

ПРОЧНОСТЬ СОЕДИНЕНИЯ СОСТАВНЫХ ПЛИТ

С учетом поперечных сдвигов исследуется напряженное состояние на крае контактных поверхностей составных плит из упрочняющихся по степенному закону материалов. Определяется семейство предельных поверхностей конечных моментов (напряжений), отделяющих области нулевых напряжений от областей сильной концентрации напряжений.

Полученные формулы моментов и перерезывающих сил с учетом поперечных сдвигов и упрочнений материалов сравниваются с аналогичными выражениями по классической теории изгиба плит. Показано, что степени концентрации моментов сохраняются, между тем перерезывающие силы в рассматриваемой окрестности, вопреки классической теории (как для случая линейно-упругих материалов) остаются ограниченными и стремятся к нулю в угловой точке.

Для изучения прочности соединения края контактных поверхностей соединенных в стык составных плит исследуются явления “малонапряженности” [1, 2], т.е. в пространстве геометрических и физических параметров строятся зоны малонапряженности, точкам которых соответствуют нулевые напряженные состояния на указанном крае. Согласно этим зонам определяется характер напряженного состояния края составной плиты. Если задана часть параметров, то при проектировании данного узла остальные параметры определяются таким образом, чтобы край контактной поверхности находился в ненапряженном состоянии.

В [3–4] на основании концепции теории изгиба плит Кирхгофа исследованы вопросы малонапряженности составных плит из нелинейноупругих материалов. Однако классическая теория изгиба плит, как отмечено Б. Галеркиным [5] еще в 20-ых годах, из-за известных недостатков не позволяет получить правильную картину напряженного состояния в окрестности угловой точки плиты. Для исследования местных напряжений в угловых точках плит естественно исходить из уточненной теории [6–11] изгиба плит.

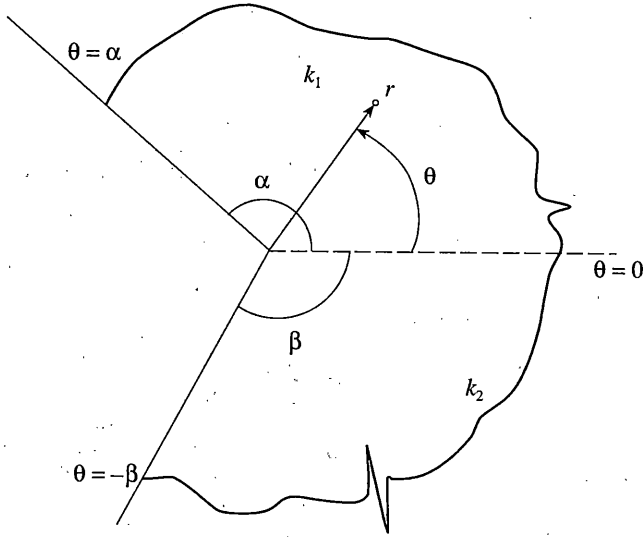
Исследуется с учетом поперечных сдвигов напряженное состояние в окрестности краевого ребра контактной поверхности соединенной в стык составной плиты, изготовленной из несжимаемого упрочняющегося по степенному закону материала. На фиг. 1 представлена нейтральная плоскость $z = 0$ составной плиты. Индексами $i = 1$ и $i = 2$ отмечены величины, относящиеся к областям $0 \leq \theta \leq \alpha$ и $-\beta \leq \theta \leq 0$ соответственно. Полагается, что плита подвергается поперечному изгибу, а окрестность ребра $r = 0$ свободна от внешних сил, а на контактной поверхности $\theta = 0$ выполняется условие сцепления двух материалов.

Принимаем, что между интенсивностями напряжений и деформации существует степенная зависимость $\sigma_{0i} = k_i \varepsilon_{0i}^m$, где k_i модули деформации материалов, а параметр m принимается одинаковым для обоих материалов.

При допущении условия несжимаемости материалов $\varepsilon_{ri} + \varepsilon_{\theta i} + \varepsilon_{zi} = 0$, а также пренебрежении σ_{zi} , соотношения между компонентами напряжений и деформации принимают форму

$$\sigma_{ri} = 4k_i \varepsilon_{0i}^{m-1} \left(\varepsilon_{ri} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\theta i} \right) (r, \theta), \quad \tau_{r\theta i} = 2k_i \varepsilon_{0i}^{m-1} \gamma_{r\theta i} \quad (r, \theta, z) \quad (1)$$

$$\varepsilon_{0i} = 2 \sqrt{\varepsilon_{ri}^2 + \varepsilon_{ri} \varepsilon_{\theta i} + \varepsilon_{\theta i}^2 + \gamma_{r\theta i}^2 + \gamma_{\theta zi}^2 + \gamma_{r\theta i}^2}$$



Фиг. 1

Дифференциальные уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial M_{ri}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta i}}{\partial \theta} + \frac{M_{ri} - M_{\theta i}}{r} + Q_{ri} = 0$$

$$\frac{\partial M_{ri}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta i}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} M_{r\theta i} + Q_{\theta i} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q_{ri}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_{\theta i}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} Q_{ri} = 0$$

Разлагая перемещения в ряд Тейлора по степеням z и следуя [10], получим

$$u_i = z\phi_i(r, \theta), \quad v_i = z\Psi_i(r, \theta), \quad w_i = w_i(r, \theta) \quad (3)$$

где ϕ_i, Ψ_i, w_i — искомые функции от r, θ .

