

УДК 539.3

© 2002 г. Т.И. БЕЛЯНКОВА, В.В. КАЛИНЧУК, С.Ю. УСТИНОВА

**О ДИНАМИЧЕСКОЙ ЖЕСТКОСТИ ДВУХСЛОЙНОГО  
ПРЕДНАПРЯЖЕННОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА**

В рамках линеаризованной теории наложения малых деформаций на конечные развивается метод исследования динамики контактного взаимодействия жесткого осциллирующего штампа с слоисто-неоднородной преднапряженной средой, представляющей собой слой  $|x_1|, |x_2| \leq \infty, 0 \leq x_3 \leq h$ , жестко сцепленный с полупространством  $x_3 \leq 0$ . Штамп занимает в плане область  $\Omega$  и совершает установившиеся колебания с частотой  $\omega$ .

Приведены выражения, описывающие волновое поле в слоисто неоднородном преднапряженном полупространстве. На примере задачи о вертикальных колебаниях штампа изучено влияние структуры среды и локализации начальных напряжений (в слое или в полупространстве) на ее динамическую жесткость. Исследовано влияние различных видов начально-деформированного состояния (далее НДС) неоднородного полупространства на динамику контактирующей с ним двухмассовой инерционной системы, которая представляет собой массивный штамп  $M_2$ , соединенный посредством упругой связи с массивным телом  $M_1$ .

Ранее [1, 2] исследовались особенности контактного взаимодействия жесткого штампа с однородным преднапряженным полупространством как без учета [1], так и с учетом массы штампа [2]. Установлено существование множества значений частоты (так называемых частот минимального влияния), на которых одна из составляющих (вещественная или мнимая) динамической жесткости полупространства не зависит от начальной деформации.

В [2] установлено также существование еще одного множества значений частоты (так называемых частот максимального влияния), на которых влияние начальной деформации полупространства как на его динамическую жесткость, так и на амплитуду колебаний контактирующего с ним массивного штампа максимально. Эти частоты от вида НДС (одноосное, двухосное и т.д.) не зависят.

В [3] исследовалось динамическое контактное взаимодействие массивного штампа с преднапряженным слоем, нижняя грань которого жестко сцеплена с недеформируемым основанием. Установлено, что здесь также существует два множества значений частоты, на одном из которых амплитуда колебаний массивного тела не зависит от величины начальных напряжений (частоты минимального влияния), на другом влияние изменения величины начальных напряжений (в рамках одного вида НДС) максимально (частоты максимального влияния). Однако в слое эти частоты зависят от вида конкретного НДС.

1. Краевая задача о колебании двухслойного преднапряженного полупространства под действием распределенной в области  $\Omega$  нагрузки описывается линеаризованными уравнениями движения [1–4]:

$$\nabla \cdot \Theta^{(n)} = \rho^{(n)} \ddot{\mathbf{u}}^{(n)} \quad (n = 1, 2) \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$x_3 = h, \quad \mathbf{n} \cdot \Theta^{(1)} = \begin{cases} \mathbf{q}^{(1)}(x_1, x_2, t) & (x_1, x_2) \in \Omega \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

где  $\rho^{(n)}$  – плотность материала,  $\mathbf{u}^{(n)}(x_1, x_2, x_3)$  – вектор перемещений точек слоя ( $n = 1$ ) или полупространства ( $n = 2$ ) соответственно,  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к поверхности среды,  $\Theta^{(n)}$  – линейризованный тензор напряжений, играющий в линейной теории упругости роль тензора Коши [4]:

$$\Theta^{(n)} = \mathbf{T}^{(n)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(n)} - 4J^{(n)-1} \left\langle \psi_0^{(n)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} - \psi_2^{(n)} \mathbf{F}^{(n)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} \cdot \mathbf{F}^{(n)} - \sum_{k=0}^2 \sum_{m=0}^2 V_{km}^{(n)} \mathbf{F}^{(n)k} \mathbf{F}^{(n)m} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} \right\rangle$$

$$\mathbf{T}^{(n)} = 2J^{(n)-1} \left( \psi_0^{(n)} \mathbf{I} + \psi_1^{(n)} \mathbf{F}^{(n)} + \psi_2^{(n)} \mathbf{F}^{(n)2} \right)$$

Здесь  $\mathbf{T}^{(n)}$  – тензор начальных напряжений,  $J^{(n)}$  – метрический множитель,  $\mathbf{F}^{(n)}$  – мера начальной деформации Фингера [4],  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{(n)})$  – линейный тензор деформации возмущенного состояния,  $\mathbf{I}$  – единичный вектор.

