

УДК 539.374

© 2003 г. А.Г. ЗАЛАЗИНСКИЙ, А.А. ПОЛЯКОВ, А.П. ПОЛЯКОВ

О ПЛАСТИЧЕСКОМ СЖАТИИ ПОРИСТОГО ТЕЛА

При решении краевых задач механики обработки давлением некомпактных материалов необходимо учитывать необратимые деформации объёмного сжатия (растяжения). А. Кулоном в теории давления грунта была рассмотрена пирамида предельного состояния [1]. Условия текучести для пластически сжимаемой среды в виде пирамиды Кулона, ограниченной плоскостью постоянного гидростатического давления (пирамида Кулона – Мора) было использовано в [2, 3]. Мизесом и Шлейхером было предложено условие текучести, которому в пространстве напряжений соответствует круговой конус, ограниченный плоскостью постоянного гидростатического давления (конус Мизеса – Шлейхера) [1]. Это условие рассмотрено в работах [3–5]. Названные условия текучести относятся к кусочно-гладким. Модели идеальных сжимаемых пластических сред для кусочно-гладких поверхностей текучести исследованы Д.Д. Ивлевым и Г.И. Быковцевым [6]. Показано, что соотношения таких моделей можно рассматривать как теорию упрочняющегося пластического тела с сингулярными поверхностями нагружения [6]. Р. Грином предложено условие текучести эллиптического типа [7]. Указанному условию текучести в пространстве главных напряжений соответствует эллипсоид вращения, ось симметрии которого совпадает с гидростатической осью. Применяется также условие текучести цилиндрического типа [3]. Для этого условия в отличие от перечисленных выше отсутствует дилатансионное соотношение, связывающее характеристики объёмной и сдвиговой деформации [3]. Краевые задачи механики обработки давлением некомпактных материалов решены рядом авторов [3, 5, 8–14], при этом, как правило, использованы условие текучести эллиптического типа, пирамида Кулона – Мора или конус Мизеса – Шлейхера. Ряд задач с использованием цилиндрического условия текучести решен в [3]. В данной работе условие текучести цилиндрического типа применили к решению краевых задач механики пластического течения пористых сред в случаях, когда дилатансия отсутствует или влияние этого эффекта несущественно. Например, отмечено отсутствие уплотнения в зоне опережения при прокатке [8] и в зеве матрицы при экструзии пористого материала [9]. Заметим также, что условие текучести цилиндрического типа упрощает решение краевых задач с разрывными полями скоростей и напряжений. В подобных случаях применение цилиндрического условия текучести для оценки энергосиловых параметров процессов пластической деформации некомпактных материалов и расчёта изменения пористости является целесообразным и эффективным.

Для численной реализации решений краевых задач уравнение поверхности текучести необходимо дополнить соотношениями, связывающими пределы текучести на сжатие и сдвиг с текущей пористостью. Обзор наиболее известных зависимостей приведен в [15]. В предлагаемой статье приведены зависимости, позволяющие в общем случае учесть разнообразную геометрию пор. Для иллюстрации введенных соотношений при условии текучести цилиндрического типа решили задачу двухстороннего прессования пористой осесимметричной заготовки, а также применили кинематически допустимые поля скоростей с поверхностями сильного разрыва для решения краевых задач процессов бокового полунепрерывного выдавливания и экструзии пористой массы.

1. Условие текучести цилиндрического типа имеет вид [3, 13]:

$$T = \tau_s^*(\tau_s, \theta, K_1, \zeta), \quad \sigma = \sigma_s^*(\tau_s, \theta, K_2, \eta) \quad (1.1)$$

где $T = \sqrt{0.5s_{ij}s_{ij}}$ – интенсивность касательных напряжений, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, σ – среднее нормальное напряжение, τ_s^* – предел текучести на сдвиг пористого материала, σ_s^* – предел текучести на гидростатическое давление, τ_s – предел текучести на сдвиг компактного материала, θ – пористость, $\theta = 1 - \rho$, ρ – относительная плотность, K_1, K_2, η – коэффициенты, характеризующие форму, расположение и различие в размерах отдельных пор.

Поверхность нагружения в пространстве напряжений представляет собой цилиндр Мизеса радиусом τ_s^* , ось симметрии которого совпадает с гидростатической осью и ограниченный “доньшками”, соответствующими пределам текучести материала на всестороннее растяжение (сжатие). Для различных вариантов пластического течения при цилиндрическом условии текучести имеем [3]:

На поверхности цилиндра

$$T = \tau_s^*, \quad \xi = 0, \quad |\sigma| \leq |\sigma_s^*| \quad (1.2)$$

где $\xi = \xi_{ij}\delta_{ij}$, $\xi_{ij} = 0.5(v_{i,j} + v_{j,i})$ – компоненты тензора скоростей деформации; на “доньшках” (случай всестороннего растяжения/сжатия)

$$T < \tau_s^*, \quad \xi \neq 0, \quad |\sigma| = |\sigma_s^*| \quad (1.3)$$

на ребре поверхности текучести

$$T = \tau_s^*, \quad \xi \neq 0, \quad |\sigma| = |\sigma_s^*| \quad (1.4)$$

Из ассоциированного закона течения следует связь между компонентами тензора напряжений и тензора скоростей деформации