Вводя обозначения

$$\gamma_i^2 = \left(\phi_i + \frac{\partial w_i}{\partial r}\right)^2 + \left(\Psi_i + \frac{1}{r} \frac{\partial w_i}{\partial \theta}\right)^2$$

$$\Omega_i^2 = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r}\right)^2 + \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \left(\frac{\phi_i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\phi_i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial r} - \frac{\Psi_i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta}\right)^2$$

из (1) будем иметь $\epsilon_{\theta i} = \sqrt{\gamma_i^2 + 4\Omega_i^2 z^2}$.

Компоненты напряжения можно представить в следующей форме

$$\sigma_{pli} = \frac{4k_i F_{pli}(r, \theta)}{(\sqrt{\gamma_i^2 + 4\Omega_i^2 z^2})^{1-m}}, \quad \tau_{zli} = \frac{k_i G_{zli}(r, \theta)}{(\sqrt{\gamma_i^2 + 4\Omega_i^2 z^2})^{1-m}}$$

$$F_{ri} = \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \theta}\right), \quad G_{zri} = \phi_i + \frac{\partial w_i}{\partial r}$$

$$F_{\theta i} = \frac{\phi_i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_i}{\partial r}, \quad G_{\theta z i} = \Psi_i + \frac{1}{r} \frac{\partial w_i}{\partial \theta}$$

$$F_{r\theta i} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial r} - \frac{\Psi_i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta}$$

причем в первой формуле индекс pl принимает значения r, θ и $r\theta$, а во второй вместо l принимаются индексы r и θ .

Моменты и перерезывающие силы представим в следующей форме:

$$M_{ri} = k_i J_{2i} \Omega_i^{m-1} F_{ri}(r, \theta), \quad M_{r\theta i} = \frac{1}{4} k_i J_{2i} \Omega_i^{m-1} F_{r\theta i} \quad (4)$$

$$Q_{ri} = k_i J_{0i} \Omega_i^{m-1} \left(\phi_i + \frac{\partial w_i}{\partial r} \right), \quad Q_{\theta i} = k_i J_{0i} \Omega_i^{m-1} \left(\Psi_i + \frac{1}{r} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} \right)$$

$$J_{pl} = \int_0^h \frac{x^p dx}{(\sqrt{x^2 + v_i^2})^{m-1}}, \quad v_i = \frac{\gamma_i}{\Omega_i}, \quad (p = 0; 2) \quad (5)$$

Неизвестные функции, входящие в (3) в окрестности $r = 0$ ищем в следующей форме

$$\phi_i = r^\lambda \varphi_i(\theta, \lambda), \quad \Psi_i = r^\lambda \psi_i(\theta, \lambda), \quad w_i = r^{\lambda+1} f_i(\theta, \lambda) \quad (6)$$

где φ_i, ψ_i, f_i – искомые функции, а λ – неопределенный параметр, играющий роль собственного значения.

Из (5) следует

$$v_i = \frac{4r \sqrt{(\psi_i + f_i')^2 + [\varphi_i + (\lambda + 1)f_i]^2}}{\sqrt{4M_i^2 + T_i^2 + 3\lambda^2 \varphi_i^2}} \quad (7)$$

$$\psi_i' + \left(\frac{\lambda}{2} + 1 \right) \varphi_i = M_i, \quad \varphi_i' + (\lambda - 1) \psi_i = T_i \quad (8)$$

Согласно (4) моменты представим в виде

$$M_{ri} = k_i J_{2i} r^{(\lambda-1)m} \left[\frac{1}{2} \psi_i + \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \varphi_i \right] \chi_i \quad (9)$$

$$M_{\theta i} = k_i J_{2i} r^{(\lambda-1)m} M_i \chi_i, \quad M_{r\theta i} = \frac{1}{4} k_i J_{2i} r^{(\lambda-1)m} T_i \chi_i$$

Перерезывающие силы будут

$$Q_{ri} = k_i J_{0i} r^{(\lambda-1)m+1} [\varphi_i + (\lambda + 1)f_i] \chi_i, \quad Q_{\theta i} = k_i J_{0i} r^{(\lambda-1)m+1} (f_i + \psi_i) \chi_i \quad (10)$$

$$\chi_i = \left(\sqrt{M_i^2 + \frac{1}{4} T_i^2 + \frac{3}{4} \lambda^2 \varphi_i^2} \right)^{m-1}$$

Подставляя выражения моментов (9) и перерезывающих сил (10) в уравнения равновесия (2), приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(T_i \chi_i)' + 2\{[(\lambda - 1)m - 1] \psi_i' + (\lambda - 1)[1 + (2\lambda + 1)m] \varphi_i\} \chi_i = 0$$

$$(M_i \chi_i)' + \frac{1}{4} [(\lambda - 1)m + 2] T_i \chi_i = 0 \quad (11)$$

$$[(f_i' + \psi_i) \chi_i]' + [(\lambda + 1)m + 2][\phi_i + (\lambda - 1)f_i] \chi_i = 0$$

где M_i и T_i – определяются согласно (8).