В случае однородной начальной деформации, определяемой соотношениями ( $\mathbf{R}^{(n)}, \mathbf{r}^{(n)}$  – радиус-векторы точки слоя ( $n = 1$ ) или полупространства ( $n = 2$ ) соответственно в НДС и в естественном состоянии (далее ЕС));  $v_i^{(n)} = 1 + \delta_i^{(n)}$ ,  $\delta_i^{(n)}$  – относительные удлинения волокон, направленных в ЕС вдоль осей  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и совпадающих с декартовыми координатами;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера)

$$\mathbf{R}^{(n)} = \mathbf{r}^{(n)} \cdot \boldsymbol{\Lambda}^{(n)}, \quad \mathbf{F}^{(n)} = \boldsymbol{\Lambda}^{(n)T} \cdot \boldsymbol{\Lambda}^{(n)}, \quad \boldsymbol{\Lambda}^{(n)} = \delta_{ij} v_i^{(n)} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j, \quad v_i^{(n)} = \text{const}$$

компоненты тензора  $\Theta^{(n)}$  представляются в виде (в декартовой системе координат, совпадающей с системой координат в НДС среды):

$$\Theta_{lk}^{(n)} = \theta_{lksp}^{(n)} \partial u_s / \partial x_p$$

$$\theta_{lksp}^{(n)} = \delta_{ls} \delta_{kp} s_{llk}^{(n)} + \delta_{ks} \delta_{lp} v_l^{(n)2} s_{2lk}^{(n)} + \delta_{lk} \delta_{sp} s_{3ls}^{(n)}$$

$$s_{1lk}^{(n)} = 2J^{-1} \left[ -\psi_0^{(n)} + \psi_2^{(n)} v_l^{(n)2} v_k^{(n)2} \right]$$

$$s_{2lk}^{(n)} = 2J^{-1} \left[ \psi_1^{(n)} + \psi_2^{(n)} \left( v_l^{(n)2} + v_k^{(n)2} \right) \right]$$

$$s_{3lk}^{(n)} = 4J^{-1} \sum_{M=0}^2 \sum_{N=0}^2 V_{MN}^{(n)} v_l^{(n)2M} v_k^{(n)2N}$$

где  $\psi_k^{(n)}$  и  $V_{MN}^{(n)}$  – коэффициенты, которые для сжимаемой первоначально изотропной среды, имеющей потенциал  $\chi^{(n)} = \chi^{(n)}(A_1, A_2, A_3)$  ( $A_k$  – инварианты меры деформации Фингера), выражаются формулами [4]:

$$\psi_0^{(n)} = A_3 \frac{\partial \chi^{(n)}}{\partial A_3}, \quad \psi_1^{(n)} = \frac{\partial \chi^{(n)}}{\partial A_1} + A_1 \frac{\partial \chi^{(n)}}{\partial A_2}, \quad \psi_2^{(n)} = -\frac{\partial \chi^{(n)}}{\partial A_2}$$

$$V_{0m}^{(n)} = A_3 \frac{\partial \psi_m^{(n)}}{\partial A_3}, \quad V_{1m}^{(n)} = \frac{\partial \psi_m^{(n)}}{\partial A_1} + A_1 \frac{\partial \psi_m^{(n)}}{\partial A_2}, \quad V_{2m}^{(n)} = -\frac{\partial \psi_m^{(n)}}{\partial A_2} \quad (m = 0, 1, 2)$$

Их представление для некоторых видов начального напряженного состояния и упругого потенциала Мурнагана приведено в [1–4].

Закрывают задачу условия сцепления слоя с полупространством

$$x_3 = 0, \quad \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}, \quad \mathbf{t}_n^{(1)} = \mathbf{t}_n^{(2)} \quad (1.3)$$

( $\mathbf{t}_n^{(n)}$  – векторы напряжений на поверхности раздела слоя и полупространства) и условия на бесконечности

$$\mathbf{u}^{(n)} \downarrow 0 \quad (n = 1, 2), \quad x_3 \rightarrow -\infty \quad (1.4)$$

