МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2003

УДК 531.36

© 2003 г. Б.Н. СОКОЛОВ

ОДНОКАНАЛЬНЫЙ РЕЛЕЙНЫЙ РЕГУЛЯТОР В ЗАДАЧЕ ГАРАНТИРОВАННОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Рассматривается задача стабилизации относительно заданного положения двигающегося прямолинейно и поступательно твердого тела с внутренними материальными точками, которые соединены друг с другом и с внешним телом линейными вязкоупругими связями. Движение происходит под действием постоянного внешнего возмущения и релейной управляющей силы, направленных вдоль линии движения. Предполагается, что управляющей стороне кинематическое состояние внутренней системы точек не известно, а в канале управления релейной силой имеется фиксированное запаздывание, так что сколь угодно частые переключения управления невозможны. Для решения задачи используется игровой подход [1–3], при котором силовое воздействие внутренней системы материальных точек на движение внешнего тела трактуется как действие ограниченной по величине заранее неизвестной внешней помехи. Дана оценка величины этого воздействия и амплитуды возникающих под действием сил инерции колебаний внутренних масс в результате переключения релейного управления. Получена гарантированно достижимая оценка точности стабилизации заданного положения твердого тела в зависимости от механических характеристик системы и величины управляющей силы. В качестве примера рассмотрено управляемое движение двухмассовой колебательной системы. Работа примыкает к [4–6] и продолжает исследования гарантированно оптимальных релейных регуляторов с запаздыванием в канале управления [7–9]. Динамика твердого тела с упругими и диссипативными элементами в предположении о малости периода собственных колебаний и времени их затухания по сравнению с характерным временем движения исследовалась в [10].

Рассматривается объект, состоящий из твердого тела P с массой m_p и системы N материальных точек p_i с массами m_i, соединенных друг с другом и с твердым телом P линейными упругими и диссипативными связями. Тело P может перемещаться поступательно вдоль оси X неподвижной системы координат $OXYZ$ под действием постоянной силы $\mathbf{f}$, направленной вдоль оси X, и релейного управляющего воздействия w, которое может принимать одно из двух значений: ноль либо $\mathbf{w}_0$, где вектор $\mathbf{w}_0$ направлен против силы $\mathbf{f}$ и $w_0 > f > 0$. Предполагается, что продолжительность каждого участка постоянства управления не меньше Δt_D, где Δt_D – заданная величина запаздывания в канале управления двигателем.

Требуется выбором управляющего воздействия u как функции фазового состояния тела P обеспечить режим стабилизации нулевого положения этого тела в неподвижной системе координат с максимальной гарантированной точностью.

Кинематическое состояние системы материальных точек управляющей стороне не известно. Поэтому представляется целесообразным при формировании управления использовать игровой подход, трактуя изменение результирующей силы взаимодействия системы точек и тела P как результат действия неизвестной, но ограниченной по величине помехи. Оценим величину этой помехи, а также амплитуду колебаний системы точек, порожденную периодическими переключениями управления. Свяжем жестко с телом подвижную систему координат $O'xyz$, оси которой будут двигаться поступательно по отношению к неподвижной, и направим ось x вдоль оси X. Обозначим через $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$ векторы смещений точек p_k от равновесных положений O_k в подвижной системе координат. Пусть M – совокупная масса системы материальных точек и тела P: $M = m_p + \sum m_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ и $(x, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ – координаты тела в неподвижной системе координат. Тогда

$$\ddot{x} + M^{-1}\sum_{k=1}^{N} m_k\ddot{x}_k = F + u, \quad u = \{0, -u_0\}$$
$$F = M^{-1}f = \text{const}, \quad u = M^{-1}w, \quad u_0 = M^{-1}w_0 \tag{1}$$

Уравнения малых колебаний точек p_k относительно положения равновесия запишем в форме уравнений Лагранжа. Будем характеризовать смещения $\mathbf{r}_k$ вектором $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)^{\mathrm{T}}$ обобщенных координат, связанных с $\mathbf{r}_k$ зависимостью

$$\mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{H}_{ki}q_i \tag{2}$$

где векторы $\mathbf{H}_{ki}$ постоянны. Кинетическая энергия точек p_k в подвижной системе координат определяется соотношением