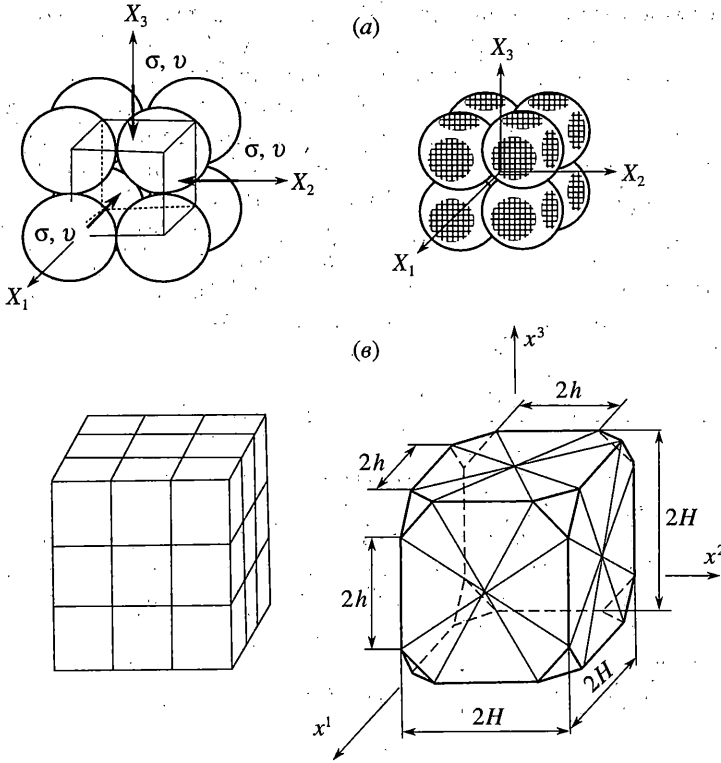
$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = \frac{2T}{H} \left(\xi_{ij} - \frac{1}{3}\xi\delta_{ij} \right) \quad (1.5)$$

$H = \sqrt{2e_{ij}e_{ij}}$ – интенсивность скоростей деформаций сдвига; $e_{ij} = \xi_{ij} - \xi\delta_{ij}/3$.

2. Для численной реализации решений краевых задач необходимо конкретизировать зависимости $\dot{T} = \tau_s^*(\tau_s, \theta, K_1, \zeta)$ и $\sigma = \sigma_s^*(\tau_s, \theta, K_2, \eta)$.

В соответствии с методологией структурно-феноменологического подхода рассмотрим модель среды, представляющей собой конгломерат статистически однородных плотно упакованных частиц изометрической формы; на границах локализуются несплошности. Укладка частиц (фиг. 1, а), принимающих после деформации форму многогранников, образует регулярные структуры – решетки, подобные кристаллографическим [16]. В узлах решетки располагаются дефекты – поры, заполненные газовой фазой. При пластическом сжатии плотно уложенных частиц, изначально имеющих точечные контакты между собой, происходит их течение в свободное пространство (поры). Точечные контакты развиваются в контактные поверхности; форма частиц изменяется, приближаясь к многогранной; поры уменьшаются, оставаясь до некоторого момента многогранными, затем, при малой пористости, принимают сферическую форму [17].

Для введенной модели пористого уплотняемого тела необходимо определить нагрузки развитого пластического течения, формоизменение и изменение объема пор. В силу статистической однородности свойств деформируемого материала для ввода физических уравнений достаточно решить задачу для характерной ячейки, представляющей статистический ансамбль. Для решения использована экстремальная теорема идеальной пластичности структурно-неоднородных тел [17, 18].



Фиг. 1

Для определенности в ортогональной системе координат рассмотрим некоторый объем, упакованный макро-частицами в форме многогранников. Шесть граней каждой частицы образуют поверхности раздела, а восемь ограничивают поры (фиг. 1, b). Пусть каждая ячейка пластически сжимаемой среды обладает кусочно-однородными свойствами и состоит из тетраэдров, образующих жесткопластический каркас и занимающих объем $\Omega = \omega_f U \omega_p$ (ω_p – объем поры). Внешняя поверхность ячейки $S = S_F U S_V$ нагружается системой поверхностных сил $\mu F = \{\mu F_i\}$ ($i = 1, 2, 3$), где μ – возрастающий от нуля неопределенный множитель. Заданы граничные условия $\sigma_{ij} n_j = \mu F_i$ ($x \in S_F$); $v_{is} = v_{is}^0$ ($x \in S_V$). Для рассматриваемой ячейки внутри Ω связь между компонентами девиатора напряжений и тензора скоростей деформации определена в виде (1.5). С увеличением внешних сил ячейка переходит в состояние общей текучести при достижении предельной нагрузки $\mu^* F$. Для ее определения применили кинематическую теорему:

$$\int_S F_i^0 v_i ds \leq \sum_{k=1}^K \int_{\omega_k} \sigma_{ij} \dot{\xi}_{ij} d\omega + \sum_{m=1}^M \int_{S_m} \tau_s [v_m] ds \quad (2.1)$$

где $[v_m]$ – скачок касательной компоненты скорости на S_m , точка в верхнем индексе означает варьируемые величины, K – число тетраэдров в ячейке, M – количество допускаемых поверхностей разрыва скоростей.

