

УДК 539.3;539.374

© 2003 г. В.М. НИКИРЕЕВ

ЗАДАЧА ПРАНДТЛЯ ДЛЯ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Решение Л. Прандтля о внедрении штампа в среду, характеризуемой углом внутреннего трения φ и предельным сцеплением c (среда Φ , c – среда Кулона), получена в условиях плоской деформации [1–3]. Это решение широко используется главным образом в механике грунтов для оценки несущей способности оснований сооружений [4]. Для круглых в плане сооружений используется осесимметричное решение Ишлинского – Березанцева [5, 6]. Решение для плоского напряженного состояния неизвестно [7], так как для грунтов это решение нереально. Однако, его использование возможно для морского льда (более вязкого, чем речной лед) – для оценки воздействия ледовых полей на морские платформы северных морей. При толщине льда более 30 см разрушение ледового покрова происходит без изгиба, т.е. без потери его устойчивости [8].

Условие предельного равновесия для среды (φ , c) принимается в виде уравнения Друккера – Прагера [9]:

$$\sigma_0 \operatorname{tg} \varphi + c = k \tau_i \quad (1)$$

где $k = (3 - \sin \varphi) / (2 \sqrt{3} \cos \varphi)$, $\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения, $\tau_i = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 + \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]^{1/2} / \sqrt{6}$, τ_i – интенсивность касательных напряжений.

Для плоского напряженного состояния $\sigma_3 = 0$.

Коэффициент k принят из условия, что при осевом сжатии ($\sigma_2 = 0$) предельное состояние наступает при $\sigma_1 = 2c \cos \varphi / (1 - \sin \varphi) = R_c$ (критерий Кулона – Мора).

Здесь R_c – предел прочности при одноосном сжатии, равный $\sqrt{3} \tau_i$ (критерий Мизеса).

Положим $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2) / 2$, $\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) / 2$, тогда предельное условие (1) примет вид

$$2\sigma \operatorname{tg} \varphi + 3c = \sqrt{3} k (3\tau^2 + \sigma^2)^{1/2} \quad (2)$$

откуда будем иметь

$$\sigma = [6c \operatorname{tg} \varphi \pm 3k f_1(\tau)] / k_1 \quad (3)$$

$$d\sigma/d\tau = \pm 3k\tau / f_1(\tau) \quad (4)$$

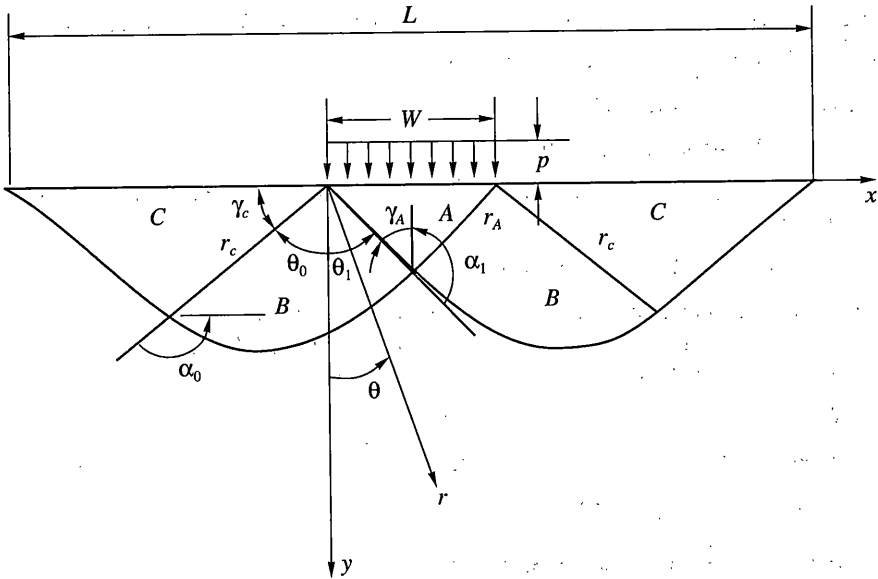
$$f_1(\tau) = (3c^2 - k_1 \tau^2)^{1/2}, \quad k_1 = 3k^2 - 4 \operatorname{tg}^2 \varphi \quad (4)$$