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k(\dot{\mathbf{r}}_k)^2 = \frac{1}{2}(A\dot{q}, \dot{q}), \quad A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} m_k(\mathbf{H}_{ki}, \mathbf{H}_{kj})$$

Отсюда получаем уравнения малых колебаний точек p_k:

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = Q \tag{3}$$

Матрицы A, B, C – симметричные постоянные положительно определенные матрицы масс, диссипации и упругой потенциальной энергии, Q – вектор обобщенных сил, обусловленных силами инерции, с компонентами

$$Q_j = -\ddot{x}\sum_{s=1}^{N} H'_{sj}m_s \tag{4}$$

где H'_{sj} – x-компонента вектора $\mathbf{H}_{sj}$ (2). Выразим $\ddot{x}$ из уравнения (1) и подставим в (4) и (3). Получим

$$D\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = -H(F + u) \tag{5}$$

Здесь через D обозначена матрица с компонентами

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{N} m_k(\mathbf{H}_{ki}, \mathbf{H}_{kj}) - M^{-1}\sum_{k,s=1}^{N} m_k m_s H'_{ki}H'_{sj}$$

а через H – вектор с компонентами $H_j = \sum H'_{sj}m_s$ $(s = 1, 2, \ldots, N)$.

Утверждение. Матрица D симметрична и положительно определена. Симметричность матрицы следует из ее определения. Для доказательства положительной определенности достаточно показать

$$\sum_{k,i,j} m_k(\mathbf{H}_{ki}, \mathbf{H}_{kj})q_iq_j > M^{-1}\sum_{i,j,k,s} m_k m_s H'_{ki}H'_{sj}q_iq_j =$$
$$= M^{-1}\left(\sum_{i,k} m_k H'_{ki}q_i\right)^2, \quad \forall q_i: \sum_i q_i^2 \neq 0 \tag{6}$$

Обозначим через a и b векторы с компонентами $a_k = \sqrt{m_k}$, $b_k = \sqrt{m_k}\sum H'_{ki}q_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Из известного неравенства $(a, b)^2 \le a^2b^2$ следует оценка

$$\left(\sum_{k=1}^{N} m_k\right)\left(\sum_{i,j,k} m_k H'_{ki}q_i H'_{sj}q_j\right) \ge \left(\sum_{i,k} m_k H'_{ki}q_i\right)^2$$

Отсюда получаем соотношение (6) в силу очевидных неравенств

$$\sum_{k=1}^{N} m_k < M, \quad \sum_{i,j,k} m_k(\mathbf{H}_{ki}, \mathbf{H}_{kj})q_iq_j \ge \sum_{i,j,k} m_k H'_{ki}H'_{kj}q_iq_j$$

Пусть характеристическое уравнение системы (5) $\det(\lambda^2 D + \lambda B + C) = 0$ имеет m пар комплексно сопряженных корней и $2(n - m)$ – действительных. Решение уравнения (5) на участке (t_0, t_1) постоянства управления имеет вид

$$q(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\xi_i \exp(\lambda_i(t - t_0)) + \bar{\alpha}_i\bar{\xi}_i \exp(\bar{\lambda}_i(t - t_0)) + \\ + \sum_{i=m+1}^{2n} \alpha_i\xi_i \exp(\lambda_i(t - t_0)) - C^{-1}H(F + u) \tag{7}$$

Черта над символом означает его комплексно сопряженное значение, α_i – неопределенные коэффициенты, которые следует искать либо из начальных условий, либо из условий непрерывности обобщенных координат и скоростей в момент переключения управления, вектор ξ_i удовлетворяет уравнению $(\lambda_i^2 D + \lambda_i B + C)\xi_i = 0$ или $d_i\lambda_i^2 + b_i\lambda_i + c_i = 0$, где $d_i = (D\xi_i, \bar{\xi}_i)$, $b_i = (B\xi_i, \bar{\xi}_i)$, $c_i = (C\xi_i, \bar{\xi}_i)$ – действительные положительные коэффициенты. Отсюда следует: $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$ при всех i. Предположим, что в момент t_1 управление поменяло значение с $u(t_1 - 0) = u_1$ на $u(t_1 + 0) = u_2$. Обозначим через β_i соответствующие коэффициенты при экспоненциальных функциях в представлении (7) после переключения управления. Для их определения воспользуемся условиями "сшивки" решений в момент переключения