Из возможных различных комбинаций граничных условий будем рассматривать случай свободных от внешних сил краев, т.е. полагаем

$$M_{\theta i} = M_{r\theta i} = Q_{\theta i} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \alpha, -\beta$$

Согласно (9), (10) будем иметь

$$M_i = 0, \quad T_i = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \alpha, -\beta \quad (12)$$

$$f_i' + \psi_i = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \alpha, -\beta \quad (13)$$

На контактной поверхности $\theta = 0$ имеет место условие сопряжения – непрерывность для моментов $M_{\theta i}, M_{r\theta i}$, перерезывающих сил $Q_{\theta i}$, а также для перемещений u, v, w . Тогда из (7), (9), (10) следует, что при $\theta = 0$ имеем условия

$$M_1 \chi_1 = \delta M_2 \chi_2, \quad \phi_1 = \phi_2 \quad (14)$$

$$T_1 \chi_1 = \delta T_2 \chi_2, \quad \psi_1 = \psi_2 \quad (15)$$

$$(f_1' + \psi_1) \chi_1 = \delta (f_2' + \psi_2) \chi_2, \quad f_1 = f_2, \quad \delta = k_2/k_1 \quad (16)$$

Система (11) состоит из 6 дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих 6 неизвестных функций ϕ, ψ, f с неопределенным параметром λ . Указанную систему дифференциальных уравнений с однородными гранично-контактными условиями (12)–(16) можно рассматривать как задачу на собственные значения для определения λ в зависимости от геометрических и физических параметров: $\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \delta, m)$.

Заметить, что рассматриваемая задача распадается на две отдельные самостоятельные задачи. Первая, которая представляет больший интерес, описывается первыми двумя уравнениями (11) с гранично-контактными условиями (12), (14), (15); вторая задача описывается третьим уравнением (11) с граничными (13) и контактными (16) условиями.

После определения функции ϕ, ψ с точностью до произвольного постоянного множителя из третьего уравнения (11) находим систему из двух однородных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$f_i'' + \mu_i f_i + (\lambda + 1)[(\lambda - 1)m + 2] f_i + \psi_i' + \mu_i \psi_i + [(\lambda - 1)m + 2] \phi_i = 0 \quad (i = 1, 2)$$

с гранично-контактными условиями (13) и (16), причем

$$\mu_i = \chi_i' / \chi_i = -\frac{1-m}{S_i} (4M_i \psi_i'' + T_i \phi_i'' + Q_i),$$

$$S_i = 4M_i^2 + T_i^2 + 3\lambda^2 \phi_i^2 \quad (17)$$

$$Q_i = 3(\lambda + 1)\phi_i' \psi_i' + (\lambda - 1)^2 \psi_i \psi_i' + 4(\lambda^2 + \lambda + 1)\phi_i \phi_i'$$

Используя эти соотношения первую систему дифференциальных уравнений из (11) можно свести к системе из двух линейных уравнений относительно ψ_i'' и ϕ_i'' , после

разрешения которой получаем

$$\Psi_i'' = \frac{A_i N_i + B_i H_i}{A_i C_i - B_i^2}, \quad \Phi_i'' = \frac{B_i N_i + C_i H_i}{A_i C_i - B_i^2} \quad (18)$$

$$A_i = M_i^2 + \frac{m}{4} T_i^2 + \frac{3}{4} \lambda^2 \Phi_i^2, \quad B_i = (1-m) M_i T_i, \quad C_i = 4m M_i^2 + T_i^2 + 3\lambda^2 \Phi_i^2$$

$$H_i = \frac{1}{4} (1-m) T_i Q_i - \frac{1}{4} S_i \{ [(\lambda-3) + 2(\lambda-1)m] \Psi_i' + 2(\lambda-1) [1 + (1+2\lambda)m] \Phi_i \} \quad (19)$$

$$N_i = (1-m) M_i Q_i - \frac{1}{4} S_i \{ [2(\lambda+3) + (\lambda-1)m] \Phi_i' + (\lambda-1) [(\lambda-1)m + 2] \Psi_i \}$$

Далее введем новые неизвестные функции τ_i, s_i, g_i :

$$M_i = \frac{1}{2} \Phi_i \tau_i, \quad T_i = \Phi_i s_i, \quad \Psi_i = \Phi_i g_i \quad (20)$$

