

УДК 539.3

© 2002 г. М.И. ЧЕБАКОВ

ТРЕХМЕРНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СЛОЯ С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ В ОБЛАСТИ КОНТАКТА

Рассматривается пространственная контактная задача теории упругости о действии штампа произвольной формы на поверхность слоя толщины h . Зона контакта предполагается заранее неизвестной и зависящей от величины действующих на штамп нормальной силы P и тангенциальной силы T . Предполагается также, что между штампом и слоем имеют место силы кулоновского трения, которые коллинеарны направлению действия тангенциальной силы T . Штамп не поворачивается в процессе взаимодействия. Вне штампа поверхность слоя свободна от напряжений, а на другой поверхности слоя заданы условия отсутствия перемещений. Рассматривается случай предельного равновесия, случай квазистатического движения штампа по поверхности слоя в подвижной системе координат может быть рассмотрен аналогично.

Получено интегральное уравнение поставленной контактной задачи, для решения которого использован метод нелинейных граничных интегральных уравнений [1, 2]. Исследовано влияние коэффициента трения Кулона, формы штампа, упругих констант и толщины слоя на величину контактных напряжений, на зависимость вертикального перемещения штампа от вдавливающей силы, на величину и форму области контакта и на перемещение точек поверхности слоя вне области контакта.

В работах других авторов с учетом сил трения рассматривались плоские задачи [3, 4], пространственные для полупространства [5, 6] и для клина [7, 8].

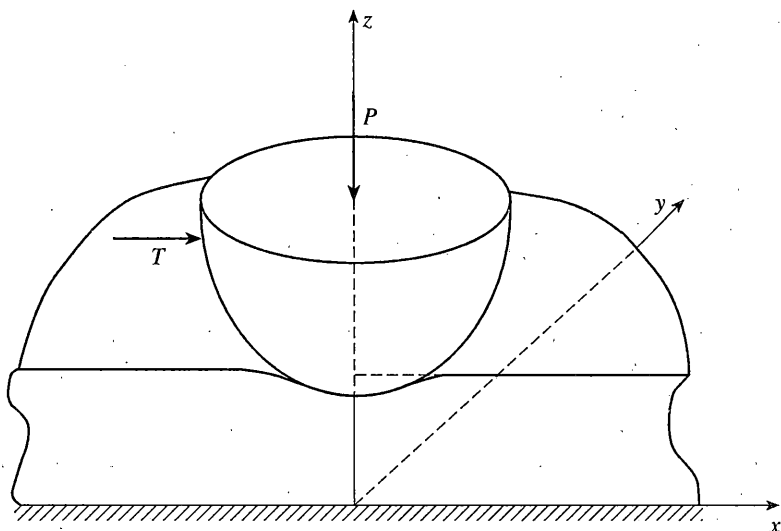
Пусть жесткий штамп, лежащий на поверхности слоя $z = h$, находится под действием нормальной силы P и тангенциальной силы T , направленной вдоль оси Ox (фиг. 1). Здесь (x, y, z) – прямоугольная система координат, начало которой находится на нижней поверхности. Предполагая, что силы трения под штампом параллельны силе T и штамп находится в условиях предельного равновесия и не поворачивается, получим краевую задачу для уравнений Ляме при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned}w &= \delta - f(x, y), \quad \tau_{xz} = \mu \sigma_z, \quad \tau_{yz} = 0 \quad (z = h, (x, y) \in \Omega) \\ \sigma_z &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (z = h, (x, y) \notin \Omega) \\ u &= v = w = 0 \quad (z = 0)\end{aligned} \tag{1}$$

Кроме того, выполняются условия статики

$$P = \iint_{\Omega} \sigma_z(x, y, 0) d\Omega, \quad T = \mu P$$

В (1) u, v, w – компоненты вектора перемещений соответственно вдоль осей x, y, z ; $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – компоненты тензора напряжений; μ – коэффициент трения; δ – перемещение штампа; $f(x, y)$ – форма основания штампа, Ω – область контакта.



Фиг. 1.