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\xi_i \exp(\lambda_i(t_1 - t_0)) + \bar{\alpha}_i\bar{\xi}_i \exp(\bar{\lambda}_i(t_1 - t_0)) + \sum_{i=m+1}^{2n} \alpha_i\xi_i \exp(\lambda_i(t_1 - t_0)) + \\ + C^{-1}H\Delta u = \sum_{i=1}^{m} \beta_i\xi_i + \bar{\beta}_i\bar{\xi}_i + \sum_{i=2m+1}^{2n} \beta_i\xi_i \\ \Delta u = u_2 - u_1, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\alpha_i\xi_i \exp(\lambda_i(t_1 - t_0)) + \bar{\lambda}_i\bar{\alpha}_i\bar{\xi}_i \exp(\bar{\lambda}_i(t_1 - t_0)) + \\ + \sum_{i=m+1}^{2n} \lambda_i\alpha_i\xi_i \exp(\lambda_i(t_1 - t_0)) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\beta_i\xi_i + \bar{\lambda}_i\bar{\beta}_i\bar{\xi}_i + \sum_{i=2m+1}^{2n} \lambda_i\beta_i\xi_i \tag{8}$$

Будем искать коэффициенты β_i, $\bar{\beta}_i$ в виде

$$\beta_i = \alpha_i \exp(\lambda_i(t_1 - t_0)) + \gamma_i, \quad \bar{\beta}_i = \bar{\alpha}_i \exp(\bar{\lambda}_i(t_1 - t_0)) + \bar{\gamma}_i \tag{9}$$

Подставим представление (9) в условия "сшивки" (8). После упрощений получим линейную систему $2n$ уравнений для $2n$ неизвестных γ_i, $\bar{\gamma}_i$:

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \xi_i + \bar{\gamma}_i \bar{\xi}_i + \sum_{i=2m+1}^{2n} \gamma_i \xi_i = C^{-1} H \Delta u$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \gamma_i \xi_i + \bar{\lambda}_i \bar{\gamma}_i \bar{\xi}_i + \sum_{i=2m+1}^{2n} \lambda_i \gamma_i \xi_i = 0$$

Следовательно, γ_i от α_j не зависят и определяются только вектором $C^{-1}H\Delta u$. На участке постоянства управления в качестве критерия интенсивности k-й моды колебаний рассмотрим величину

$$|\beta_k| = |\alpha_k \exp(\lambda_k(t_1 - t_0)) + \gamma_k| \le |\alpha_k| \exp(\mathrm{Re}\lambda_k(t_1 - t_0)) + |\gamma_k| \tag{10}$$

Максимум достигается при $\arg\alpha_k + \arg\exp(\lambda_k(t_1 - t_0)) = \arg\gamma_k$. Моменты переключения управления определяются только фазовым состоянием тела P. При формировании управления с бесконечным числом переключений на бесконечном интервале стабилизации при неизвестном кинематическом состоянии системы материальных точек управляющая сторона не застрахована против реализации любой (в том числе и доставляющей максимум в (10)) фазы в момент переключения. Поэтому при игровом подходе управляющая сторона должна считать оценку (10) достижимой. Допустим теперь, что продолжительность каждого участка постоянства управления не меньше Δt, где $\Delta t \ge \Delta t_D$. В качестве t_0 может быть принят любой момент переключения управления. Следовательно, после достаточного большого числа переключений все значения $|\beta_k|$ не будут превосходить β_k^*, где

$$\beta_k^* = |\gamma_k|(1 - \exp(\mathrm{Re}\lambda_k \Delta t))^{-1} \tag{11}$$