Для плоской задачи уравнения равновесия для невесомой среды имеют вид

$$\partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{xy} / \partial y = 0, \quad \partial \sigma_y / \partial y + \partial \tau_{xy} / \partial x = 0 \quad (5)$$

Учитывая, что $\sigma_{x,y} = \sigma \pm \tau \cos 2\alpha$, $\tau_{xy} = \tau \sin 2\alpha$, где α – угол между координатной осью x и направлением действия главного напряжения σ_1 , уравнения равновесия запишутся в виде

$$\begin{aligned} (d\sigma/d\tau + \cos 2\alpha) \partial \tau / \partial x + \sin 2\alpha \partial \tau / \partial y - 2\tau \sin 2\alpha \partial \alpha / \partial x + 2\tau \cos 2\alpha \partial \alpha / \partial y &= 0 \\ \sin 2\alpha \partial \tau / \partial x + (d\sigma/d\tau - \cos 2\alpha) \partial \tau / \partial y + 2\tau \cos 2\alpha \partial \alpha / \partial x + 2\tau \sin 2\alpha \partial \alpha / \partial y &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$



Уравнения характеристик системы (6) имеют вид

$$dy/dx = \{d\sigma/d\tau \sin 2\alpha \pm [(d\sigma/d\tau)^2 - 1]^{1/2}\} / (1 + d\sigma/d\tau \cos 2\alpha)$$

Полагая $d\tau/d\sigma = \cos 2\gamma$ [10], получим

$$dy/dx = (\sin 2\alpha \pm \sin 2\gamma) / (\cos 2\alpha + \cos 2\gamma) = \operatorname{tg}(\alpha \pm \gamma) \quad (7)$$

$$2\gamma = \arccos(\pm f_1(\tau)/3k\tau) \quad (8)$$

где $\pm\gamma$ – угол между σ_1 и направлением характеристик.

Предельная область состоит из трех зон А, В, С (фигура).

Зона С. В треугольной зоне $\sigma_2 = 0$, т.е. $\sigma = \tau = \tau_c = R_c/2$. Так, при $\varphi = 41^\circ$, $\cos 2\gamma_c = 0,413$, $\gamma_c = 32^\circ 48'$.

Зона В. В полярной системе координат уравнения (5) и (6) примут вид

$$\partial\sigma_r/\partial r + \partial\tau_{r\theta}/(r\partial\theta) + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r = 0$$

$$\partial\tau_{r\theta}/\partial r + \partial\sigma_\theta/(r\partial\theta) + 2\tau_{r\theta}/r = 0$$

$$(d\sigma/d\tau + \cos 2\alpha)\partial\tau/\partial r + \sin 2\alpha\partial\tau/(r\partial\theta) - 2\tau\sin 2\alpha\partial\alpha/\partial r + 2\tau\cos 2\alpha(\partial\alpha/(r\partial\theta) + 1/r) = 0; \quad (9)$$

$$\sin 2\alpha\partial\tau/\partial r + (d\sigma/d\tau - \cos 2\alpha)\partial\tau/(r\partial\theta) + 2\tau\cos 2\alpha\partial\alpha/\partial r + 2\tau\sin 2\alpha(\partial\alpha/(r\partial\theta) + 1/r) = 0$$

так как $\sigma_{r,\theta} = \sigma \pm \tau \cos 2\alpha$, $\tau_{r\theta} = \tau \sin 2\alpha$, здесь α – угол между текущим радиусом r и направлением главного напряжения σ_1 .

Уравнения характеристик $r d\theta/dr = \operatorname{tg}(\alpha \pm \gamma)$, где γ определяется по формуле (8). Для характеристик в виде пучка прямых, совпадающих с радиальным направлением, $\tau = \operatorname{const}$ и $\alpha = \operatorname{const}$. Следовательно $\partial\tau/\partial r = 0$ и $\partial\alpha/\partial r = 0$.

