета истории нагружения.

Как видно, траектория ODC (простое нагружение) в данном случае приводит к решению, которое совпадает с решением, полученным в рамках неинкрементального подхода, т.е. без учета истории нагружения. При движении по траектории OAC (OJEIC) на участке OA (OJ) не происходит изменения положения областей сцепления, скольжения и раскрытия изменяются лишь скачки смещений в последних. Связано это с тем, что при однопараметрическом нагружении коэффициенты интенсивности напряжений на границах областей налегания и раскрытия, скольжения и сцепления представимы в виде $k_i^\pm = p(\theta)f(t_i^\pm, F_{\text{geom}})$ ($i = 1, 2$). Здесь t_i^\pm – границы характерных областей, F_{geom} – функция, зависящая только от геометрии трещины и ее ориентации по отношению к

внешней нагрузке. Как следствие, положение границ характерных областей, определяемое уравнением $f(t_i^\pm, F_{\text{geom}}) = 0$, не изменяется на указанных участках траекторий нагружения. Таким образом, скачок касательной компоненты смещения в области сцепления при достижении точки А(Ј) оказывается равным нулю (см. фиг. 3). Участок АС (ЈЕ) траектории ОАС (ОЈЕІС) – участок активного нагружения, так как на нем происходит уменьшение размера области сцепления. Как следствие, нагружение по траектории ОАС не приводит к возникновению области сцепления с ненулевым скачком смещений, что обуславливает получение решения, совпадающего с неинкрементальным. Напротив, при движении по участку ЕІ траектории ОЈЕІС в увеличивающейся области сцепления имеет место ненулевой скачок смещений, однако последующее активное нагружение (участок ІС) приводит к значительному ее уменьшению, и, как следствие, к аналогичному решению. Таким образом, полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что монотонные (без разгрузки) траектории нагружения, все точки которых лежат в треугольнике ОАС, приводят к решениям, совпадающим с решениями, полученными без учета истории нагружения.

Нагружение по траекториям ОGFHC и ОВС приводит к возникновению области сцепления с ненулевым скачком касательной компоненты смещений. При этом КИН k_2^+ в правой вершине трещины оказывается отличным от нуля в конечной точке траектории, в то время как область нагружения примыкает к этому концу. Следовательно, рост трещины при таких условиях нагружения может происходить и при наличии на ее поверхности области сцепления. Кроме того, следует отметить, что изменение характера нагружения от траектории ОАС (сжатие, затем растяжение) к траектории ОВС (растяжение, а затем сжатие) сопровождается существенным (около 10%) ростом КИН в левой вершине трещины.

Таким образом, для рассмотренной задачи удалось выделить класс траекторий нагружения, для которых решения совпадают с решениями, полученными без учета истории нагружения. С другой стороны, решения, полученные для траекторий ОGFHC и ОВС, заметно отличаются от решений, полученных в рамках данного класса. Последнее обстоятельство обуславливает необходимость в общем случае проводить расчеты в соответствии с предложенным инкрементальным методом.

Для исследования влияния начального раскрытия трещины на ее предельное равновесие рассмотрим два вида криволинейных уплощенных полостей – с плавносмыкающимися поверхностями

$$v_n^o(\xi) = v_{\text{max}}(1 - \xi^2)^{3/2} \quad (4.1)$$

и с эллиптической формой раскрытия вблизи вершин

$$v_n^o(\xi) = v_{\text{max}}(1 - \xi^2)^{1/2} \quad (4.2)$$

Здесь v_{max} – максимальное раскрытие поверхностей, которое следует выбирать из соображений малости начального раскрытия полости по сравнению с ее длиной. Расчет проводился для $v_{\text{max}} = 0.1l$ (см. фиг. 2).

В табл. 2 и 3 приведены результаты решения задач об уплощенных полостях соответственно в форме (4.1) и (4.2). Рассматривались, как и выше, уплощенные полости вдоль дуги эллипса (фиг. 2) при нагружении по траекториям, указанным на фиг. 3. Другие параметры расчета также аналогичны вышеизложенным. Следует отметить, что, как указывалось выше, исследовалась эволюция напряженно-деформированного состояния ненагруженной упругой плоскости, ослабленной криволинейной полостью (см. формулы (3.1)). Это означает, что расчетные значения коэффициентов интенсивности напряжений обусловлены только изменением напряженного состояния исходной

Таблица 2

	ODC	OAC	OJEIC	OGFHC	OBC
$k_1^-/q_{\max}\sqrt{l}$	1.0615	1.0593	1.0593	1.1156	1.1479
$k_2^-/q_{\max}\sqrt{l}$	1.1804	1.1786	1.1786	1.2211	1.2444
$k_2^+/q_{\max}\sqrt{l}$	0	0	0	0.1202	0.2408
S_{fr}/S_{cr}	0.1759	0.1759	0.1759	0.1789	0.1820
S_{st}/S_{cr}	0.2724	0.2686	0.2686	0.3890	0.3933
$\frac{\langle v_{\tau}^f \rangle}{l(1+\kappa)q_{\max}/G}$	0.0025	0.0009	0.0009	0.0663	0.1071