После подстановки в уравнениях (18)–(19) получаем следующую систему дифференциальных уравнений первых порядков

$$\tau_i' + (\tau_i - \lambda - 2) [s_i - (\lambda - 1) g_i] = \frac{a_i n_i + b_i h_i}{2(a_i c_i - b_i^2)}$$

$$s_i' + s_i^2 - (\lambda - 1) \left[s_i g_i + \frac{1}{2} (\tau_i - \lambda - 2) \right] = \frac{b_i n_i + c_i h_i}{2(a_i c_i - b_i^2)} \quad (21)$$

$$g_i' + g_i s_i - (\lambda - 1) g_i^2 = \frac{1}{2} (\tau_i - \lambda - 2)$$

$$a_i = \tau_i^2 + m s_i^2 + 3\lambda^2, \quad b_i = (1-m) \tau_i s_i, \quad c_i = m \tau_i^2 + s_i^2 + 3\lambda^2$$

$$h_i = -(\tau_i^2 + s_i^2 + 3\lambda^2) \{ [\lambda - 3 + 2(\lambda - 1)m] (\tau_i - \lambda - 2) + 4(\lambda - 1) [1 + (1 + 2\lambda)m] \} + \Lambda_i s_i$$

$$n_i = -(\tau_i^2 + s_i^2 + 3\lambda^2) \{ [2(\lambda + 3) + (\lambda - 1)m] [s_i - (\lambda - 1) g_i] + [2 + (\lambda - 1)m] (\lambda - 1) g_i \} + \Lambda_i \tau_i \quad (22)$$

$$\Lambda_i = (1-m) \{ 3(\lambda + 1) [s_i - (\lambda - 1) g_i] (\tau_i - \lambda - 2) + (\lambda - 1)^2 q_i (\tau_i - \lambda - 2) + 8(\lambda^2 + \lambda + 1) [s_i - (\lambda - 1) g_i] \}$$

После преобразований получаем

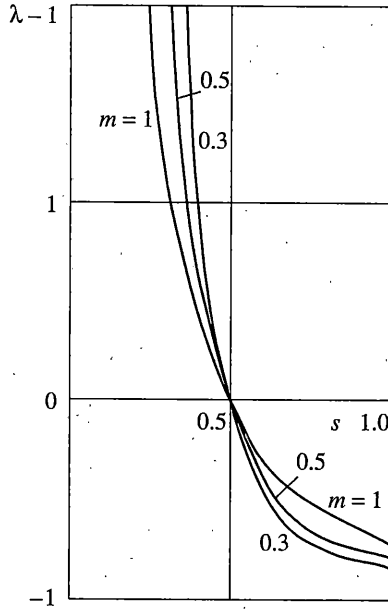
$$a_i c_i - b^2 = (\tau_i^2 + s_i^2 + 3\lambda^2) (m \tau_i^2 + m s_i^2 + 3\lambda^2)$$

Гранично-контактные условия согласно (12), (14), (15) и (20) будут

$$\tau_i = s_i = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \alpha; \quad -\beta$$

$$\tau_1 \omega_1 = \delta \tau_2 \omega_2, \quad s_1 \omega_1 = \delta s_2 \omega_2, \quad q_1 = q_2 \quad \text{при} \quad \theta = 0 \quad (23)$$

$$\omega_i = (\sqrt{\tau_i^2 + s_i^2 + 3\lambda^2})^{m-1}$$



Фиг. 2

Система дифференциальных уравнений (21) при гранично-контактных условиях (23) в координатном пространстве $\alpha\beta\lambda$ в принципе определяет семейство конусообразных поверхностей $\lambda = \lambda(\alpha, \beta)$ в зависимости от параметров δ и m .

Для случая $k_1 = k_2$, т.е. для однородного материала $0 \leq \theta \leq \alpha$ в уравнениях (21) и в выражениях (22) опуская индексы получаем аналогичные с (21) системы уравнений и выражений (22) при граничных условиях

$$\tau = s = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0; \alpha \tag{24}$$

Численное решение указанной системы уравнений при граничных условиях (24) в координатной плоскости $s(\lambda - 1)$ определяет семейство кривых $\lambda = \lambda(s, m)$ (фиг. 2), где $s = \alpha/2\lambda$.

Возвращаясь к общему случаю составной плиты отметим, что пересечение плоскости $\lambda = 1$ с указанными поверхностями определяет предельные кривые конечных напряжений $\beta = \beta(\alpha, \delta, m)$, отделяющих зону малонапряженности от зоны сильной концентрации напряжений. Принимая в первых двух уравнениях (21) $\lambda = 1$, получаем

$$\tau_i' + (\tau_i - 3)s_i = \frac{1}{2} \left(\frac{a_i n_i + b_i h_i}{a_i c_i - b_i^2} \right)_{\lambda=1} \tag{25}$$

$$s_i' + s_i^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{b_i n_i + c_i h_i}{a_i c_i - b_i^2} \right)_{\lambda=1}$$

Переходя в (22) к пределу при $\lambda \rightarrow 1$ получаем

$$(a_i n_i + b_i h_i)_{\lambda \rightarrow 1} = -8s_i t_i, \quad (b_i n_i + c_i h_i)_{\lambda \rightarrow 1} = 2(\tau_i - 3)t_i$$

$$t_i = a_i c_i - b_i^2 = (\tau_i^2 + s_i^2 + 3)(m\tau_i^2 + ms_i^2 + 3)$$

Тогда система уравнений (25) примет следующий вид:

$$\tau_i' + (\tau_i + 1)s_i = 0, \quad s_i' + s_i^2 + 3 = \tau_i \quad (26)$$

Это означает, что степень упрочнения m не входит в уравнения (26). Учитывая первые граничные условия в (23), заключаем, что функции τ_i и s_i не зависят от m .