Для этого семейства характеристик

$$d\theta = dr \operatorname{tg}(\alpha + \gamma)/r \quad (10)$$

Из системы уравнений (9) с учетом того что $d\tau/dr = (\partial\tau/\partial\theta)(d\theta/dr) = d\tau \operatorname{tg}(\alpha + \gamma)/rd\theta$, $d\alpha/dr = (\partial\alpha/\partial\theta)(d\theta/dr) = d\alpha \operatorname{tg}(\alpha + \gamma)/rd\theta$ имеем

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha d\tau + 2\tau \cos 2\alpha (d\alpha + d\theta) &= 0 \\ (d\sigma/d\tau - \cos 2\alpha)d\tau + 2\tau \sin 2\alpha (d\alpha + d\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Решение для неизвестных $d\tau$ и $2\tau (d\alpha + d\theta)$ имеется, если $(d\sigma/d\tau)\cos 2\alpha = 1 = \cos 2\alpha/\cos 2\gamma$, откуда следует

$$\cos 2\gamma = \cos 2(\pi - \alpha), \quad \gamma = (\pi - \alpha) \quad (12)$$

Аналогичная зависимость получается из формулы (10) при $d\theta = 0$.

Теперь можем установить зависимость между τ , γ и θ . Для второго семейства характеристик (в виде семейства кривых) имеем

$$d\theta = dr \operatorname{tg}(\alpha - \gamma)/r \quad (13)$$

Из уравнения (11) с учетом (12) и (8) получим

$$\begin{aligned} \pm f_2(\tau)d\tau &= 2\tau(d\theta - d\gamma)f_1(\tau) \\ f_2(\tau) &= (4k_2\tau^2 - 3c^2)^{1/2}, \quad k_2 = 3k^2 - \operatorname{tg}^2\varphi \end{aligned} \quad (14)$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_c; \quad \alpha = \alpha_0 = \pi - \gamma_c \text{ при } \theta = \theta_0 = \gamma_c - \pi/2 \\ \tau &= \tau_A; \quad \alpha = \alpha_1 = \pi - \gamma_A \text{ при } \theta = \theta_1 = \pi - \gamma_A \end{aligned} \quad (15)$$

Интегрируя выражение (14), с учетом граничных условий (15), и характера кривой (3), получим уравнение для определения τ_A :

$$\int_{\tau_c}^{\tau_A} \pm f_2(\tau)/[\tau f_1(\tau)]d\tau = \pi, \quad \tau_c = R_c/2$$

Зная τ_A из выражения (3) находим σ_A . Значения τ_A , σ_A , σ_1 , σ_2 в долях от R_c при $60^\circ \geq \varphi \geq 26^\circ$ приведены в таблице.

Значения главных напряжений σ_1 на границе зон В и А достигают максимума при $\varphi = 41^\circ$ ($\max \sigma_1 = 4.89R_c$).

При $25^\circ \geq \varphi \geq 0^\circ$ напряжение σ_1 определяется из формулы

$$\begin{aligned} \sigma_1/R_c &= s_1 + (s_2 - s_1)\varphi^\circ/25^\circ \\ s_1 &= 3(1 - \sin\varphi)/(3 - 5\sin\varphi) \\ s_2 &= t_1 + [4\sin\varphi(1 - \sin\varphi) + (3 - \sin\varphi)((1 - \sin\varphi)^2 - t_2^2 t_1^2)^{1/2}]/t_2 \\ t_1 &= 0.5(1 - \sin\varphi)/(3 - 2\sin\varphi - \sin^2\varphi)^{1/2}, \quad t_2 = (1 + \sin\varphi)(3 - 5\sin\varphi) \end{aligned} \quad (16)$$

Следует отметить, что при плоской деформации ($\sigma_3 > \sigma_2$) кинематическая схема Прандтля или Хилла реализуется при любых значениях φ° , так как тип системы дифференциальных уравнений является гиперболическим, т.е. имеются два семейства характеристик.

При плоском напряженном состоянии ($\sigma_3 = 0$) основная система уравнений (9) является гиперболической, только при $\tau_A > t_1$. В этом случае приведенное выше интегральное соотношение реализуется при $\varphi \geq 26^\circ$.

