

УДК 539.3.01

© 2002 г. В.Н. АКОПЯН, А.В. СААКЯН

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ,  
СОДЕРЖАЩЕЙ ТОНКОЕ ЖЕСТКОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ**

Вопросы контактного взаимодействия выходящих на границу или внутренних абсолютно жестких или упругих тонких включений с упругой полуплоскостью в различных постановках рассмотрены во многих работах [1–5].

В публикуемой работе рассматривается напряженное состояние однородной упругой полуплоскости, содержащей выходящее на границу абсолютно жесткое тонкое включение конечной длины, одна сторона которого оторвана от матрицы.

Задача математически формулируется в виде системы из двух сингулярных интегральных уравнений второго рода с неподвижной особенностью и решается численно-аналитическим методом дискретных особенностей.

**1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.** Пусть упругая полуплоскость, отнесенная к полярной системе координат  $(r, \varphi)$ , на отрезке  $[0, b]$  своей срединной линией  $\varphi = 0$  содержит выходящее на границу абсолютно жесткое тонкое включение, одна сторона которого оторвана от матрицы, и деформируется под воздействием сосредоточенной силы  $T$ , действующей на конце включения  $r = 0$  (фиг. 1). При этом полагается, что как граница полуплоскости, так и оторванная от включения часть матрицы свободны от напряжений.

Требуется определить контактные напряжения, действующие под включением, раскрытие трещины, образованной при отслоении включения, а также коэффициенты концентрации напряжений в нижнем конце трещины.

Разделим полуплоскость по срединной линии  $\varphi = 0$  на две четверть-плоскости и снабдим компоненты напряжения и перемещения, относящиеся к точкам четверть-плоскостей  $D_{\pm} = \{0 \leq \pm\varphi \leq \pi/2; 0 \leq r < \infty\}$ , верхними индексами (+) и (-) соответственно. Тогда получим следующую смешанную граничную задачу:

$$\sigma_{\varphi}^{+}(r, \pi/2) - i\tau_{r\varphi}^{+}(r, \pi/2) = 0 \quad (0 < r < \infty) \quad (1.1)$$

$$\sigma_{\varphi}^{-}(r, -\pi/2) - i\tau_{r\varphi}^{-}(r, -\pi/2) = 0 \quad (0 < r < \infty) \quad (1.2)$$

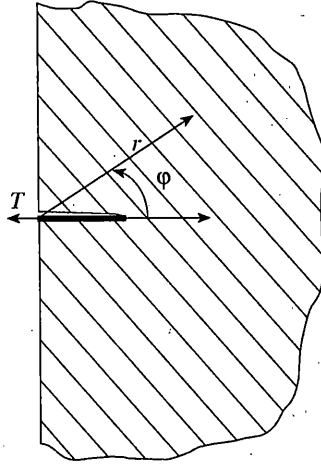
$$\sigma_{\varphi}^{+}(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^{+}(r, 0) = \sigma_{\varphi}^{-}(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^{-}(r, 0) \quad (b < r < \infty) \quad (1.3)$$

$$u_r^{+}(r, 0) + iu_{\varphi}^{+}(r, 0) = u_r^{-}(r, 0) + iu_{\varphi}^{-}(r, 0) \quad (b < r < \infty) \quad (1.4)$$

$$\sigma_{\varphi}^{+}(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^{+}(r, 0) = 0 \quad (0 < r < b) \quad (1.5)$$

$$u_r^{-}(r, 0) + iu_{\varphi}^{-}(r, 0) = \delta + i\gamma r \quad (0 < r < b) \quad (1.6)$$

Здесь  $u_r^{\pm}(r, \varphi)$  и  $u_{\varphi}^{\pm}(r, \varphi)$  – компоненты смещения, в соответствующих областях удовлетворяющие уравнениям Ламэ и связанные с компонентами напряжения  $\sigma_{\varphi}^{\pm}(r, \varphi)$



Фиг. 1

и  $\tau_{r\varphi}^{\pm}(r, \varphi)$  известными формулами [6], а  $\delta$  и  $\gamma$  – постоянные, определяющие соответственно поступательное перемещение и поворот включения.