Исключая из системы уравнений (26) τ_i , получаем

$$s_i'' + 3s_i s_i' + s_i^3 + 4s_i = 0 \quad (27)$$

Согласно граничным условиям (23) будем иметь

$$s_i = 0, \quad s_i' = -3 \quad \text{при} \quad \theta = \alpha, -\beta \quad (28)$$

Подставив в (27) $s_i = \phi_i' / \phi_i$, приходим к линейному уравнению $\phi_i'' + 4\phi_i' = 0$; в результате решение уравнения (27) можно представить в следующем виде:

$$s_i = \frac{2(a_i \cos 2\theta + b_i \sin 2\theta)}{1 + a_i \sin 2\theta - b_i \cos 2\theta} \quad (29)$$

где a_i и b_i произвольные постоянные. Соответственно получаем

$$\tau_i = \frac{3 - a_i \sin 2\theta + b_i \cos 2\theta}{1 + a_i \sin 2\theta - b_i \cos 2\theta} \quad (30)$$

Согласно граничным условиям (28), определяя a_i и b_i находим

$$s_1 = \frac{6 \sin 2(\alpha - \theta)}{1 + 3 \cos 2(\alpha - \theta)}, \quad s_2 = \frac{6 \sin 2(\beta + \theta)}{1 + 3 \cos 2(\beta + \theta)} \quad (31)$$

Таким же образом из (30) получаем

$$\tau_1 = \frac{3[1 - \cos 2(\alpha - \theta)]}{1 + 3 \cos 2(\alpha - \theta)}, \quad \tau_2 = \frac{3[1 - \cos 2(\beta + \theta)]}{1 + 3 \cos 2(\beta + \theta)} \quad (32)$$

Подставляя выражения (31) и (32) в контактных условиях (23), получаем

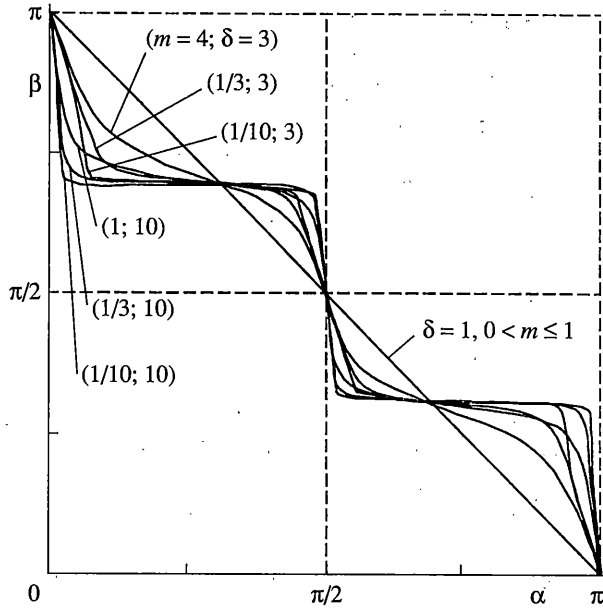
$$\sin 2\alpha \Phi(\alpha, m) + \delta \sin 2\beta \Phi(\beta, m) = 0 \quad (33)$$

$$(1 - \cos 2\alpha) \Phi(\alpha, m) - \delta(1 - \cos 2\beta) \Phi(\beta, m) = 0$$

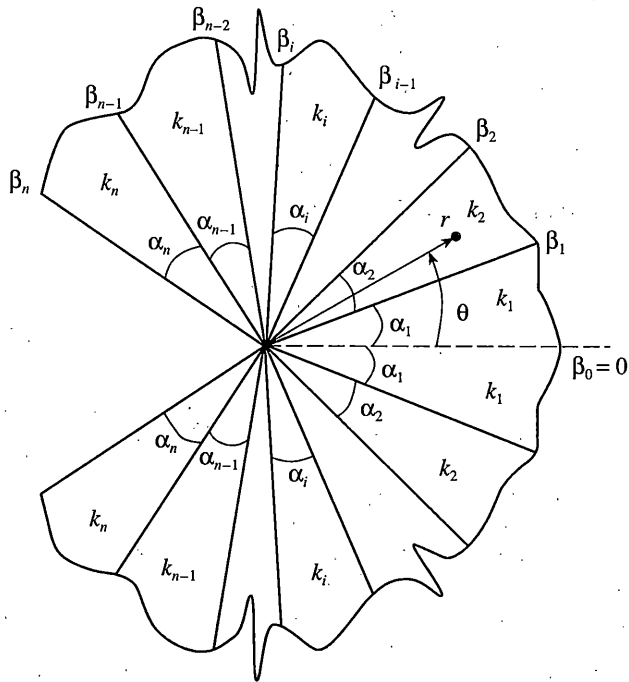
$$\Phi(x, m) = \frac{|1 + 3 \cos 2x|^{1-m}}{1 + 3 \cos 2x} \quad (34)$$

В координатной плоскости $\alpha\beta$ уравнения (33) и (34) представляют семейства предельных кривых конечных напряжений в зависимости от δ и m . Области малонапряженности получены в результате внутренних пересечений областей, образующие узкие предельные кривые. На фиг. 3 показаны предельные кривые конечных моментов (напряжений) по (33), находящиеся ниже кривых (34) и определяющие области малонапряженности в зависимости от δ и m .