Таблица 3

	ODC	OAC	OJEIC	OGFHC	OBC
$k_1^-/q_{\max}\sqrt{l}$	1.0568	1.0527	1.0527	1.1105	1.1427
$k_2^-/q_{\max}\sqrt{l}$	1.2031	1.2003	1.2003	1.2417	1.2654
$k_2^+/q_{\max}\sqrt{l}$	0.0075	0.0092	0.0092	0.1093	0.2288
S_{fr}/S_{cr}	0.1850	0.1850	0.1850	0.1881	0.1913
S_{st}/S_{cr}	0.2761	0.2686	0.2686	0.3890	0.3975
$\frac{\langle v_{\tau}^f \rangle}{l(1+\kappa)q_{\max}/G}$	0.0073	0.0020	0.0020	0.0673	0.1088

ненагруженной полости (так, например, для случая (4.2) расчетные значения КИН k_1^+ конечны и отрицательны, т.е. $k_1^+ = -0.20$).

Как видно из табл. 2 и 3, во всех рассмотренных случаях возникают области сцепления с ненулевым скачком касательной компоненты смещения, в частности, и в случае простого нагружения (траектория ODC). Траектории OAC и OJEIC эквивалентны, поскольку активное нагружение на участке IC приводит к уменьшению области сцепления, нивелируя в конечной точке траектории разницу в фиксированном скачке смещений, обусловленную различием участков траекторий JA1 и JE1. Для трещины с плавно-смыкающимися поверхностями характерно возникновение области сцепления, примыкающей к правой вершине трещины, на начальном этапе нагружения (за ис-

ключением траекторий OGFHC и OBC), что обуславливает равенство нулю КИН k_2^+ . Отметим, что нагружение по траекториям OGFHC и OBC (растяжение, а затем сжатие) сопровождается значительным увеличением размера области сцепления и величины касательной компоненты скачка смещений в ней. Как следствие, заметно изменяются и коэффициенты интенсивности напряжений, особенно вблизи правой вершины трещины.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что форма начального раскрытия трещины, особенно вблизи ее вершин, оказывает значительное влияние на напряженно-деформированные состояния, при которых трещина может достигать предельного равновесия. Отметим также, что для адекватной оценки предельного равновесия уплотненных полостей необходимо использовать инкрементальный метод, поскольку в процессе эволюции их напряженно-деформированного состояния, как правило, возникают области сцепления с ненулевым скачком касательной компоненты смещений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 00-15-96066).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В. Равновесие трещин и полостей при сложном нагружении с учетом областей контакта и свободной поверхности, скольжения и сцепления. М.: ИПМ АН СССР, Препринт № 276. 1986. 63 с.
2. Chang F.-K., Cotterill M. Effects of partial closure and friction on a radial crack emanating from a circular hole // Intern. J. Fracture. 1985. V. 28. P. 29–36.
3. Житников Ю.В., Тулинов Б.М. Равновесие разреза по дуге окружности в сложноподвижном состоянии // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 3. С. 521–524.
4. Житников Б.В., Тулинов Б.М. Равновесие разреза по дуге окружности при неоднородном взаимодействии берегов // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 874–880.
5. Андреев А.В., Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В. Равновесие криволинейных разрезов с учетом образования областей налегания, скольжения и сцепления берегов трещины. М.: ИПМ РАН, Препринт № 676. 2001. 35 с.
6. Житников Ю.В., Тулинов Б.М. Взаимодействие между берегами разреза в сложноподвижном состоянии // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 168–172.
7. Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В. Исследование пространственных смешанных задач с неизвестными границами при сложном нагружении упругой среды. // Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Наука, 1988. С. 57–73.
8. Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В. Численно-аналитический метод решения пространственных смешанных задач теории упругости с неизвестной границей для полостей и трещин. Ч. II // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 5. С. 65–78.
9. Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В. Анализ процесса скольжения поверхностей трещины с учетом сил трения при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 139–148.
10. Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В. Напряженное состояние упругой среды, ослабленной эллиптической трещиной со взаимодействующими поверхностями, при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 1. С. 126–132.
11. Беркович П.Е., Моссаковский В.И., Рыбка В.М. Влияние истории внешнего нагружения на напряженно-деформированное состояние трещиноватой среды при наличии трения // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 4. С. 137–142.
12. Zang W., Gudmundson P. Frictional contact problems of kinked crack modeled by a boundary integral method // Report 121. Department of Solid Mechanics. Royal Institute of Technology. Stockholm, Sweden. TRITA-HFL-0121. 1989.
13. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

14. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 323 с.
15. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
16. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
17. *Линьков А.М.* Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. СПб: Наука, 1999. 382 с.
18. *Chawla M.M., Ramacrishnan T.R.* Modified Gauss – Jacobi quadrature formulas for the numerical evaluation of Cauchy type singular integrals // BIT. 1974. V. 14. № 1. P. 14–21.
19. *Erdogan F.E., Gupta G.D., Cook T.S.* The numerical solutions of singular integral equations // Mechanics of Fracture. V. 1. Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Leyden: Noordhoff Intern. Publ. 1973. P. 368–425.

Москва

Поступила в редакцию
23.07.2001