Применив соотношения метода конечных элементов, вычислим диссипацию энергии для тетраэдров, входящих в элементарную ячейку. При этом полагаем, что все тетраэдры, кроме тетраэдра, представляющего пору, представляют собой жесткие тела, и могут перемещаться относительно друг друга за счет скольжения по своим граням, на которых действуют нормальные и касательные напряжения. Величину касательных напряжений примем равной пределу текучести на сдвиг компакта, нормальные напряжения определим из уравнений равновесия тетраэдров. Вычисления выполнили для случая всестороннего равномерного сжатия пористой ячейки в поле среднего напряжения σ и для деформации чистого сдвига по плоскостям, ослабленным дефектами (порами) многогранной или сферической формы. В результате получим верхнюю оценку гидростатического давления p^+ (среднего нормального напряжения), необходимого для изостатического сжатия пористой массы:

$$\frac{p^+}{\tau_s} = 1 + \sqrt{2} \frac{a^*}{1-a^*} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3+2a^*+(a^*)^2}{1-a^*} + \frac{1}{2} (1+2a^*-(a^*)^2) \frac{q}{\tau_s} \quad (2.2)$$

где $a^* = a/A$ – безразмерный параметр, характеризующий пористость (смысл его ясен из фиг. 1, b), q – давление газовой фазы в поре.

Для расчета давления газа в поре полагалось, что до достижения некоторого критического значения пористости θ^* обеспечивается отток газа из пор путем фильтрации, после чего давление газа повышается в соответствии с уравнением $q = q^* \theta^* (1 - \theta) / [\theta (1 - \theta^*)]$, где θ^* , q – пористость и внутреннее давление в порах в момент прекращения оттока газа соответственно ($\theta < \theta^*$).

Формулу (2.2) аппроксимируем зависимостью

$$\sigma_s^* = -2/\sqrt{3} \tau_s K_2 \ln(\eta/\theta) + q \quad (2.3)$$

Для предела текучести на сдвиг пористого тела получим:

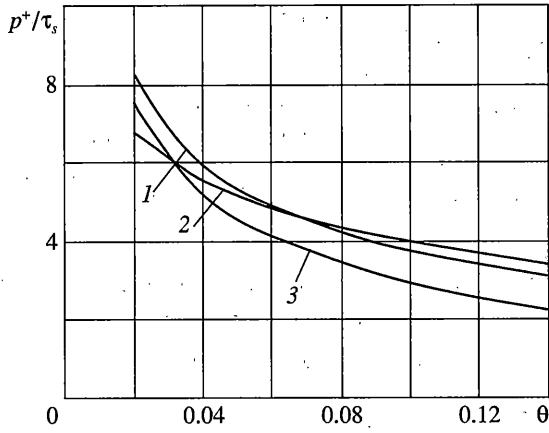
$$T = \tau_s^* = \tau_s (1 - K_1 \theta^5) \quad (2.4)$$

Значения параметров следующие: для сферических пор $1 \leq K_1 \leq 1.63$, $K_2 \geq 1$, $0.48 \leq \eta \leq 1$, $\zeta = 2/3$. Для хаотично расположенных дефектов изометрической формы: $K_1 = 1$, $\eta = 1$, $\zeta = 2/3$. В случае умеренной пористости $K_1 = \sqrt[3]{0.624}$ для примитивной кубической упаковки частиц.

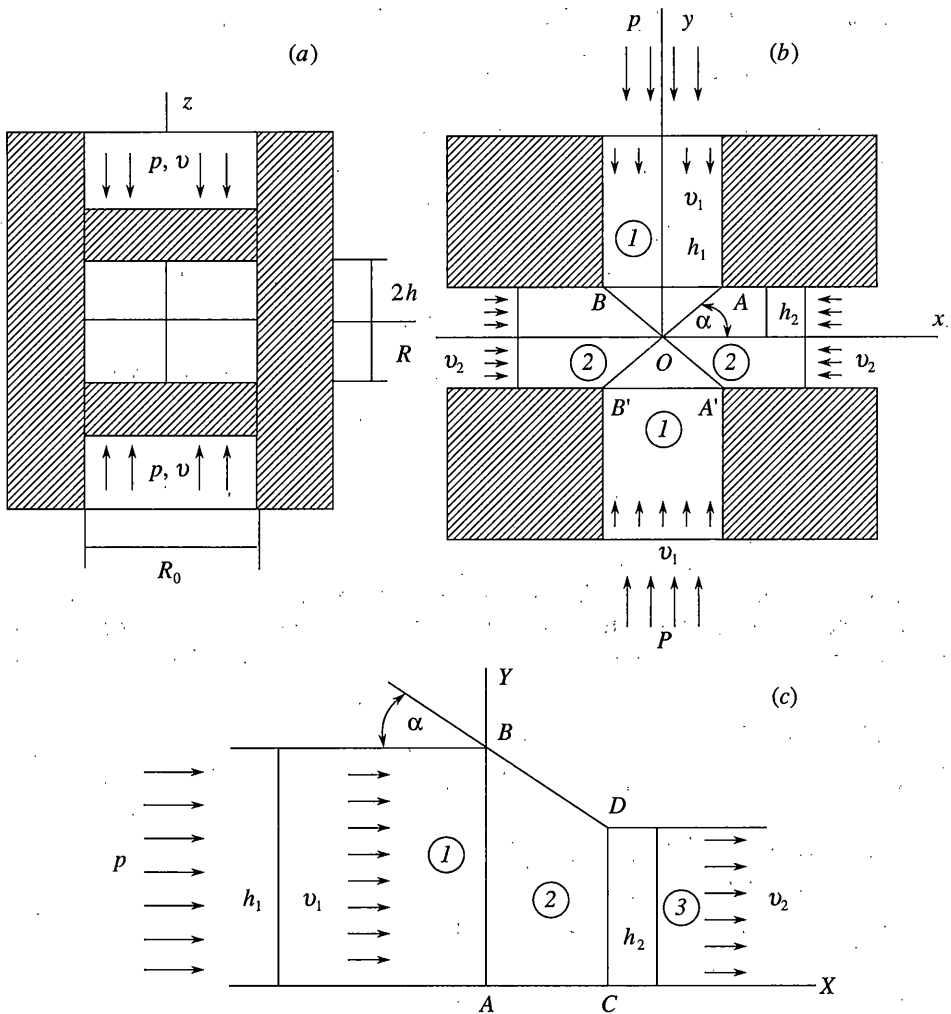
На фиг. 2 представлены результаты расчета по формулам (2.2) (кривая 1) и (2.3) для сферических пор (кривая 2, $K_2 = 1.5$, $\eta = 1$), а также по зависимости [19]: $p/\tau_s = 2(1 - \theta)^{3/2} / (\sqrt{3} \theta^{1/2})$ (кривая 3). Все кривые получены при $q = 0$. Отметим хорошую корреляцию результатов.