Пусть край углового ребра плиты образован из $2n - 1$ симметрично расположенных клиновидных призм, спаянных по боковым поверхностям, и находится также в симметричном напряженном состоянии (со свободными внешними краями). Будем рассматривать половину составного клина от оси симметрии $\theta = 0$ до внешнего края $\theta = \beta_n$. Введем обозначения $\beta_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i$, где α_i — угол раствора i -го клина, а α_1 — половина угла раствора среднего клина ($i = 1, 2, \dots, n$) (фиг. 4).



Фиг. 3



Фиг. 4

На контактных поверхностях подобно (23) имеем условия

$$\begin{aligned} \tau_i \omega_i &= \delta_i \tau_{i+1} \omega_{i+1}, \quad s_i \omega_i = \delta_i s_{i+1} \omega_{i+1} \quad \text{при} \quad \theta = \beta_i \\ \delta_i &= k_{i+1}/k_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\omega_i(\beta_i) = (\sqrt{3 + s_i^2(\beta_i) + \tau_i^2(\beta_i)})^{m-1} \quad (36)$$

Здесь функции s_i и τ_i определяются по (29) и (30), полагая в них $\theta = \beta_i$. Из условия симметрии имеем $\varphi_1'(0) = 0$, тогда

$$s_1(0) = 0 \quad (37)$$

На внешней поверхности имеем

$$s_n(\beta_n) = \tau_n(\beta_n) = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \beta_n \quad (38)$$

Введем новые неизвестные постоянные φ_i :

$$a_i = b_i \operatorname{tg} 2\varphi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (39)$$

Из условия (37) и (38) находим

$$a_1 = 0, \quad b_n = -3 \cos 2\beta_n, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_n = -\beta_n \quad (40)$$

Тогда из (36) будем иметь

$$\omega_i(\beta_i) = \frac{1}{(2\sqrt{3})^{1-m}} \frac{|\cos 2\varphi_i - b_i \cos 2(\varphi_i + \beta_i)|^{1-m}}{(\sqrt{b_i^2 + 3 \cos^2 2\varphi_i})^{1-m}}$$

Из второго соотношения (35), используя выражения (29) и (39), находим

$$\begin{aligned} & \frac{b_i \sin 2(\varphi_i + \beta_i)}{(\sqrt{b_i^2 + 3 \cos^2 2\varphi_i})^{1-m}} \frac{|\cos 2\varphi_i - b_i \cos 2(\varphi_i + \beta_i)|^{1-m}}{\cos 2\varphi_i - b_i \cos 2(\varphi_i + \beta_i)} \\ & - \delta_i \frac{b_{i+1} \sin 2(\varphi_{i+1} + \beta_i)}{(\sqrt{b_{i+1}^2 + 3 \cos^2 2\varphi_{i+1}})^{1-m}} \frac{|\cos 2\varphi_{i+1} - b_{i+1} \cos 2(\varphi_{i+1} + \beta_i)|^{1-m}}{\cos 2\varphi_{i+1} - b_{i+1} \cos 2(\varphi_{i+1} + \beta_i)} = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

где $i = 1, 2, \dots, n-1$, $\delta_i = k_{i+1}/k_i$. Деля первое уравнение (35) на второе, получаем рекуррентное соотношение для b_i

$$b_i = \frac{3b_{i+1} \cos 2\varphi_i \sin 2(\varphi_{i+1} + \beta_i)}{3 \cos 2\varphi_{i+1} \sin 2(\varphi_i + \beta_i) - b_{i+1} \sin 2(\varphi_{i+1} - \varphi_i)} \quad (42)$$

Учитывая значения b_n и φ_n по (40), при $i = n-1$ из (42) получаем

$$b_{n-1} = \frac{3 \cos \alpha_n \cos 2\varphi_{n-1}}{\cos 2 \left[\varphi_{n-1} + \frac{1}{2}(\beta_{n-1} + \beta_n) \right]} \quad (43)$$

Используя соотношения (42), можно постепенно исключить все неизвестные постоянные b_i .

Полагая в (42) $i = 1$ будем иметь

$$b_1 = \frac{3b_2 \sin 2(\varphi_2 + \alpha_1)}{3 \cos 2\varphi_2 \sin 2\alpha_1 - b_2 \sin 2\varphi_2} \quad (44)$$

После исключения b_i и учитывая, что $\varphi_1 = 0$, $\varphi_n = -\beta_n$, система (41) будет содержать $n-1$ уравнений с $n-2$ неизвестными постоянными $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{n-1}$. После ис-

ключения этих неизвестных приходим к уравнению гиперповерхности конечных моментов (напряжений) в зависимости от $2n$ параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, m$.