а величина Δt, обеспечивающая оценку $|\beta_k|$, не превышающую заданное значение β_k^*, определяется соотношением

$$\Delta t \ge \Delta t^* = -\frac{1}{\mathrm{Re}\lambda_k} \ln \frac{\beta_k^*}{\beta_k^* - |\gamma_k|}$$

Примем в качестве установившейся амплитуды колебаний конструкции на бесконечном периоде стабилизации величину

$$G = \frac{1}{2}[\overline{\lim_{t\to\infty}}(l, q(t)) - \underline{\lim_{t\to\infty}}(l, q(t))] \tag{12}$$

Здесь l – заданный вектор, черточки сверху и снизу означают верхний и нижний пределы соответственно. Подставляя в это соотношение $q(t)$ (7), где α_i и t_0 заменим на β_i и t_1, и используя оценку (11), получим

$$G \le G(\Delta t) = 2\sum_{k=1}^{n} |(l, \xi_k)|\beta_k^* + \frac{1}{2}|(l, C^{-1}H)||\Delta u| =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} |(l, \xi_k)||\gamma_k|(1 - \exp(\mathrm{Re}\lambda_k \Delta t))^{-1} + \frac{1}{2}|(l, C^{-1}H)||\Delta u|$$

Выбор Δt из условия

$$\Delta t \geq \max(\Delta t_D, \Delta t_A), \text{ где } \Delta t_A\colon G(\Delta t_A) = G_A = \text{const} \tag{13}$$

обеспечивает гарантированную ограниченность амплитуды колебаний величиной G_A: $G \leq G_A$. Оценим теперь величину $M^{-1}\left|\sum m_k \ddot{x}_k\right|$ в соотношении (1)

$$\begin{gathered} M^{-1}\left|\sum_{k=1}^{N} m_k \ddot{x}_k\right| = M^{-1}\left|\sum_{k=1}^{N} m_k \sum_{j=1}^{n} H'_{kj}\ddot{q}_j\right| = M^{-1}|(H, \ddot{q})| \leq \\ \leq M^{-1}\left|\sum_i \lambda_i^2 \alpha_i (H, \xi_i) + \bar{\lambda}_i^2 \bar{\alpha}_i (H, \bar{\xi}_i)\right| \leq \varepsilon_0 = 2M^{-1}\sum_i |\lambda_i|^2 |(H, \xi_i)| \beta_k^* \end{gathered} \tag{14}$$

Далее предполагается выполнено $F + \varepsilon_0 < u_0$, $F > \varepsilon_0$. Рассмотрим порожденную исходным уравнением (1) и оценками (13), (14) игровую задачу стабилизации с максимальной гарантированной точностью нулевого положения следующего объекта:

$$\begin{gathered} \dot{x} = v, \quad \dot{v} = F + u + \varepsilon, \quad x(t_0) = x_0, \quad v(t_0) = v_0 \\ |\varepsilon(t)| \leq \varepsilon_0 = \text{const}, \quad \varepsilon_0 < F = \text{const}, \quad F + \varepsilon_0 < u_0, \quad 0 < u_0 = \text{const} \\ u = \{0, -u_0\} \end{gathered} \tag{15}$$

где $u(t)$ – релейное управление, $\varepsilon(t)$ – ограниченная случайная помеха. Если в некоторый момент времени t_α произошло изменение управления, то следующий момент t_β его переключения удовлетворяет неравенству

$$t_\beta - t_\alpha \geq \Delta t_* = \text{const} > 0 \tag{16}$$

Таким образом, продолжительность каждого интервала постоянства управления не меньше Δt_*. Далее возмущение $\varepsilon(t)$ будем рассматривать как игрока, стремящегося максимизировать погрешность стабилизации.