3. Рассмотрим задачу двухстороннего прессования пористой осесимметричной заготовки (фиг. 3, a). При постановке задачи применим подход Лагранжа, рассматривая изменение во времени состояния индивидуализированных материальных частиц деформируемого тела.

В соответствии с принятой схемой пластического течения верхний и нижний пуансоны перемещаются навстречу друг другу со скоростями v , при этом объём заготовки с исходными размерами $2h_0$ и $2R_0$ уменьшается только за счет изменения объёма пор, насыщающих жесткопластический каркас. На контакте с инструментом действуют напряжения прилипания; на контакте с пресс-формой действуют касательные напряжения трения, задаваемые по закону $\tau = f\tau_s^*$, где f – коэффициент пропорциональности в законе трения. Силы трения препятствуют сжатию заготовки и приводят к существенной неоднородности деформаций по объёму прессовки. Рассматри-



Фиг. 2



Фиг. 3

валась заключительная стадия прессования, при которой деформируется вся заготовка (плотность меняется во всем объёме).

В качестве системы отсчета выберем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) . В качестве лагранжевых координат берем начальные координаты частиц заготовки r_0, φ_0, z_0 и время t . Перемещение частиц пористой массы рассмотрим одновременно в системе отсчета и в безразмерных координатах $R = r_0/R_0, \varphi_0, Z = z_0/h_0$. Полагаем, что в процессе пластического деформирования сопутствующая система координат остается цилиндрической и ортогональной, тогда для компонент фундаментального метрического тензора в любой момент времени $g_{rr} = g_{zz} = 1, g_{\varphi\varphi} = R^2, g_{r\varphi} = g_{\varphi z} = g_{zr} = 0$. Символы Кристоффеля второго рода в данном случае равны нулю.

Введем простейшее статически возможное поле напряжений $\sigma^{r\varphi} = \sigma^{\varphi z} = 0, \sigma^{rz} = f\tau_s^* R, \sigma^{rr} = \sigma^{\varphi\varphi}, \sigma^{zz} = \sigma^{zz}(Z)$, удовлетворяющее уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma^{rr}}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial \sigma^{rz}}{\partial R} + \frac{R_0 \partial \sigma^{zz}}{h_0 \partial Z} + \frac{1}{R} \sigma^{rz} = 0 \quad (3.1)$$

и граничным условиям $\sigma^{rz}(R_0) = f\tau_s^*$. Интегрируя (3.1) получаем

$$\sigma^{rr} = \sigma^{rr}(Z), \quad \sigma^{zz} = \sigma^{zz}|_{Z=0} - 2\tau_s^*(h_0/R_0)Z \quad (3.2)$$

Для статически возможного поля напряжений должно выполняться условие текучести $T = \tau_s^*$, в соответствии с которым на оси симметрии

$$\sigma^{rr}|_{R=0} = \sigma^{zz}|_{R=0} + \sqrt{3}\tau_s^* \quad (3.3)$$

Зная компоненты тензора напряжений, вычисляем σ :

$$\sigma = [\sigma^{zz}(Z) + 2\sigma^{rr}(Z)]/3 \quad (3.4)$$

определяющее распределение плотности вдоль оси симметрии в меридиональном сечении. Обозначая $\tilde{\sigma} = \sigma/(\sqrt{3}\tau_s) = (2/3)\ln\theta$ для расчета пористости на оси симметрии заготовки, имеем

$$\theta|_{R=0} = \begin{cases} \exp[(3/2)\tilde{\sigma}] & \text{при } \sigma \leq (2/3)\ln\theta_0 \\ \theta_0 & \text{при } \tilde{\sigma} > (2/3)\ln\theta_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

В рассматриваемом случае деформация объёмного сжатия заготовки равна её деформации вдоль оси Z . Поскольку объём заготовки уменьшается только за счет изменения объёма пор, а перемещения частиц вдоль осей φ, R приняты равными нулю, имеем