Для того, чтобы построить решение задачи (1.1)–(1.6), продолжим условия (1.3) и (1.4) на интервал  $(0 < r < b)$  и обозначим

$$\begin{aligned} [\sigma_{\varphi}^{+}(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^{+}(r, 0)] - [\sigma_{\varphi}^{-}(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^{-}(r, 0)] &= \chi(r) \\ [u_r^{+}(r, 0) + iu_{\varphi}^{+}(r, 0)] - [u_r^{-}(r, 0) + iu_{\varphi}^{-}(r, 0)] &= W(r) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Далее, при помощи интегрального преобразования Меллина [7], сначала решим вспомогательную граничную задачу, определяемую условиями (1.1)–(1.4) и (1.7), и определим компоненты напряжения  $\sigma_{\varphi}^{+}(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^{+}(r, 0)$ , а также производную от смещения  $\partial[u_r^{-}(r, 0) + iu_{\varphi}^{-}(r, 0)]/\partial r$  через неизвестные функции  $\chi(r)$  и  $W(r)$ . После этого, используя полученные соотношения, удовлетворим условиям (1.5)–(1.6). В результате получим

$$\sigma_{\varphi}^{+}(r, 0) - i\tau_{r\varphi}^{+}(r, 0) = \frac{\chi(r)}{2} + \frac{i\vartheta_1}{2\pi\vartheta_2} \int_0^b \left[ \frac{1}{\xi - r} + K_{11}(\xi, r) \right] \chi(\xi) d\xi - \quad (1.8)$$

$$- \frac{i}{2\pi\vartheta_2} \int_0^b \left[ \frac{1}{\xi - r} + K_{12}(\xi, r) \right] W'(\xi) d\xi - \frac{i}{\pi_0} \int_0^b \frac{\xi}{(\xi + r)^2} \bar{\chi}(\xi) d\xi \quad (0 < r < \infty)$$

$$\frac{d}{dr} [u_r^{-}(r, 0) + iu_{\varphi}^{-}(r, 0)] = - \frac{W'(r)}{2} - \frac{i(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2)}{2\pi\vartheta_2} \int_0^b \left[ \frac{1}{\xi - r} + K_{21}(\xi, r) \right] \chi(\xi) d\xi - \quad (1.9)$$

$$- \frac{i\vartheta_1}{2\pi\vartheta_2} \int_0^b \left[ \frac{1}{\xi - r} + K_{22}(\xi, r) \right] W'(\xi) d\xi - \frac{i}{\pi_0} \int_0^b \frac{\xi}{(\xi + r)^2} \bar{W}'(\xi) d\xi \quad (0 < r < \infty)$$

$$K_{11}(\xi, r) = K_{22}(\xi, r) = \frac{1}{\xi + r} - 2 \left( 1 - \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} \right) \frac{\xi(\xi - r)}{(\xi + r)^3}, \quad K_{12}(\xi, r) = \frac{1}{\xi + r} - 2 \frac{\xi(\xi - r)}{(\xi + r)^3}$$

$$K_{21}(\xi, r) = - \frac{\vartheta_2^2 + \vartheta_1^2}{\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2} \frac{1}{\xi + r} + \frac{2(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{(\vartheta_2 + \vartheta_1)} \frac{\xi(\xi - r)}{(\xi + r)^3}, \quad \vartheta_1 = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E}, \quad \vartheta_2 = \frac{2(1 - \nu^2)}{E}$$

где  $E$  и  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона, а черта над функциями  $\chi(r)$  и  $W'(r)$  означает комплексно-сопряженные значения этих функций.