Перемещения в слое можно представить как суперпозицию перемещений точек основания, вызванного приложением в области контакта некоторого нормального давления $q(x, y)$ и перемещений, обусловленных действием тангенциальной нагрузки $\mu q(x, y)$ в направлениях оси x . Принимая это во внимание и представляя компоненты вектора перемещения в слое в виде двойного преобразования Фурье по координатам x, y , получим интегральные уравнения поставленных контактных задач для определения неизвестного контактного давления $q(x, y)$ под штампом

$$\iint_{\Omega} q(\eta, \xi) k(x - \eta, y - \xi) d\eta d\xi = \frac{2\pi G}{1 - \nu} (\delta - f(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega \quad (2)$$

где G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона. Ядра $k(t, \tau)$ можно представить в виде двух слагаемых

$$k(t, \tau) = k_1(t, \tau) - \varepsilon k_2(t, \tau), \quad \varepsilon = \mu(1 - 2\nu)/(2 - 2\nu) \quad (3)$$

$$k_n(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L_n(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha t + \beta \tau)} d\alpha d\beta \quad (n = 1, 2) \quad (4)$$

$$L_1(\alpha, \beta) = \gamma^{-1} L_1(\gamma h), \quad L_2(\alpha, \beta) = i\alpha \gamma^{-2} L_2(\gamma h), \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (5)$$

$$L_1(u) = \frac{2\kappa \operatorname{sh} 2u - 4u}{2\kappa \operatorname{ch} 2u + 4u^2 + 1 + \kappa^2} \quad (6)$$

$$L_2(u) = \frac{2\kappa (\operatorname{ch} 2u - 1) - 4u^2 (1 - 2\nu)^{-1}}{2\kappa \operatorname{ch} 2u + 4u^2 + 1 + \kappa^2}, \quad \kappa = 3 - 4\nu$$

Отметим, что интегральные уравнения (2) только с ядрами $k_1(t, \tau)$ соответствуют контактным задачам о вдавлении штампа в слой без трения [9].

Ядро интегрального уравнения может быть упрощено и представлено в виде однократных интегралов

$$k_1(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + \tau^2}} + \int_0^{\infty} (L_1(\gamma h) - 1) J_0(\gamma \sqrt{t^2 + \tau^2}) d\gamma \quad (7)$$

$$k_2(t, \tau) = \frac{1}{t^2 + \tau^2} + \frac{t}{t^2 + \tau^2} \int_0^{\infty} (L_2(\gamma h) - 1) J_1(\gamma \sqrt{t^2 + \tau^2}) d\gamma \quad (8)$$

где $J_n(x)$ ($n = 0, 1$) – функции Бесселя.

К интегральному уравнению (2) с ядрами (7), (8) кроме условий статики необходимо добавить также условие для нахождения области контакта, которое будет сформулировано и реализовано ниже.

При выводе соотношений (7), (8) использовалась замена переменных $\alpha = \gamma \cos \psi$, $\beta = \gamma \sin \psi$ и значения интегралов [9]:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(a \cos \psi) \cos(b \sin \psi) d\psi = \frac{\pi}{2} J_0(\sqrt{a^2 + b^2})$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos \psi \sin(a \cos \psi) \cos(b \sin \psi) d\psi = \frac{\pi a}{2\sqrt{a^2 + b^2}} J_1(\sqrt{a^2 + b^2})$$

В случае, когда толщина слоя $h \rightarrow \infty$, ядро интегрального уравнения (2) примет вид

$$k_1(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + \tau^2}}, \quad k_2(t, \tau) = \frac{t}{t^2 + \tau^2} \quad (9)$$

Это совпадает с ядром интегрального уравнения аналогичной задачи для полупространства, рассмотренной в работе [5].

Для решения интегрального уравнения (2) с ядром (3), (7), (8) применим метод нелинейных граничных уравнений, развитый в работах [1, 2]. Этот метод позволяет одновременно находить не только функцию распределения контактных напряжений, но и область контакта, а также и перемещения точек поверхности слоя вне штампа в некоторой области, содержащей область контакта. Использовался он также в работах [10, 11]. Не нарушая общности результатов, предположим, что штамп имеет форму эллиптического параболоида, вытянутого вдоль оси y . Тогда функция $f(x, y)$, стоящая в правой части уравнения (2), примет вид

$$f(x, y) = x^2(2R_1) + y^2/(2R_2) \quad (R_2 \geq R_1) \quad (10)$$

где R_1, R_2 – радиусы кривизны штампа соответственно в плоскостях $y = 0$ и $x = 0$.

В соответствии с методом нелинейных граничных уравнений [1, 2] предположим, что область контакта Ω заключена в прямоугольнике $S = \{|x| \leq a, |y| \leq b\}$, $b \geq a$.