2. Решение задачи (1.1)–(1.4) имеет вид

$$\mathbf{u}^{(n)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Omega} \mathbf{k}^{(n)}(x_1 - \xi, x_2 - \eta, x_3, \omega) \mathbf{q}^{(1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.1)$$

$$\mathbf{k}^{(n)}(s, t, x_3, \omega) = \int_{\Gamma_1 \Gamma_2} \mathbf{K}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3, \omega) e^{i(\alpha_1 s + \alpha_2 t)} d\alpha_1 d\alpha_2$$

В случае, когда НДС среды определяется условиями  $\sigma_{11}^{(n)0} \neq \sigma_{22}^{(n)0} \neq \sigma_{33}^{(n)0}$  ( $n = 1$  – слой,  $n = 2$  – полупространство), элементы функций  $\mathbf{K}^{(n)}$  имеют вид

$$\begin{aligned} K_{mp}^{(1)} &= \sum_{k=1}^3 f_{mk}^{(1)} [\Delta_{kp} \operatorname{sh} \sigma_k^{(1)} x_3 + \Delta_{k+3,p} \operatorname{ch} \sigma_k^{(1)} x_3] \quad (m = 1, 2) \\ K_{3p}^{(1)} &= \sum_{k=1}^3 [\Delta_{kp} \operatorname{ch} \sigma_k^{(1)} x_3 + \Delta_{k+3,p} \operatorname{sh} \sigma_k^{(1)} x_3] \quad (p = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$K_{mp}^{(2)} = \sum_{k=1}^3 f_{mk}^{(2)} \Delta_{k+6,p} e^{\sigma_k^{(2)} x_3} \quad (m = 1, 2), \quad K_{3p}^{(2)} = \sum_{k=1}^3 \Delta_{k+6,p} e^{\sigma_k^{(2)} x_3}$$

$$\Delta_{sj} = \Delta_{sj}^0 / \Delta^0 \quad (s, j = 1, 2, \dots, 9), \quad \Delta^0 = \det \| T_{sj} \|_{s,j=1}^9$$

$$f_{mk}^{(n)} = -i \alpha_m S_{3k}^{(n)} (\sigma_k^{(n)} S_{1k}^{(n)})^{-1} \quad (n, m = 1, 2; k = 1, 2, 3)$$

$$T_{sk} = l_{sk}^{(1)} \operatorname{ch} \sigma_k^{(1)} h, \quad T_{s,k+3} = l_{sk}^{(1)} \operatorname{sh} \sigma_k^{(1)} h, \quad T_{s,k+6} = 0 \quad (s = 1, 2)$$

$$T_{3,k+3} = l_{3k}^{(1)} \operatorname{sh} \sigma_k^{(1)} h, \quad T_{3k} = l_{3k}^{(1)} \operatorname{ch} \sigma_k^{(1)} h, \quad T_{3,k+6} = 0$$

$$T_{sk} = 0, \quad T_{s,k+3} = f_{s-3,k}^{(1)}, \quad T_{s,k+6} = -f_{s-3,k}^{(2)} \quad (s = 4, 5)$$

$$T_{6k} = \operatorname{ch} \sigma_k^{(1)} h, \quad T_{6,k+3} = 0, \quad T_{6,k+6} = -1$$

$$T_{sk} = l_{s-6,k}^{(1)}, \quad T_{s,k+3} = 0, \quad T_{s,k+6} = -l_{s-6,k}^{(2)} \quad (s = 7, 8)$$

$$T_{9k} = 0, \quad T_{9,k+3} = l_{3k}^{(1)}, \quad T_{9,k+6} = -l_{3k}^{(2)}$$

$$l_{mk}^{(n)} = \theta_{3mm3}^{(n)} \sigma_k^{(n)} f_{mk}^{(n)} - i \alpha_m \theta_{m3m3}^{(n)}, \quad S_{mk}^{(n)} = B_{3,3-m}^{(n)} H_{mk}^{(n)} + \alpha_m^2 B_{13}^{(n)} B_{m3}^{(n)} \quad (m = 1, 2)$$

$$l_{3k}^{(n)} = \theta_{3333}^{(n)} \sigma_k^{(n)} - i \sum_{m=1}^2 \alpha_m \theta_{33mm}^{(n)} f_{1k}^{(n)}, \quad S_{3k}^{(n)} = B_{12}^{(n)} H_{3k}^{(n)} - \sigma_k^{(n)2} B_{13}^{(n)} B_{23}^{(n)}$$

$$S_{4k}^{(n)} = H_{1k}^{(n)} H_{2k}^{(n)} - \alpha_1^2 \alpha_2^2 B_{12}^{(n)2}, \quad H_{mk}^{(n)} = \theta_{3mm3}^{(n)} \sigma_k^{(n)2} - P_m^{(n)}$$

$$P_m^{(n)} = \sum_{k=1}^2 \theta_{kmmk}^{(n)} \alpha_k^2 - \rho_1^{(n)} \omega^2, \quad B_{mk}^{(n)} = \theta_{mmkk}^{(n)} + \theta_{mkmk}^{(n)}$$