Сделаем в уравнениях (15) замену переменных $F' = F - u_0/2$, $u_0' = u_0/2$. Вид уравнения (15) после замены не изменится, поэтому штрихи далее опускаем. Редуцированное управление $u(t)$ принимает одно из двух значений:

$$u(t) = \{-u_0, u_0\} \tag{17}$$

Введем обозначения $z = (x, v)$, $z_0 = (x_0, v_0)$, τ – время, прошедшее с момента t_α последнего переключения управления в прошлом, $y = (z, \tau, u(t_\alpha + 0))$. Назовем допустимым любое управление $u(t)$, удовлетворяющее условиям (16), (17). Эффективность допустимого управления определим функционалом

$$K[y_0, u(\cdot)] = \sup_{\varepsilon} \varlimsup_{t \to \infty} |x[t, y_0, u(\cdot), \varepsilon(\cdot)]| \tag{18}$$

где предел берется верхний, точки в записи $u(\cdot)$, $\varepsilon(\cdot)$ означают, что рассматривается зависимость функционала от управления как от алгоритма, и от помехи как от реализации во времени. Ценой игры будет функция

$$J(y_0) = \inf_u K[y_0, u(\cdot)]$$

максимальная гарантированная точность стабилизации.

Задача. Пусть начальное положение системы y_0 фиксировано. Требуется минимизировать функционал (18) на множестве допустимых управлений.

Решение этой задачи известно и построено в [7]. Показано, что минимальная гарантированная погрешность p стабилизации от начальных условий не зависит и определяется корнем уравнения

$$t_m(p) = \Delta t_*$$

$$t_m(p) = \frac{\sqrt{2p(u_0 - F - \varepsilon_0)}}{(u_0 + F + \varepsilon_0)\sqrt{u_0(u_0 - \varepsilon_0)(u_0 - F + \varepsilon_0)}} \times \tag{19}$$

$$\times \left\{ \sqrt{(u_0 + \varepsilon_0)[(u_0 - \varepsilon_0)^2 - F^2]} + \sqrt{\frac{u_0^4 - \varepsilon_0^4 + 2F\varepsilon_0(u_0^2 - \varepsilon_0^2) - F^2(u_0^2 + \varepsilon_0^2)}{u_0}} \right\}$$

Построено управление $u(x, v, \tau)$ как функция состояния системы (15), обеспечивающая достижение этого результата. Заменяя в этих соотношениях Δt_*, ε_0 на их значения (13), (14) соответственно, получим гарантированное значение точности стабилизации твердого тела P с внутренними степенями свободы.

Пример. Рассмотрим механическую систему, состоящую из корпуса и твердого тела, заключенного в корпус и связанного с корпусом вязкоупругим демпфером с линейными характеристиками. Корпус P может перемещаться прямолинейно под действием релейной управляющей силы $w(t)$ и постоянной силы f. Внутреннее тело может перемещаться вдоль корпуса в направлении его движения. Обозначим через m массу тела, а через M – совокупную массу тела и корпуса. Вычислим величину ε_0 (14), а также получим оценку $G(\Delta t_*)$ (13) амплитуды колебаний (12) заключенного в корпус тела. Пусть x – абсолютная координата корпуса, а y – смещение тела относительно своего равновесного положения в корпусе. Движение такой системы описывается уравнениями

$$\ddot{x} + M^{-1}m\ddot{y} = F + u, \quad m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = -m\ddot{x}, \; F = M^{-1}f, \quad u = M^{-1}w$$

Управление $u(t)$ может принимать значения (17), а на продолжительность участков постоянства управления наложено ограничение (16). Исключая из последнего уравнения $\ddot{x}$, получим

$$\mu\ddot{y} + b\dot{y} + cy = -m(F + u(t)), \quad \mu = m(M - m)/M \tag{20}$$

Здесь b – коэффициент вязкости демпфера, c – жесткость пружины. Предположим, что соответствующее (20) характеристическое уравнение имеет пару комплексно сопряженных корней. Запишем решение уравнения (20) на участке постоянства управления в виде (7):

$$y = \alpha\exp(\lambda(t - t_0)) + \bar{\alpha}\exp(\bar{\lambda}(t - t_0)) - c^{-1}m(F + u)$$