Теперь, используя соотношения (1.8) и (1.9), удовлетворим условиям (1.5) и (1.6). Тогда, после некоторых преобразований, для определения неизвестных функций  $\chi(r)$  и  $W'(r)$ , получим следующую систему из двух сингулярных интегральных уравнений второго рода:

$$\begin{aligned} & \chi(r) + \frac{i\vartheta_1}{\pi\vartheta_2} \int_0^b \left[ \frac{1}{\xi-r} + K_{11}(\xi, r) \right] \chi(\xi) d\xi - \\ & - \frac{i}{\pi\vartheta_2} \int_0^b \left[ \frac{1}{\xi-r} + K_{12}(\xi, r) \right] W'(\xi) d\xi - \frac{2i}{\pi} \int_0^b \frac{\xi \bar{\chi}(\xi)}{(\xi+r)^2} d\xi = 0 \\ & W'(r) + \frac{i(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2)}{\pi\vartheta_2} \int_0^b \left[ \frac{1}{\xi-r} + K_{21}(\xi, r) \right] \chi(\xi) d\xi + \\ & + \frac{i\vartheta_1}{\pi\vartheta_2} \int_0^b \left[ \frac{1}{\xi-r} + K_{22}(\xi, r) \right] W'(\xi) d\xi + \frac{2i}{\pi} \int_0^b \frac{\xi \bar{W}'(\xi)}{(\xi+r)^2} d\xi = -2\gamma \end{aligned} \quad (1.10)$$

Отметим, что эти уравнения нужно рассматривать при условиях равновесия включения и ограниченности скачка смещений на обоих концах трещины, т.е. при условиях

$$\int_0^b \chi(r) dr = -iT, \quad \operatorname{Re} \int_0^b r \chi(r) dr = 0, \quad W(b) = 0, \quad W(0) = w_0 < \infty$$

Чтобы построить решение системы сингулярных интегральных уравнений (1.10) сформулируем ее на интервале  $(-1, 1)$  при помощи замены переменных  $r = 1/2b(x+1)$ ,  $\xi = 1/2b(s+1)$ . Далее введем безразмерные функции  $\varphi_j(x)$  ( $j = 1, 2$ ) по формулам

$$\varphi_1(x) = b\chi(b(x+1)/2)T, \quad \varphi_2(x) = bW'(b(x+1)/2)/(i\vartheta_2 T)$$

В итоге, для определения функций  $\varphi_j(x)$  ( $j = 1, 2$ ) приходим к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} & \varphi_1(x) + \frac{i\vartheta_1}{\pi\vartheta_2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{s-x} + K_{11}^*(s, x) \right] \varphi_1(s) ds - \frac{i}{\pi\vartheta_2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{s-x} + K_{12}^*(s, x) \right] \varphi_2(s) ds - \\ & - \frac{2i}{\pi} \int_{-1}^1 K_{13}^*(s, x) \bar{\varphi}_1(s) ds = 0 \\ & \varphi_2(x) + \frac{i(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2)}{\pi\vartheta_2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{s-x} + K_{21}^*(s, x) \right] \varphi_1(s) ds + \frac{i\vartheta_1}{\pi\vartheta_2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{s-x} + K_{22}^*(s, x) \right] \varphi_2(s) ds + \\ & + \frac{2i}{\pi} \int_{-1}^1 K_{23}^* \bar{\varphi}_2(s) ds = -i\gamma^* \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$K_{i,j}^*(s, x) = K_{i,j}((s+1), (x+1)) \quad (i, j = 1, 2), \quad \gamma^* = 2\gamma/T\vartheta_2$$

$$K_{13}^*(s, x) = K_{23}^*(s, x) = (s+1)/(s+x+2)^2$$

при условиях

$$\int_{-1}^1 \varphi_1(x) dx = -2i, \quad \operatorname{Re} \left[ \int_{-1}^1 (x+1) \varphi_1(x) dx \right] = 0 \quad (1.12)$$

**2. Исследование поведения неизвестных функций в концах отрезка интегрирования.** Для решения определяющей системы уравнений (1.11) необходимо определить порядок особенностей искомых функций  $\varphi_j(x)$  ( $j = 1, 2$ ) в конечных точках отрезка интегрирования.