где  $\Delta_{sj}^0$  ( $s, j = 1, 2, \dots, 9$ ) – алгебраические дополнения элементов  $T_{sj}$ , а  $\sigma_k^{(n)}$  определяются из характеристических уравнений:  $H_{3k}^{(n)} S_{4k}^{(n)} + \alpha_1^2 \sigma_k^{(n)2} B_{13}^{(n)} S_{2k}^{(n)} + \alpha_2^2 \sigma_k^{(n)2} B_{32}^{(n)} S_{1k}^{(n)} = 0$ .

Контуры  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  выбираются в соответствии с принципом предельного поглощения [5] и поведением элементов матрицы  $\mathbf{K}^{(n)}$ . Как правило, контуры совпадают с веществ-

венной осью, отклоняясь от нее лишь обходя отрицательные полюсы и точки ветвления  $K^{(n)}$  сверху, а положительные – снизу.

Выражения (2.1), (2.2) определяют вектор перемещения произвольной точки слоя ( $n = 1$ ) или полупространства ( $n = 2$ ) под действием нагрузки  $q^{(1)}(x_1, x_2)$ , что дает возможность изучать особенности как формирования волновых полей в ближней зоне, так и процесса распространения упругих волн в слоисто-неоднородной преднапряженной среде.

При исследовании задачи о колебаниях штампа в (2.1), (2.2) необходимо положить  $x_3 = h$ , функция  $u^{(1)}(x_1, x_2, h)$  предполагается заданной в области  $\Omega$ . (2.1) представляет собой интегральное уравнение (ИУ) или систему ИУ (СИУ) (зависит от условий контакта штампа со средой) относительно неизвестной функции распределения контактных напряжений  $q^{(1)}(x_1, x_2)$ . Отличительной особенностью полученной СИУ является наличие у символа ядра точек ветвления на вещественной оси. Это обуславливает необходимость применения специальных методов решения ИУ или СИУ [6, 7], учитывающих все динамические свойства символа  $K^{(1)}$ , в том числе, наличие вещественных точек ветвления. Точность учета динамических свойств функции  $K^{(1)}$  определяет эффективность изучения влияния вида НДС, а также характера локализации начальных напряжений в среде на ее динамическую жесткость, и тем самым, на резонансные явления, возникающие при динамическом взаимодействии слоисто неоднородной преднапряженной среды с массивными телами или инерционными системами.

3. В качестве примера рассмотрим задачу о вертикальных колебаниях жесткого штампа, занимающего в плане область  $|x_1| \leq a$ ,  $|x_2| \leq \infty$ , на поверхности двухслойного полупространства. Амплитуда колебаний  $u^{(1)}$ , трение в области контакта отсутствует.

Задача сводится к решению интегрального уравнения

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a k(x_1 - \xi, \omega) q_0(\xi) d\xi = u^{(1)}, \quad |x_1| \leq a \quad (3.1)$$

$$k(s, \omega) = \int_{\Gamma} K(\alpha, \omega) e^{i\alpha s} d\alpha$$

где  $K(\alpha, \omega) = K_{33}^{(1)}(\alpha, 0, h, \omega)$  – четная функция, имеющая четыре (по две на положительной и отрицательной вещественной полуоси) точки ветвления, мероморфная в комплексной плоскости с не переходящими друг в друга разрезами. Последние расположены в I и III квадрантах и соединяют точки ветвления с бесконечно удаленной точкой.

При определенном сочетании упругих параметров слоя и полупространства  $K$  может иметь конечное, зависящее от частоты, количество вещественных нулей  $\gamma_k$  и полюсов  $z_k$ , а также счетное множество комплексных нулей и полюсов с точками сгущения в некотором секторе, содержащем мнимую ось. На бесконечности справедливо представление  $K(\alpha) = c|\alpha|^{-1} [1 + O(\alpha^{-1})]$ .