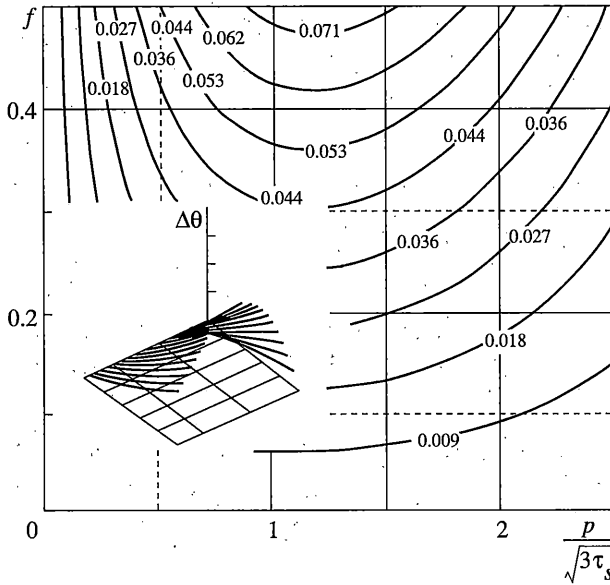
$$\xi^{rr} = \xi^{\varphi\varphi} = 0, \quad \xi^{zz} = \xi = \ln[(1 - \theta_0)/(1 - \theta)] \quad (3.6)$$

Давление на пуансон рассчитывается по формуле

$$\frac{p}{\sqrt{3}\tau_s} = \frac{p|_{Z=0}}{\sqrt{3}\tau_s} + \frac{2\tau_s^* h_0}{\sqrt{3}\tau_s R_0}, \quad \text{где } p|_{Z=0} = -\sigma^{zz}|_{Z=0} \quad (3.7)$$

Рассчитываем усредненное значение пористости прессовки:

$$\tilde{\theta} = \int_0^h \theta|_{R=0} dZ \quad (3.8)$$



Фиг. 4

Решение строится следующим образом. Для увеличивающихся с малым шагом нагрузок на пуансон определяется изменение плотности пористой массы по высоте, после чего вычисляем $\bar{\theta}$. Расчет повторяется, пока нагрузка на инструмент не достигнет предельно допустимого значения, определяемого его стойкостью. Далее фиксируется давление на пуансон $p_{\max}/\sqrt{3}\tau_s$, распределение пористости $\theta(Z)$ и ее усредненное значение. Результаты расчета показаны на фиг. 4. Приведены диаграммы зависимостей пористости θ и её изменения ($\Delta\theta$) по высоте прессовки от координат Z , различных давлений прессования p и коэффициента внешнего трения f . Дана карта линий уровня поверхности.

4. Рассмотрим задачу о боковом полунепрерывном выдавливании пористого материала под действием равномерного внешнего давления p (фиг. 3, б). Задачу решим в условиях плоской деформации. Трением пренебрегаем (плотность в этом случае распределена равномерно). Начальная пористость θ_1 и скорость v_1 заданы. Полагаем, что среда пластически сжимается в зонах (1) и при достижении некоторой величины давления начинается экструзия, при этом в зонах (2) материал движется как твердое тело, а линии AA' и BB' являются линиями сильного разрыва скорости, т.е. возможен разрыв и касательной и нормальной её компонент.

В зоне (1) простейшее кинематически допустимое поле скоростей имеет вид (h – высота зоны):

$$v_x = 0, \quad v_y = -v_1 y/h \tag{4.1}$$

Для выбранного кинематически допустимого поля скоростей имеем следующие значения компонент тензора скорости деформации, скорости объемной деформации и интенсивности скорости деформаций сдвига:

$$\xi_{xx} = \xi_{xy} = 0, \quad \xi_{yy} = -v_1/h, \quad \xi = -v_1/h, \quad H = (2/\sqrt{3})v_1/h \tag{4.2}$$

Основное энергетическое уравнение приводит к неравенству

$$p \leq \frac{1}{v_1} \int_{W_1} (TH + \sigma \xi) dW = p_1^+ \quad (4.3)$$

где p_1^+ – верхняя оценка величины давления в зоне (1). Тогда

$$\frac{p_1^+}{\tau_s} = \int_0^h \frac{2}{\sqrt{2}h} \left\{ (1 - K_1 \theta^{2/3}) + \ln \frac{\eta}{\theta} \right\} dy = \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ 1 - K_1 (1 - \rho)^{2/3} + \ln \frac{\eta}{1 - \rho} \right\} \quad (4.4)$$

Рассмотрим простейшее кинематически допустимое поле скоростей на линии разрыва ОА. Введём локальную систему координат (n, τ) (ось n направлена по нормали к линии разрыва, ось τ – по касательной). Пусть линия разрыва вдоль оси n представляет собой полосу шириной h_n ($h_n \rightarrow 0$), в пределах которой скорость линейна. Вводя верхние индексы (-) и (+) для состояний среды до и после разрыва соответственно, используя равенство $\rho^- v_1 h_1 = \rho^+ v_2 h_2$, и обозначив $h_1/h_2 = \text{ctg} \alpha = \mu$ (редукция), $c = \rho^+/\rho^-$ для компонент скорости на линии разрыва получим

$$v_n = v_1 \cos \alpha \left\{ 1 + \frac{1 - c x_n}{c h_n} \right\}, \quad v_\tau = v_1 \cos \alpha \left\{ \left(\frac{\mu}{c} + \frac{1}{\mu} \right) \frac{x_n}{h_n} - \text{tg} \alpha \right\} \quad (4.5)$$

$$x_n \in [0, h_n]$$

Из уравнения неразрывности $\rho \partial v_n / \partial n + \partial \rho / \partial n v_n = 0$ следует

$$\rho = \rho^- \frac{c h_n}{1 - c x_n + c h_n} \quad (4.6)$$

Для квазистатического течения материала на линии разрыва ОА из основного энергетического уравнения следует

$$p \leq \frac{1}{v_1} \int_{W_{12}} \{ TH + \sigma \xi \} dW = p_2^+ \quad (4.7)$$

где p_2^+ – верхняя оценка давления на линии разрыва скоростей.