Учитывая, что ядра  $K_{i,j}(s, x)$  имеют неподвижную особенность в точке  $s = -1$ ,  $x = -1$ , представим их в виде

$$K_{11}^*(s, x) = \frac{3-2\nu}{1-2\nu} \frac{1}{s+x+2} + \frac{6}{1-2\nu} (x+1) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{s+x+2} \right) + \frac{2}{1-2\nu} (x+1)^2 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{s+x+2} \right)$$

$$K_{22}^*(s, x) = \frac{3-2\nu}{1-2\nu} \frac{1}{s+x+2} + \frac{6}{1-2\nu} (x+1) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{s+x+2} \right) + \frac{2}{1-2\nu} (x+1)^2 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{s+x+2} \right)$$

$$K_{12}^*(s, x) = -\frac{1}{s+x+2} - 6(x+1) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{s+x+2} \right) - 2(x+1)^2 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{s+x+2} \right)$$

$$K_{21}^*(s, x) = \frac{-3+12\nu-8\nu^2}{3-4\nu} \frac{1}{s+x+2} + \frac{6}{3-4\nu} (x+1) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{s+x+2} \right) +$$

$$+ \frac{2}{3-4\nu} (x+1)^2 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{s+x+2} \right)$$

$$K_{13}^*(s, x) = K_{23}^*(s, x) = \frac{1}{s+x+2} + (x+1) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{s+x+2} \right)$$

Представляя неизвестные функции в виде

$$\varphi_j(x) = (1-x)^{\alpha_j} (1+x)^{\beta_j} \varphi_j^*(x), \quad -1 < \operatorname{Re}(\alpha_j, \beta_j) < 0$$

где функции  $\varphi_j^*(x)$  ( $j = 1, 2$ ) на отрезке  $[-1, 1]$  удовлетворяют условию Гельдера, подставим их в систему уравнений (1.11). Далее, исходя из механических соображений и воспользовавшись результатами исследования [8], найдем

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = -0.75 - i \frac{\ln \chi}{4\pi}, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta = \lambda - 1$$

где  $\lambda$  – положительный корень следующего трансцендентного уравнения

$$\sin^2 \left( \frac{\lambda\pi}{2} \right) = \frac{(1+\chi)^2}{4\chi} - \frac{\lambda}{\chi}, \quad (\chi = 3-4\nu)$$

Следует отметить, что последнее уравнение в точности совпадает с трансцендентным уравнением, полученным в [9] для клиновидной области при граничных условиях I–II, когда угол раствора клина равен  $\pi/2$ .

Найдем коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины при подходе к ней изнутри полуплоскости по линии  $\varphi = 0$ . Для этого, воспользовавшись представлением (1.8) для напряжений на всей линии  $\varphi = 0$ , вычислим следующий предел

$$K_I - iK_{II} = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^\beta \frac{b}{T_0} \left[ \sigma_\varphi^+ \left( \frac{b(x+1)}{2} \right) - i\tau_{r\varphi}^+ \left( \frac{b(x+1)}{2} \right) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^\beta \left\{ \frac{\varphi_1(x)}{2} + \frac{i\vartheta_1}{2\pi\vartheta_2} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(s)}{s-x} ds - \frac{i}{2\pi\vartheta_2} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(s)}{s-x} ds \right\}$$

Таблица 1

$n$	$\gamma^*$	$\text{Re}[w_0^*]$	$\text{Im}[w_0^*]$	$K_\sigma(-1)$	$K_\tau(-1)$	$K_\sigma(1)$	$K_\tau(1)$
6	0.22629	0.91902	1.56546	-0.68522	0.19194	0.11784	0.36392
8	0.22563	0.92252	1.55469	-0.68223	0.19623	0.12130	0.36155
10	0.22544	0.92471	1.54976	-0.67731	0.19800	0.12338	0.36003
12	0.22535	0.92595	1.54720	-0.67363	0.19873	0.12479	0.35900
14	0.22529	0.92671	1.54570	-0.67102	0.19903	0.12579	0.35825
16	0.22526	0.92719	1.54476	-0.66912	0.19915	0.12655	0.35768
18	0.22523	0.92752	1.54413	-0.66772	0.19918	0.12714	0.35724
20	0.22521	0.92776	1.54368	-0.66665	0.19917	0.12761	0.35689