Для вычисления динамической жесткости среды  $Q = \int q_0(x_1) dx_1 (-a \leq x_1 \leq a)$  ( $q_0(x_1)$  удовлетворяет (3.1) при  $u^{(1)} = 1$ ) представим символ ядра (3.1) в виде

$$K(\alpha) = K_0(\alpha) \Pi(\alpha), \quad \Pi(\alpha) = \prod_{k=1}^M (\alpha^2 - \gamma_k^2)(\alpha^2 - z_k^2)^{-1} \quad (3.2)$$

где  $z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n_1$ ) и  $\gamma_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n_2$ ) – вещественные, остальные  $z_k$  ( $k = n_1 + 1, \dots, M$ ) и  $\gamma_k$  ( $k = n_2 + 1, \dots, M$ ,  $M \geq \max\{n_1, n_2\}$ ) – комплексные полюсы и нули  $K(\alpha)$ , лежащие в полосе  $|\operatorname{Im} \alpha| \leq \varepsilon_0$ .

В представлении (3.2) используется

$$K_0(\alpha) = K(\alpha)\Pi^{-1}(\alpha) \quad (3.3)$$

Нетрудно заметить, что эта функция несет в себе все неучтенные в  $\Pi(\alpha)$  особенности  $K(\alpha)$ , и, прежде всего, вещественные точки ветвления. Формально, как и в [8, 9], реактивная сила, действующая на штамп со стороны составной среды (динамическая жесткость среды), дается формулой [6, 7]:

$$Q(0) = T(0)\Pi^{-1}(0) + \sum_{k=1}^{2M} C_k \quad (3.4)$$

Отличие состоит в том, что  $T(\alpha)$ , участвующая в (3.4), строится численными методами и имеет вид

$$T(\alpha) = T_0(\alpha) + \sum_{k=1}^{2M} C_k T_k(\alpha), \quad T_k(\alpha) = \sum_{p=1}^N \beta_k^p \Psi_p(\alpha) \quad (3.5)$$

Применение численных методов дало возможность использования точного, учитывающего все динамические особенности задачи, представления (3.3), что является важным при исследовании задач для областей типа слоистого полупространства. Применение для этих задач развитого ранее [8, 9] подхода является неэффективным в силу невозможности построения для функции  $K_0$  равномерных аппроксимаций, учитывающих точки ветвления и допускающих точную факторизацию.

Коэффициенты  $\beta_p^k$  в (3.5) находятся из  $2M$  систем алгебраических уравнений

$$A B_k = F_k \quad (k = 0, 1, \dots, 2M)$$

$$A = \|A_{pl}\|_{p,l=1}^N, \quad A_{pl} = \int_{\Gamma} K_0(\alpha) \Psi_p(\alpha) \Phi_l^*(\alpha) d\alpha$$

$$F_k = \{f_k^l\}_{l=1}^N, \quad f_k^l = \int_{\Gamma} K(\alpha) \Phi_l(\alpha) e^{-i\alpha x_1^k} d\alpha$$

$$B_k = \{\beta_k^p\}_{p=1}^N, \quad f_0^l = \int_{-a}^a f(x_1) \varphi_l(x_1) dx_1$$

где  $\Psi_p(\alpha)$ ,  $\Phi_l(\alpha)$ , – преобразования Фурье двух систем координатных функций  $\Psi_p(x_1)$ ,  $\varphi_p(x_1)$  ( $p = 1, 2, \dots, N$ );  $(\cdot)^*$  – комплексно сопряженная величина.

Численный анализ показал, что в качестве координатных функций можно использовать

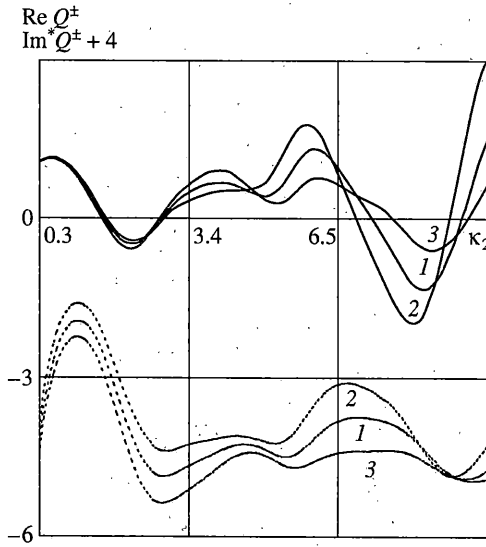
$$\Psi_p(x_1) = \varphi_p(x_1) = \begin{cases} 1, & x_1 \in [a_{p-1}, a_p] \\ 0, & x_1 \notin [a_{p-1}, a_p] \end{cases}$$

где  $a_p$  ( $p = 1, 2, \dots, N-1$ ) – точки, делящие интервал  $[-a, a]$  на равные части,  $a_0 = -a$ ,  $a_N = a$ .