Интегрируя (4.7) с учетом предельного перехода $h_n \rightarrow 0$ получаем

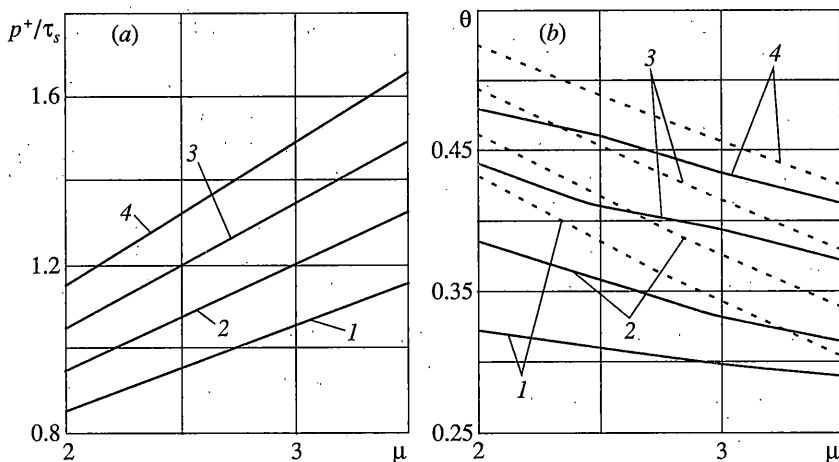
$$p_2^+/\tau_s = K_2 A_1 + (1 - K_1 A_2) (A_3)^{1/2} \quad (4.8)$$

$$A_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1 - \rho^- c}{c} \ln \left(\frac{1 - \rho^- c}{c} \right) - (1 - \rho^-) \ln (1 - \rho^-) + \frac{\ln(c)}{c} + \frac{(1 - c)}{c} \ln(\eta) \right\} \quad (4.9)$$

$$A_2 = \frac{c}{1 - c} \left\{ \frac{1}{c} (1 - \rho^- c)^{2/3} - (1 - \rho^-)^{2/3} + \rho \left(\ln \frac{1 - (1 - \rho^- c)^{1/3}}{1 - (1 - \rho^-)^{1/3}} - \frac{1}{2} \ln(c) \right) + \right. \quad (4.10)$$

$$\left. + \frac{2}{\sqrt{3}} \rho^- \left[\text{arctg} \left(\frac{2(1 - \rho^- c)^{1/3} + 1}{\sqrt{3}} \right) - \text{arctg} \left(\frac{2(1 - \rho^-)^{1/3} + 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right\}$$

$$A_3 = \left\{ \left(\frac{\mu}{c} + \frac{1}{\mu} \right)^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{1 - c}{c} \right)^2 \right\} \quad (4.11)$$



Фиг. 5

Обозначив $f_1(\rho) = p_1^+/\tau_s$, $f_2(\rho, c, \mu) = p_2^+/\tau_s$, определим давление

$$\frac{p^+}{\tau_s} = \begin{cases} \min\{f_2(\rho_1, c, \mu)\} \text{ при } f_1(\rho_1 + \Delta\rho) > \\ > \min\{f_2(\rho_1 + \Delta\rho, c, \mu)\} \forall \Delta\rho \in (0, 1 - \rho_1] \\ \min\{f_2(\rho, c, \mu)\} \forall \rho \in (\rho_1, 1] \end{cases} \quad (4.12)$$

Для поиска $\{f_2(\rho, c, \mu)\}$ введем $J = K_2 A_1 + (1 - K_1 A_2)(A_3)^{1/2}$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial c} = & -\frac{1}{c^2} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} K_2 \{ \ln(1 - \rho^- c) - \ln(\eta) \} + \frac{K_1 c}{1 - c} \{ A_2 - (1 - \rho^- c)^{2/3} \} (A_3)^{1/2} - \right. \\ & \left. - (1 - K_1 A_2)(A_3)^{-1/2} \left\{ \frac{\mu^2}{c} + \frac{4}{3c} - \frac{1}{3} \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Для расчетов принято: $\theta_1 \in [0.5, 0.65]$, $K_1 = \sqrt[3]{0.624}$, $K_2 = 1$, $\eta = 0.7$. Результаты решения представлены на фиг. 5. Кривые на графиках соответствуют следующим значениям начальной пористости: $1 - \theta_1 = 0.65$, $2 - \theta_1 = 0.60$; $3 - \theta_1 = 0.55$, $4 - \theta_1 = 0.50$. Дана зависимость изменения давления p^+/τ_s и пористости θ от θ_1 и μ . Разница между сплошными и штриховыми линиями на фиг. 5 есть величина скачка пористости при переходе частиц среды через линию разрыва скоростей.