В случае $n = 3$ (фиг. 4), т.е. когда рассматриваемый край состоит из пяти симметрично расположенных клиньев, полагая в (41) $i = 1, i = 2$, вводя обозначения $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \beta, \alpha_3 = \gamma, \varphi_2 + \alpha = \phi$ и используя (44) и (43), будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{B_1 \sin 2\alpha}{1 + 3B_1 \cos 2\alpha \cos \gamma \sin 2\phi} \frac{|1 + 3B_1 \cos 2\alpha \cos \gamma \sin 2\phi|^{1-m}}{(\sqrt{1 + 3B_1^2 \cos^2 \gamma \sin^2 2\phi})^{1-m}} - \\ & - \delta_1 \frac{B_2}{1 + 3B_2 \cos \gamma \cos 2\phi} \frac{|1 + 3B_2 \cos \gamma \cos 2\phi|^{1-m}}{(\sqrt{1 + 3B_2^2 \cos^2 \gamma})^{1-m}} = 0 \\ & \frac{B_2 \sin 2(\phi + \beta)}{1 + 3B_2 \cos \gamma \cos 2(\phi + \beta)} \frac{|1 + 3B_2 \cos \gamma \cos(\phi + \beta)|^{1-m}}{(\sqrt{1 + 3B_2^2 \cos^2 \gamma})^{1-m}} + \delta_2 \frac{2^m \sin \gamma}{1 + 3 \cos 2\gamma} |1 + 3 \cos 2\gamma|^{1-m} = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

$$B_1 = \left[\cos \gamma \sin 2(\phi - \alpha) + \sin 2\alpha \cos 2\left(\phi + \beta + \frac{\gamma}{2}\right) \right]^{-1}, \quad B_2 = \left[\cos 2\left(\phi + \beta + \frac{\gamma}{2}\right) \right]^{-1}$$

Исключив ϕ из системы (45), получим в координатном пространстве $\alpha\beta\gamma$ поверхность, отделяющую область малонапряженности от области сильной концентрации напряжений в зависимости от параметров δ_1, δ_2 и m .

В случае трех симметричных клиньев, полагая $\beta = 0$ система (45) сводится к одному уравнению

$$\frac{B \sin 2\alpha \sin 2\phi}{1 + 3B \cos 2\alpha \cos \gamma \sin 2\phi} \frac{|1 + 3B \cos 2\alpha \cos \gamma \sin 2\phi|^{1-m}}{(\sqrt{1 + 3B^2 \cos^2 \gamma \sin^2 2\phi})^{1-m}} +$$

$$+ \delta_3 \frac{2^m \sin \gamma}{1 + 3 \cos 2\gamma} |1 + 3 \cos 2\gamma|^{1-m} = 0$$

$$\delta_3 = k_3/k_1, \quad B = \left[\cos \gamma \sin 2(\phi - \alpha) + \sin 2\alpha \cos 2\left(\phi + \frac{\gamma}{2}\right) \right]^{-1}$$

Уравнение (46) определяет след поверхности (45) на координатной плоскости $\alpha\gamma$.

На фиг. 5 ($k_1 < k_2 < k_3, \delta_1 = 2, \delta_2 = 3, m = 1/3$) и фиг. 6 ($k_1 > k_2 > k_3, \delta_1 = 1/2, \delta_2 = 1/3, m = 1/5$) в координатных пространствах $\alpha\beta\gamma$ представлены предельные поверхности (45) конечных моментов (напряжений), определяющие трехмерные области малонапряженностей, т.е. эти предельные поверхности отделяют области малонапряженности от областей сильной концентрации напряжений. При $\delta_1 = 2, \delta_2 = 3, m = 1/3$ для случая продольного сдвига составного клина в работе [12] построена трехмерная область малонапряженности. Следует отметить, что в этой же работе на фиг. 4 автором спутаны обозначения: вместо γ должна быть δ , а вместо n должно быть p .

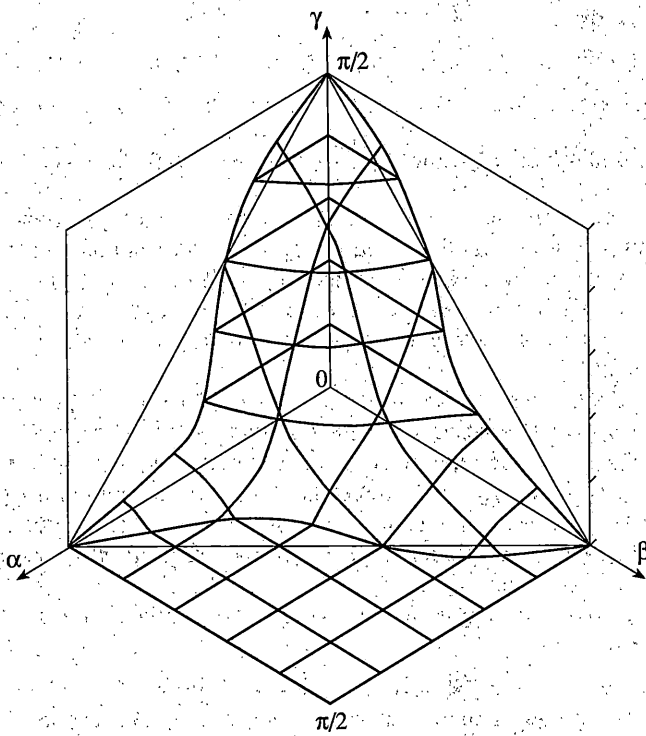
Полагая в (18), (19) $m = 1$, получаем

$$\psi_i'' + \frac{1}{4}(3\lambda + 5)\varphi_i' + \frac{1}{4}(\lambda^2 - 1)\varphi_i = 0 \quad (47)$$