φ°	τ_A/R_c	σ_A/R_c	σ_1/R_c	σ_2/R_c
26	0.21	1.97	2.18	1.76
28	0.34	2.11	2.45	1.77
30	0.47	2.26	2.73	1.79
32	0.61	2.45	3.06	1.84
34	0.78	3.10	3.88	2.32
36	1.03	3.60	4.63	2.57
40	1.41	3.47	4.88	2.06
45	1.67	3.16	4.83	1.49
50	1.79	2.83	4.62	1.04
55	1.84	2.55	4.39	0.71
60	1.85	2.32	4.17	0.47

При $\tau_A/R_c = t_1$ ($\sigma_A/R_c = s_2 - t_1$), когда $\cos 2\gamma = 1$ [10], система уравнений становится параболической, т.е. имеется одно семейство характеристик. При $\tau_A/R_c < t_1$ ($\sigma_A/R_c > s_2 - t_1$), когда $\varphi \leq 25^\circ$ система уравнений становится эллиптической (вещественных характеристик нет).

В масштабе σ_1/R_c протяженность эллиптической зоны невелика. Она равна $s_2 - s_1$. Так $s_2 - s_1 = 1.155 - 1 = 0.155$ при $\varphi = 0^\circ$, $s_2 - s_1 = 2.06 - 1.95 = 0.11$ при $\varphi = 25^\circ$. Поэтому в уравнении (16) на интервале $s_2 - s_1$ принята линейная зависимость σ_1/R_c от φ° .

Плавная зависимость σ_1 от φ° не нарушается на всем протяжении φ от 0° до 60° . Так $\sigma_1 = 2.18R_c$ при $\varphi = 26^\circ$, $\sigma_1 = 2.06R_c$ при $\varphi = 25^\circ$, $\sigma_1 = R_c$ при $\varphi = 0^\circ$.

Следует отметить, что в эллиптической зоне величина $0.5(\sigma_1 - \sigma_2) = \tau$ незначительна и уменьшается от t_1R_c до 0, поэтому линии скольжения при $\varphi \leq 25^\circ$ не реализуются. В этом случае предельное состояние наступает в результате раздробления льда под штампом.

Определим конфигурацию зоны В. Дифференцируя выражение (8), получим

$$2d\gamma = 3c^2 d\tau / [\tau f_1(\tau) f_2(\tau)] \tag{17}$$

Из выражения (14) исключаем $2d\gamma \tau f_1(\tau)$:

$$d\theta = 2k_2 \tau d\tau / [f_1(\tau) f_2(\tau)] \tag{18}$$

Для криволинейных характеристик имеем $d\theta = -\text{tg} 2\gamma dr/r = -[f_2(\tau)/f_1(\tau)] dr/r$, откуда, учитывая выражение (18), определим $dr/r = -2k_2 \tau d\tau / [f_2(\tau)]^2$.

Интегрируя и учитывая, что при $\tau = \tau_c$ $r = r_c$, получим,

$$r = r_c [f_2(\tau_c) / f_2(\tau)]^{1/2} \tag{19}$$

Из выражения (19), зная τ_A , находим r_A в зависимости от r_c . Из равенства $r_A = W / (2 \sin \gamma_A)$, определяем r_c . Угол γ_A находим из выражения (8) при $\tau = \tau_A$ (W – протяженность участка загрузки).

Зона А. В этой зоне оба семейства характеристик – прямые линии, образующие с горизонталью угол $\pi/2 - \gamma_A$. Главные напряжения σ_1 и σ_2 постоянны и направлены, соответственно, вертикально и горизонтально, т.е. $\sigma_1 = p$. Величины σ_1 и σ_2 для различных значений φ приведены в таблице.

В случае плоской деформации при $\varphi = 41^\circ$ напряжение $\sigma_1 = 19.11R_c$, т.е. почти в четыре раза превышает σ_1 при плоском напряженном состоянии.

Пример. Определим протяженность пластической области L при $\varphi = 41^\circ$.