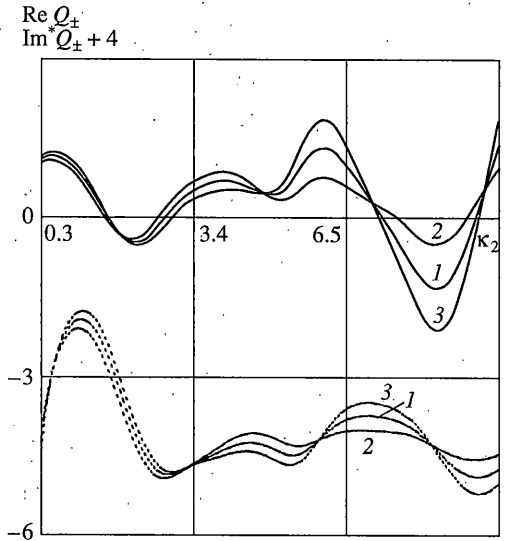
Коэффициенты  $C_k$  в (3.4) удовлетворяют системе

$$T_0(\pm\gamma_n) - \sum_{k=1}^{2M} C_k T_k(\pm\gamma_n) = 0 \quad (n = 0, 1, \dots, 2M)$$

4. Численный анализ проводился для "нормальной" (материал слоя "мягче" материала подложки) и "аномальной" (материал слоя "жестче" материала подложки) структуры слоистого полупространства. В качестве материала полупространства использовалась сталь 35ХГСА, для слоя – бронза БрОФ 65-0.15 ("мягкий" материал) и молибден ("жесткий" материал) [4].



Фиг. 1



Фиг. 2

Рассматривался различный характер локализации начальных напряжений: "приповерхностный" – слой в НДС, полупространство в ЕС (слой растянут (сжат), а затем соединен с полупространством);

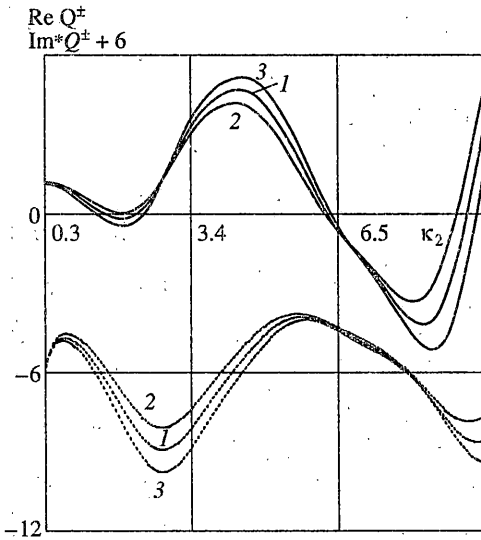
"заглубленный" – слой в ЕС, полупространство в НДС (полупространство растянуто (сжато), затем соединено со слоем). НДС полагалось однородным, соответствующим случаю всестороннего сжатия (растяжения) слоя или полупространства.

Влияние структуры среды и локализации преднапряжений на динамическую жесткость среды иллюстрируют фиг. 1–4, на которых приведены графики  $\text{Re } Q_{\pm}^{\pm}$  и  $\text{Re } Q_{\pm}$  (сплошные кривые);  $\text{Im}^* Q_{\pm}^{\pm} = \kappa_2^{-1} \text{Im } Q_{\pm}^{\pm}$  и  $\text{Im}^* Q_{\pm} = \kappa_2^{-1} \text{Im } Q_{\pm}$  (штриховые) в зависимости от безразмерной частоты. Функции  $Q_{\pm}^{\pm}$  и  $Q_{\pm}$  соответствуют динамической жесткости преднапряженной составной среды при растяжении (+) или сжатии (–) слоя (верхний индекс) или полупространства (нижний индекс). На фиг. 1, 2 приведены графики для "нормальной", на фиг. 3, 4 – для "аномальной" структуры среды. Цифрой 1 отмечены кривые  $\text{Re } Q_0$  и  $\text{Im}^* Q_0$  в естественном состоянии, цифра 2 соответствует растяжению, цифра 3 – сжатию соответствующей области составной среды.