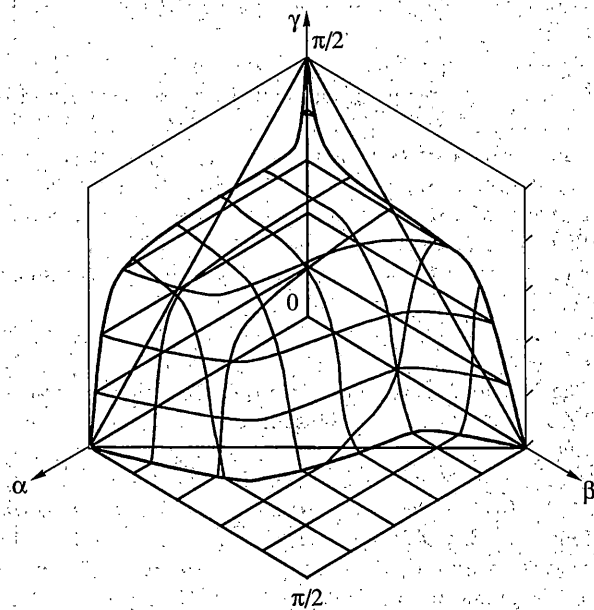
$$\varphi_i'' + (3\lambda - 5)\psi_i' + 4(\lambda^2 - 1)\varphi_i = 0$$

Дифференцируя второе уравнение, а затем исключая φ_i' , приходим к уравнению

$$\psi_i^{IV} + 2(\lambda^2 + 1)\psi_i'' + (\lambda^2 - 1)^2 \psi_i = 0$$



Фиг. 5



Фиг. 6

решение которого будет

$$\psi_i = a_i \cos(\lambda + 1)\theta + b_i \sin(\lambda + 1)\theta + c_i \cos(\lambda - 1)\theta + d_i \sin(\lambda - 1)\theta \quad (48)$$

где a_i, b_i, c_i, d_i – произвольные постоянные. Далее из второго уравнения (47) определяем

$$\phi_i = a_i \sin(\lambda + 1)\theta - b_i \cos(\lambda + 1)\theta + \frac{3\lambda - 5}{3\lambda + 5} [c_i \sin(\lambda - 1)\theta - d_i \cos(\lambda - 1)\theta] \quad (49)$$

Ограничимся рассмотрением случая однородной плиты. Опуская индексы в (48), (49) и полагая в граничных условиях $\beta = \alpha$, рассмотрим симметричные и антисимметричные случаи напряженного состояния. Исходя из (48) и (49) приходим к трансцендентному уравнению $\lambda \sin 2\alpha \pm \sin 2\lambda \alpha = 0$. Ранее такой результат получен в [13] при исследовании напряженного состояния линейно-упругой однородной плиты при изгибе с учетом поперечных сдвигов [6].

Сравнивая выражения для моментов (9) и перерезывающих сил (10) с соответствующими формулами, полученными на основании классической теории изгиба плит [3, 4] заключаем, что при учете поперечных сдвигов порядок концентрации моментов (напряжений) сохраняется, между тем перерезывающие силы, вопреки классической теории, остаются конечными и стремятся к нулю при $r \rightarrow 0$. Аналогичный результат при исследовании концентрации напряжений на кромке трещин для линейно-упругих однородных плит ранее получен в [14, 15].

Автор благодарит Г.В. Геворкяна за помощь при проведении вычислительных и графических работ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН Арм ССР, 1987. 338 с.
2. Задоян М.А. Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992. 384 с.
3. Задоян М.А. Об условиях малонапряженности составных плит // Докл. РАН. 1993. Т. 332. № 3. С. 319–321.
4. Zadoyan M.A. A problem of low level stress in compound plates // Изв. НАН Армении. Механика. 1998. V. 51. № 1. P. 21–25.
5. Галеркин Б.Г. Избранные сочинения. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1953. 438 с.
6. Reissner E.J. On the theory of bending of elastic plates // Mathem. and Phys. 1944. V. 23. № 4. P. 184–191.
7. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
8. Васильев В.В. О теории тонких пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 26–47.
9. Белубекян В.М., Белубекян М.В. О граничных условиях теории пластин // Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т. 52. № 2. С. 11–21.
10. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
11. Задоян М.А. Напряжения в окрестности угловой точки плиты // Докл. НАН Армении. Т. 97. № 4. 1997. С. 25–31.
12. Задоян М.А. Условие малонапряженности составного клина из нелинейно-упругих материалов // ПИММ. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 444–453.
13. Burton W.S., Sinclair G.B. On the singularities in Reissner's theory for the bending of elastic plates // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1986. V. 53. № 1. P. 220–232.
14. Hartranft R.J., Sih G.J. Effect of plate thickness on the bending stress distribution around through cracks // Math. and Phys. 1968. V. 47. № 3. P. 276–291.
15. Белубекян Э.В. Изгиб трансверсально-изотропной прямоугольной пластинки с симметричной трещиной // Докл. АрмССР. 1969. Т. 49. № 5. С. 225–232.

Ереван

Поступила в редакцию
18.09.2000