Таблица 2

$\nu$	$\gamma^*$	$\text{Re}[w_0^*]$	$\text{Im}[w_0^*]$	$K_I$	$K_{II}$
0.1	0.43505	0.84710	1.83081	-0.21278	0.23532
0.15	0.39173	0.86426	1.77358	-0.20773	0.23646
0.2	0.34320	0.88286	1.70888	-0.20207	0.23828
0.25	0.28825	0.90297	1.63498	-0.19564	0.24097
0.3	0.22544	0.92471	1.54976	-0.18827	0.24478
0.35	0.15301	0.94820	1.45054	-0.17974	0.25000
0.4	0.06873	0.97355	1.33373	-0.16973	0.25704
0.43557	0.00001	0.99274	1.23733	-0.16149	0.26348
0.48	-0.09829	1.01795	1.09748	-0.14953	0.27364

В качестве коэффициентов интенсивности контактных напряжений в конечных точках включения будем понимать следующие выражения:  $K_\sigma(-1) - iK_\tau(-1) = 2^\alpha \varphi_1^*(-1)$ ,  $K_\sigma(1) - iK_\tau(1) = 2^\beta \varphi_1^*(1)$ .

После определения показателей особенности неизвестных функций в концах отрезка интегрирования методом дискретных особенностей при помощи квадратурных формул [10]:

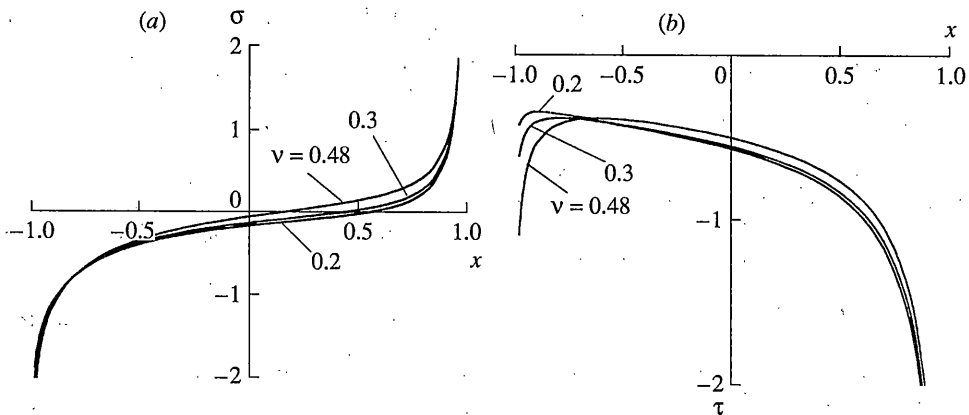
$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{x-z} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \approx \sum_{i=1}^n w_i \frac{f(\xi_i)}{\xi_i - z} [1 - q_i(z)], \quad z \neq \pm 1, \quad \text{Re } \alpha, \text{Re } \beta > -1$$

$$\frac{d^k}{dx^k} \int_{-1}^1 \frac{f(s)}{s+x+2} (1-s)^\alpha (1+s)^\beta ds \approx \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) \frac{d^k}{dx^k} \frac{[1 - q_i(-x-2)]}{\xi_i + x + 2} \quad (k = 0, 1, 2)$$

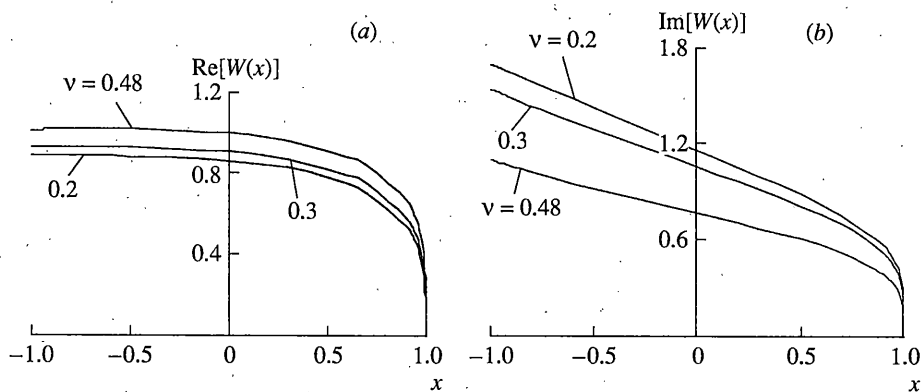
$$w_i = -2^{\alpha+\beta+1} \left( \frac{2}{\xi_i - 1} \right)^{n+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} \frac{F\left(n+1, n+\alpha+1; 2n+\alpha+\beta+2; \frac{2}{1-\xi_i}\right)}{(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\xi_i)}$$