Из фиг. 5 следует, что величина скачка пористости на линии разрыва падает с уменьшением θ и увеличением μ . Обратимся к формуле (4.13). Величина $\partial J/\partial c$ определяется тремя слагаемыми: первые два характеризуют увеличение диссипации мощности на линии разрыва скоростей, а последнее показывает ее относительное уменьшение за счет изменения скачка скорости. При этом первый из членов в правой части (4.13) монотонно возрастает при увеличении ρ^- , также как и разность между вторым и третьим при увеличении (ρ^- , μ). С увеличением ρ^- (уменьшением θ) и μ решение уравнения (4.13) перестает существовать, и имеем разрыв без скачка плотности (пористости).

5. Рассмотрим процесс экструзии пористой массы через коническую матрицу (фиг. 3, с). Пусть в зоне (1) среда пластически сжимается (характер течения описан формулами (4.1)–(4.3)), в зоне (2) материал несжимаем, AB и CD есть линии разрыва; на AB возможен скачок плотности, т.е. разрыв и нормальной и касательной компонент скорости, а на CD разрыв только касательной компоненты. В зоне (3) среда движется как твердое тело. Кинематически возможное поле скоростей в зоне (2) введем по методу функций тока [20]. Получаем

$$v_x = \frac{v_1}{c} \frac{h_1}{h_1 - x \operatorname{tg} \alpha}, \quad v_y = \frac{v_1}{c} \frac{h_1}{(h_1 - x \operatorname{tg} \alpha)^2} y \operatorname{tg} \alpha \quad (5.1)$$

Отсюда найдем компоненты тензора скоростей деформаций:

$$\xi_{xx} = -\xi_{yy} = \frac{v_1}{c} \frac{h_1}{(h_1 - x \operatorname{tg} \alpha)^2} \operatorname{tg} \alpha, \quad \xi_{xy} = -\frac{v_1}{c} \frac{h_1}{(h_1 - x \operatorname{tg} \alpha)^3} y \operatorname{tg} \alpha \quad (5.2)$$

Вычисляем $H = \sqrt{2e_{ij}e_{ij}}$ в зоне (2) ($\mu = h_1/h_2$):

$$H = \frac{v_1}{c} \{ \sec \alpha + 2 \operatorname{ctg} \alpha \times \ln(\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha) \} \ln(\mu) \quad (5.3)$$

Основное энергетическое уравнение для зоны (2) с учетом поверхности сильного разрыва приводит к неравенству

$$p \leq \frac{1}{v_1} \left\{ \int_{W_{12}} \{TH + \sigma \xi\} dW + \int_{w_2} (TH + \sigma \xi) dw + \int_{s_{23}} \{T[v_y]\} dS \right\} = p_2^+ \quad (5.4)$$

$$[v_y] = \int_0^{h_2} \frac{v_1}{c} \operatorname{tg} \alpha \times y dy$$

Интегрируя (5.4) с учетом $h_n \rightarrow 0$ в W_{12} получаем:

$$\frac{p_2^+}{\tau_s} = K_2 A_1 + (1 - K_1 A_2)(A_4)^{1/2} + \frac{1}{c} \{1 - K_1(1 - \rho^- c)^{2/3}\} A_6 \quad (5.5)$$

$$A_4 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2c} \left[\{1 + (A_5)^2\}^{1/2} + (A_5)^2 \ln \left(\frac{\{1 + (A_5)^2\}^{1/2}}{|A_5|} \right) \right]$$

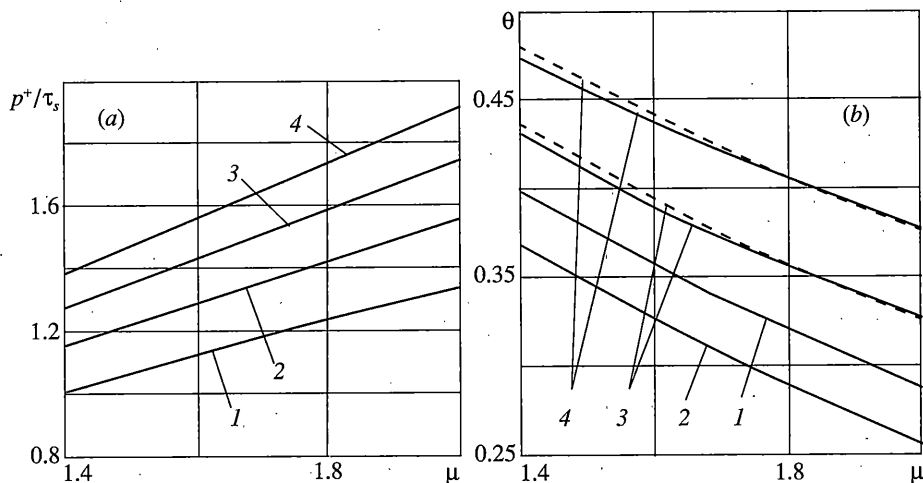
$$A_5 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1-c}{c} \operatorname{ctg} \alpha \quad (5.6)$$

$$A_6 = \frac{1}{c} \{ \sec \alpha + 2 \operatorname{ctg} \alpha \times \ln(\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha) \} \ln(\mu) + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \quad (5.7)$$

где коэффициенты A_1 и A_2 определены формулами (4.9) и (4.10).