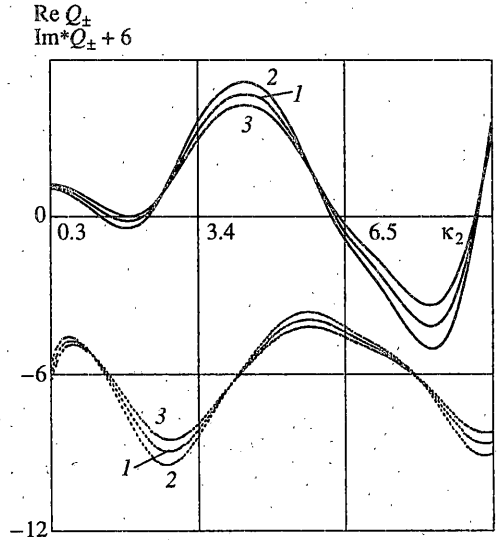
Из графиков следует, что  $\text{Re } Q_0$  и  $\text{Im}^* Q_0$  имеют осциллирующий, зависящий от неоднородности среды характер. В естественном состоянии амплитуда осцилляции определяется степенью неоднородности структуры и не зависит от того, что является более жестким: слой или полупространство. Наличие начальных напряжений в слое или в полупространстве может либо ослабить, либо усилить неоднородность.

Ранее [1–3] было отмечено, что сжатие однородного слоя или полупространства приводит к увеличению их динамической жесткости, растяжение – к ее уменьшению. Это ведет к тому, что в "нормальной" структуре сжатие слоя (кривые 3 на фиг. 1), равно как и растяжение полупространства (кривые 2 на фиг. 2) ослабляют степень неоднородности слоистой структуры – амплитуда осцилляции динамической жесткости уменьшается. Растяжение слоя (кривые 2 на фиг. 1), так же как и сжатие полупространства (кривые 3 на фиг. 2) усиливает степень неоднородности "нормальной" среды – амплитуда осцилляции динамической жесткости возрастает.

В "аномальной" структуре имеет место обратное: усиление неоднородности наблюдается или при сжатии слоя, или при растяжении полупространства (соответствующие



Фиг. 3



Фиг. 4

кривые на фиг. 3 и 4); ослабление неоднородности – при растяжении слоя или при сжатии полупространства.

Необходимо отметить, что сжатие слоя приводит к увеличению уровня излучения энергии (мнимая составляющая динамической жесткости) из зоны контакта, растяжение слоя – к его уменьшению на всех частотах. Локализация начальных напряжений в полупространстве также влияет на уровень излучения из зоны контакта, но это изменение является частотно зависимым.

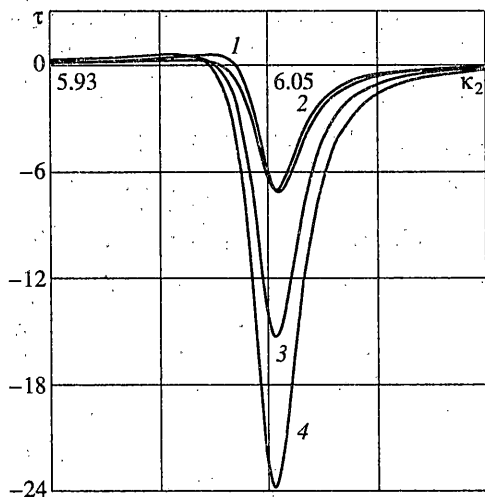
Из графиков также следует, что при локализации начальных напряжений в полупространстве существуют частоты максимального и минимального влияния начальной деформации на реакцию среды. При локализации начальных напряжений в слое такие частоты отсутствуют. Тем самым, в структурно неоднородной среде сохраняются обнаруженные ранее [1–3] при изучении динамических свойств преднапряженных слоя [3] и однородного полупространства [1, 2] особенности: наличие частот максимального и минимального влияния начальной деформации на реакцию среды при взаимодействии штампа с полупространством и отсутствие таких частот при взаимодействии штампа со слоем. Это определяет различный характер влияния локализации начальных напряжений на динамику контактирующих со структурно неоднородной средой массивных тел или многомассовых систем.