$$q_i(z) = \begin{cases} \left( \frac{\xi_i - 1}{z - 1} \right)^{n+1} \frac{F(n+1, n+\alpha+1; 2n+\alpha+\beta+1; 2/(1-z))}{F(n+1, n+\alpha+1; 2n+\alpha+\beta+1; 2/(1-\xi_i))} & (z \notin [-1, 1]) \\ (q_i(z+i0) + q_i(z-i0))/2 & (-1 < z < 1) \end{cases}$$

где  $\xi_i$  – корни многочлена Якоби  $P_n^{(\alpha, \beta)}(\xi_i) = 0$ , система сингулярных интегральных уравнений (1.11) сводится к системе из  $4n$  алгебраических уравнений относительно значений  $\varphi_j^*(\xi_i)$  и  $\bar{\varphi}_j^*(\xi_i)$  ( $j = 1, 2; i = \overline{1, n}$ ). Последняя включает в себя также первое из



Фиг. 2



Фиг. 3

условий (1.12), второе же из них используется для определения приведенного угла поворота  $\gamma^*$ .

**3. Численные результаты.** С целью представления процесса сходимости в табл. 1 приведены значения приведенного угла поворота  $\gamma^*$ , приведенного раскрытия трещины  $w_0^* = bw_0/(\vartheta_2 T)$  и коэффициентов интенсивности контактных напряжений в концевых точках включения для различных значений порядка интерполирования неизвестных функций  $n$ .

На фиг. 2 представлены графики распределения нормальных  $\sigma$  (а) и тангенциальных  $\tau$  (б) контактных напряжений, возникающих под включением, для различных значений коэффициента Пуассона ( $\nu = 0.2, 0.3, 0.48$ ).

На фиг. 3 представлены кривые, представляющие приведенную величину взаимного перемещения берегов трещины: сдвиг (а) и раскрытие (б).

Как и следовало ожидать, изменение коэффициента Пуассона наиболее существенным образом влияет на раскрытие трещины. При этом, как это следует из табл. 2, в которой приведены значения приведенного угла поворота  $\gamma^*$ , приведенного раскрытия трещины  $w_0^* = bw_0/(\vartheta_2 T)$  и коэффициентов интенсивности напряжений, основной причиной этого является величина угла поворота тонкого жесткого включения. Замечая, что приведенный угол поворота  $\gamma^*$  меняет знак, находим такое значение  $\nu = 0.43557$ , при котором жесткое включение испытывает только поступательное перемещение.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамян Б.Л.* Об одной контактной задаче для полуплоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 5. С. 4–10.
2. *Григорян Э.Х.* Решение задачи упругого конечного включения, выходящего на границу полуплоскости // Учен. зап. ЕГУ. естеств.н. 1981. № 3. С. 32–43.
3. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
4. *Акопян В.Н.* Напряженно-деформированное состояние составного клина, усиленного жестким включением // Механика деформируемого твердого тела. Ереван: Изд-во АН Армении, 1993. С. 63–78.
5. *Акопян В.Н., Саакян А.В.* Об одной смешанной задаче для упругого клина, ослабленного трещиной // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 6. С. 66–78.
6. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
7. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1963. 367 с.
8. *Erdogan F., Gupta G.D. and Cook T.S.* Numerical solution of singular integral equations // Mechanics of Fracture. Ed. G.C. Sih. Leyden: Noordoff, 1973. V. 1. P. 368–425.
9. *Партон В.З., Перлин П.И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311 с.
10. *Саакян А.В.* Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью // Изв. НАН РА. Механика. 2000. № 3. С. 12–19.

Ереван

Поступила в редакцию  
29.05.2000