Здесь α, $\bar{\alpha}$ – постоянные коэффициенты, определяемые либо из начальных условий, либо из условий "сшивки" решений в момент переключения, λ, $\bar{\lambda}$ – корни характеристического уравнения $\mu\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Отсюда $\lambda_{1,2} = -b/2\mu \pm i\omega$, где $\omega^2 = c/\mu - (b/2\mu)^2$. Предполагая, что в момент t_1 управление переключилось, получим для определения соответствующих коэффициентов β, $\bar{\beta}$ систему уравнений (8):

$$\alpha\exp(\lambda(t_1 - t_0)) + \bar{\alpha}\exp(\bar{\lambda}(t_1 - t_0)) + c^{-1}m\Delta u = \beta + \bar{\beta}$$

$$\lambda\alpha\exp(\lambda(t_1 - t_0)) + \bar{\lambda}\bar{\alpha}\exp(\bar{\lambda}(t_1 - t_0)) = \lambda\beta + \bar{\lambda}\bar{\beta}, \quad \Delta u = u(t_1 + 0) - u(t_1 - 0)$$

Будем искать решение этой системы в виде (9). Подставляя представление (9) в условия "сшивки", получим для γ, $\bar{\gamma}$ два уравнения $\lambda\gamma + \bar{\lambda}\bar{\gamma} = 0$, $\gamma + \bar{\gamma} = c^{-1}m\Delta u$. Эти уравнения имеют решение

$$\gamma = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}-\lambda}c^{-1}m\Delta u, \quad \bar{\gamma} = \frac{\lambda}{\lambda-\bar{\lambda}}c^{-1}m\Delta u$$

Оценка $|\beta|$ (10) в рассматриваемом случае следующая:

$$|\beta| = |\alpha\exp(\lambda(t_1-t_0))+\gamma| \le |\alpha|\exp(\mathrm{Re}\lambda(t_1-t_0)) + |\gamma|$$

$$|\gamma| = mc^{-1}u_0\omega_0/\omega, \quad \omega_0^2 = c/\mu$$

Предполагая, что продолжительность каждого участка постоянства управления не меньше Δt_* (16), получаем оценку установившегося после достаточно большого числа переключений значения $|\beta|$:

$$|\beta| \le \beta_* = mc^{-1}u_0(1-\exp(\mathrm{Re}\lambda\Delta t_*))^{-1}\omega_0/\omega$$

Отсюда получаем оценку величины воздействия внутренней массы на движение корпуса

$$M^{-1}|m\ddot{y}| = M^{-1}m\left|(\lambda^2\beta\exp(\lambda(t-t_0))+\bar{\lambda}^2\bar{\beta}\exp(\bar{\lambda}(t-t_0))\right| \le 2\frac{mc}{M\mu}\beta_* =$$

$$= \frac{2m\omega_0}{(M-m)\omega}u_0(1-\exp(\mathrm{Re}\lambda\Delta t_*))^{-1} = \varepsilon_0$$

Максимум достигается в моменты переключения при фазе колебаний, удовлетворяющей равенству $\arg\lambda^2 + \arg\beta = \pi k$ ($k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$). Амплитуда возникающих колебаний не превосходит $G(\Delta t_*) = \beta_* + c^{-1}mu_0$. Гарантированная точность стабилизации определяется корнем уравнения (19) после подстановки туда найденного значения ε_0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
3. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 518 с.
4. *Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г.* Управление космическим летательным аппаратом. М.: Машиностроение, 1964. 402 с.
5. *Гаушус Э.В., Смольянинов Н.Д.* Исследование релейной системы стабилизации летательного аппарата // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 2. С. 5–13.
6. *Гаушус Э.В.* Исследование динамических систем методом точечных преобразований. М.: Наука, 1976. 368 с.
7. *Баничук Н.В., Карпов И.И., Климов Д.М. и др.* Механика больших космических конструкций. М.: Факториал, 1997. 302 с.
8. *Иванова В.Ф., Соколов Б.Н.* Максимальная гарантированная точность релейного регулятора в одномерной задаче стабилизации // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 2. С. 26–36.
9. *Соколов Б.Н.* О структуре максимально экономичного релейного регулятора гарантированной точности // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 3. С. 17–33.
10. *Черноусько Ф.Л.* О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 34–42.

Москва

Поступила в редакцию
24.04.2001