Будем иметь $\gamma_c = 32^\circ 48'$, $\gamma_A = 36^\circ 03'$, $r_A = 0.848W$, $r_c = 1.49W$, что позволяет определить величину L , которая равняется $6W$. В случае плоской деформации величина L равна $18.2W$.

Рассмотренная задача является статически определимой, так как число неизвестных напряжений равняется числу используемых уравнений [11]. Для статически определяемых задач нижняя и верхняя оценки совпадают. Известное решение Хилла [12, 13] о внедрении штампа в идеально пластическую среду в отношении предельной нагрузки совпадают с известным решением Прандтля, несмотря на различие кинематических схем разрушения.

Следует отметить, что в [12] нет решения задачи предельного равновесия среды (φ, c) при плоском напряженном состоянии. В главе XI приводится вывод известных уравнений Кёттера, полученных им для плоской задачи в 1903 году. Недостатком этих уравнений является то, что необходимо предварительно знать уравнения характеристик. Потребовалось 17 лет, чтобы Прандтль дал решение задачи о вдавливании штампа в среду (φ, c).

Решение Прандтля. Аналогичным путем можно получить решение Прандтля для плоской деформации. Используя критерий Кулона – Мора, получим $\sigma = \tau/\sin\varphi - c/\operatorname{tg}\varphi$, $d\sigma/d\tau = 1/\sin\varphi$, $2\gamma = \arccos(\sin\varphi)$; откуда следует $\gamma = \pi/4 - \varphi/2$.

Из уравнений (11) и (12) имеем $d\tau/\tau = 2 \operatorname{tg}\varphi (d\theta - d\gamma)$. Интегрируя с учетом $\theta_0 = \gamma_c - \pi/2$, получим $\tau = \tau_c \exp[2(\pi/2 - \gamma + \theta) \operatorname{tg}\varphi]$, откуда при $\theta_A = \gamma_A$ будем иметь $\tau_A = \tau_c \exp(\pi \operatorname{tg}\varphi)$, $\tau_c = c \cos\varphi / (1 - \sin\varphi)$. Из выражения (3) имеем $\sigma_A = \tau_A/\sin\varphi - c/\operatorname{tg}\varphi$.

Так как $p = \sigma_I = \sigma_A + \tau_A$, то $p = \sigma_I = \tau_c \exp(\pi \operatorname{tg}\varphi) (1 + 1/\sin\varphi) - c/\operatorname{tg}\varphi$ или $p = c \operatorname{ctg}\varphi \times [\operatorname{tg}^2(\pi/4 + \varphi/2) \exp(\pi \operatorname{tg}\varphi) - 1]$, что совпадает с решением Прандтля.

Для зоны B имеем $r_c = r_A \exp(\pi/2 \operatorname{tg}\varphi)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прандтль Л. О твердости пластических материалов и сопротивлении резанию // Теория пластичности. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 70–79.
2. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Мир, 1969. 863 с.
3. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М.: Наука, 1990. 242 с.
4. Николаевский В.Н. Механические свойства грунтов и теория пластичности. Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемых тел. Т. 6. М.: ВИНТИ, 1972. 84 с.
5. Ишлинский А.Ю. Осесимметричная задача теории пластичности и проба Бринелля // ПММ. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 201–224.
6. Березанцев В.Г. Осесимметричная задача теории предельного равновесия сыпучей среды. М.: Гостехиздат, 1952. 120 с.
7. Мальшев М.В. Прочность грунтов и устойчивость оснований сооружений. М.: Стройиздат, 1980. 137 с.
8. Мишель Б. Ледовые нагрузки на гидротехнические сооружения и суда. М.: Транспорт, 1978. 112 с.
9. Друккер Д., Прагер В. Механика грунтов и пластический анализ или предельное проектирование // Определяющие законы в механике грунтов. М.: Мир, 1975. С. 166–177.
10. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
11. Генки Г. О некоторых статически определяемых случаях равновесия в пластических телах // Теория пластичности. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 80–101.
12. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
13. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.

Москва

Поступила в редакцию

31.10.2001