Обозначив $f_1(\rho) = p_1^+/\tau_s$, $f_2(\rho, c, \mu, \alpha) = p_2^+/\tau_s$, имеем

$$\frac{p}{\tau_s} = \begin{cases} \min\{f_2(\rho_1, c, \mu, \alpha)\} \text{ при } f_1(\rho_1 + \Delta\rho) > \\ > \min\{f_2((\rho_1 + \Delta\rho, c, \mu), \alpha)\} \forall \Delta\rho \in (0, 1 - \rho_1] \\ \min\{f_2(\rho, c, \mu, \alpha)\} \forall \rho \in (\rho_1, 1] \end{cases} \quad (5.8)$$



Фиг. 6

Пусть $J = K_2 A_1 + (1 - K_1 A_2)(A_4)^{1/2} + c\{1 - K_1(1 - \rho^- c)^{2/3}\}A_6$, тогда

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{2}{\sqrt{3}c^2} K_2 \ln \frac{\eta}{1 - \rho^- c} + \frac{K_1}{c(c-1)} \{A_2 - (1 - \rho^- c)^{2/3}\} -$$

$$- c(1 - K_1 A_2) \frac{4}{\sqrt{3}} A_4 A_5 \ln \left\{ \frac{1 + \{1 + (A_5)^2\}^{1/2}}{|A_5|} \right\} + \frac{A_6}{c^2} \left\{ -1 + (1 - \rho^- c)^{-1/3} \frac{2}{3} \rho^- c \right\} = 0 \quad (5.9)$$

Задача решена для тех же значений θ_1, K_1, K_2, η что и предыдущая. Графики изменения давления и пористости в зависимости от θ_1 и μ при величине угла конусности $\alpha = 60^\circ$ представлены на фиг. 6.

Заметим, что одна и та же плотность (пористость) для бокового выдавливания достигается при большей редукации, чем при прессовании через матрицу (см. фиг. 5, 6). Из фиг. 6 также следует, что скачок пористости на линии разрыва зависит от редукации μ , но величина его существенно меньше, чем при боковом выдавливании. С увеличением μ и уменьшением θ_1 скачок пористости отсутствует. Сравнивая (5.9) с (4.13) видим, что (5.9) содержит положительную добавку, характеризующую течение материала в зоне (2), которая и сужает (по сравнению с (4.11)) диапазон значений ρ^-, μ при которых (5.9) имеет решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
2. Ивлев Д.Д., Мартынова Т.Н. К теории сжимаемых идеально пластических сред // ПММ. 1963. Т. 27. № 3. С. 589–592.
3. Друянов Б.А. Прикладная теория пластичности твёрдых тел. М.: Машиностроение, 1989. 168 с.
4. Григорян С.С. Об основных представлениях динамики грунтов // ПММ. 1960. Т. 24. № 4. С. 1057–1062.
5. Tabata T., Masaki S., Abe Y. A yield criterion for porous materials and analyses of axis-symmetric compression of porous disks // Jap. Soc. Technol. Plast. 1977. V. 18. № 196. P. 373–380.

6. *Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
7. *Green R.J.* Plasticity Theory for Porous Metals // *Int. J. Mech. Sci.* 1972. V. 14. № 4. P. 215–224.
8. *Александров С.Е.* Об условиях текучести пористых и порошковых тел // *Изв. РАН. МТТ.* 1994. № 6. С. 107–112.
9. *Живов Л.И., Павлов В.А., Макагон В.И., Оресов Ю.Г.* Технологические режимы горячей экструзии порошкового титана // *Теория и практика прессования порошков.* Киев: Наук. думка, 1975. С. 146–150.
10. *Stahlberg U. and Keife H.* A powder-compacting model and its application to extrusion // *J. of Mater. Proc. Technol.* 30(1992), pp. 143–157.
11. *Штерн М.Б.* Особенности плоской деформации уплотняемых материалов // *Порошковая металлургия.* 1982. № 3. С. 14–21.
12. *Дегтярев И.С., Колмогоров В.Л.* Диссипация мощности и кинематические соотношения на поверхности разрыва скоростей в сжимаемом пластическом материале // *Ж. прикл. механики и технической физики,* 1972. № 5. С. 167–173.
13. *Залазинский А.Г., Новожинов В.И., Колмыков В.Л., Соколов М.В.* Моделирование прессования брикетов и выдавливания прутков из титановой губки // *Металлы.* 1997. № 6. С. 64–68.
14. *Сегал В.М., Резников В.И., Мальшев В.Ф.* Изменение плотности пористых материалов при пластическом формоизменении // *Порошковая металлургия.* 1979. № 7. С. 6–11.
15. *Штерн М.Б.* К теории пластичности пористых тел и уплотняемых порошков // *Реологические модели и процессы деформирования пористых порошковых и композиционных материалов.* Киев: Наук. думка, 1985. С. 12–23.
16. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 759 с.
17. *Залазинский А.Г.* Применение экстремальных теорем для определения напряжений и деформаций при разрывом пластическом течении композита // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1984. № 6. С. 106–113.
18. *Залазинский А.Г.* Математическое моделирование процессов обработки давлением структурно-неоднородных материалов. Свердловск: УрО АН СССР, 1990. 89 с.
19. *Скорород В.В.* Реологические основы теории спекания. Киев: Наук. думка, 1972. 152 с.
20. *Chen P.C.T.* Upper bound solutions to plane strain extrusion problems // *Trans. ASME. Ser. B.* 1970. V. 91. P. 109.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
30.03.2000