5. В качестве примера, иллюстрирующего особенности влияния локализации преднапряжений на динамику массивных тел, рассмотрим задачу о вертикальных поступательных колебаниях системы, представляющей собой контактирующий со средой массивный штамп  $M_2$ , связанный посредством упругой связи жесткости  $k$  с телом  $M_1$ . Использование двухмассовой системы, включающей упругий элемент, связано со значительным поглощением, которым обладает полупространство. Введение упругого элемента резко усиливает резонансные эффекты, возникающие при взаимодействии массивного тела и среды.

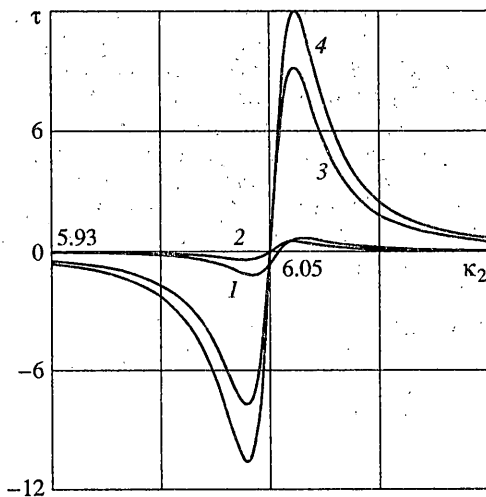
Движение элементов системы дается формулами [6, 9]:

$$u_1 = \frac{F(Q + k\delta_2)}{k[\delta_1(Q + k\delta_2) - k]}, \quad u_2 = \frac{F}{\delta_1(Q + k\delta_2) - k} \quad (5.1)$$

Здесь  $\delta_n = 1 - \kappa_2^2 m_n / k$  ( $n = 1, 2$ );  $m_n, u_n$  – масса и амплитуда колебаний тела  $M_n$  ( $n = 1, 2$ );  $\kappa_2$  – безразмерная частота. Из (5.1) нетрудно заметить, что движение обоих



Фиг. 5



Фиг. 6

тел имеет резонансный характер. Существует частота, на которой амплитуда колебаний имеет ограниченный максимум. Частота этого ограниченного резонанса зависит от динамической жесткости среды, которая в свою очередь зависит от ее структуры и преднапряженного состояния.

На фиг. 5, 6 приведены графики  $\tau$  ( $\tau = |u_1| - |u_1^0|$ ,  $u_1^0$  и  $u_1$  – амплитуды колебаний тела  $M_1$  соответственно в ЕС и в НДС) при локализации преднапряжений в слое (фиг. 5) и в полупространстве (фиг. 6). Цифрами 1, 2, 3 обозначены кривые, рассчитанные при одноосном растяжении по осям  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  соответственно. Цифра 4 соответствует случаю двухосного растяжения по осям  $x_1$  и  $x_2$ .

Как следует из графиков, движение элементов системы носит резонансный характер, что выражается в возникновении ярко выраженного ограниченного максимума на резонансной частоте. При этом начальная деформация полупространства приводит не только к изменению амплитуды резонанса, но и к изменению частоты резонанса. При растяжении эта частота уменьшается.

Начальная деформация слоя приводит лишь к изменению амплитуды резонансного пика, частота резонанса при этом не меняется. Необходимо отметить, что наибольшее (из рассмотренных в данной работе) влияние на динамику системы оказывает двухосное НДС. Из одноосных наиболее сильно влияет на динамику системы начальное напряжение по оси  $x_3$ .

Авторы благодарят В.А. Бабешко за внимание к работе и ценные советы.  
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 99-01-01015).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белянкова Т.И., Калинчук В.В. О взаимодействии осциллирующего штампа с предварительно напряженным полупространством // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 123–134.
2. Белянкова Т.И., Калинчук В.В. Динамика массивного тела, взаимодействующего с предварительно напряженным полупространством // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 6. С. 83–94.
3. Белянкова Т.И., Калинчук В.В. Динамика массивного тела, осциллирующего на поверхности предварительно напряженного слоя // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 89–101.
4. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
5. Ворovich И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.



6. *Калинчук В.В.* Эффективный метод исследования динамических связанных смешанных задач теории электроупругости и термоупругости // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. IV Междунар. конф. Ростов н/Д: Изд-во СКНЦ ВШ, 1999. Т. 2. С. 35–39.
7. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* К проблеме исследования динамических смешанных задач электроупругости и термоупругости для слоистонеоднородного полупространства // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. 2000. № 3. С. 72–74.
8. *Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Метод фиктивного поглощения в плоских динамических задачах // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 477–484.
9. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Науч. мир, 1999. 246 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию  
2.07.2001