Введем следующие безразмерные переменные и величины

$$x' = \frac{x}{b}, \quad y' = \frac{y}{b}, \quad \delta' = \frac{\delta}{b}, \quad \varepsilon_0 = \frac{a}{b}, \quad \lambda_0 = \frac{h}{b} \quad (11)$$

$$A = \frac{b}{2R_1}, \quad B = \frac{b}{2R_2}, \quad P' = \frac{(1-\nu)}{2\pi G b^2} P, \quad q'(x', y') = \frac{(1-\nu)}{2\pi G} q(x, y)$$

В этом случае область контакта Ω перейдет в область Ω' , а прямоугольник S в прямоугольник $S' = \{x' \leq \varepsilon_0, |y'| \leq 1\}$, $\varepsilon_0 \leq 1$.

Здесь параметр λ_0 характеризует относительную толщину слоя, а параметр ε_0 – эксцентриситет области контакта.

Заметим, что размеры a и b прямоугольника S могут быть выбраны исходя из точного решения задачи о вдавлении без трения штампа в форме эллиптического параболоида в упругое полупространство [10], но в большинстве случаев они могут быть взяты в виде $a = \sqrt{2\delta R_1}$, $b = \sqrt{2\delta R_2}$.

Окончательно поставленная задача будет сведена в безразмерном виде к следующей системе, состоящей из интегрального уравнения и неравенств

$$Kq' = f'(x', y'), \quad q'(x', y') \geq 0 \quad (x', y') \in \Omega' \quad (12)$$

$$Kq' > f'(x', y'), \quad q'(x', y') = 0 \quad (x', y') \in (S' \setminus \Omega') \quad (13)$$

$$f'(x', y') = \delta' - Ax'^2 - By'^2$$

$$Kq' = \iint_{\Omega} q'(\xi, \eta) \left[\frac{1}{R} - \varepsilon \frac{x' - \xi}{R^2} + \frac{1}{\lambda_0} T \left(\frac{x' - \xi}{\lambda_0}, \frac{y' - \eta}{\lambda_0} \right) \right] d\xi d\eta \quad (14)$$

$$T(t, \tau) = \int_0^{\infty} [L_1(u) - 1] J_1(u\sqrt{t^2 + \tau^2}) du - \varepsilon \frac{t}{t^2 + \tau^2} \int_0^{\infty} [L_2(u) - 1] J_1(u\sqrt{t^2 + \tau^2}) du$$

$$R = \sqrt{(x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2}$$

Система (12), (13) содержит условие для определения области контакта и может быть сведена к нелинейному граничному интегральному уравнению типа Гаммерштейна [1, 2]. Это нелинейное уравнение имеет вид (см. (1.4) [1]):

$$\varphi = \mu_0 f'(x', y') + (E - \mu_0 K) Q^+ \varphi \quad ((x', y') \in S') \quad (15)$$

Здесь параметр μ_0 может принимать произвольные значения, E – тождественный оператор, а операторы Q^+ и Q^- определяются соотношениями [1, 2]:

$$Q^+(\varphi) = \sup\{\varphi(x', y'), 0\}, \quad Q^-(\varphi) = \inf\{\varphi(x', y'), 0\}, \quad (x', y') \in S'$$

Связь между решениями системы (12), (13) и нелинейного уравнения (15) имеет вид $q(x', y') = Q^+(\varphi(x', y'))$, $\Omega' = \{(x', y') : \varphi(x', y') \geq 0\}$.

Решение нелинейного уравнения (15) будет найдено численно методом последовательных приближений с использованием модифицированного метода Ньютона [1]. Алгоритм этого метода позволяет одновременно находить контактные напряжения и область контакта, когда известно перемещение штампа δ . Дискретизация уравнения осуществлялась с учетом симметрии области контакта, а узлы дискретизации в области S' выбирались равномерно по осям координат.

Схема решения уравнения (15), используемая в работах [1, 2, 7, 8] и др., предполагает, что известно перемещение штампа δ , а сила P находится как интеграл от функции распределения контактных напряжений. Здесь, в отличие от упомянутых выше работ, будем считать, что задана сила P , а перемещение штампа δ необходимо найти.

Для этого несколько модифицируем схему метода. Положим $q' = \delta' q^*$, $a = \sqrt{2\delta R_1}$, $b = \sqrt{2\delta R_2}$, тогда $\varepsilon_0 = \sqrt{R_1 / R_2}$ и после ряда преобразований контактные напряжения представим в виде

$$q(x, y) = \frac{\pi G \sqrt{2\delta}}{\sqrt{R_2}} q^*(x', y') \quad (16)$$

а связь между силой, действующей на штамп, и его перемещением будет определяться равенством

$$P = 2\pi G \delta (1 - \nu)^{-1} \sqrt{2\delta R_2} P^* \quad (17)$$

$$P^* = \iint_{\Omega'} q^*(x', y') d\Omega' \quad (18)$$

где $q^*(x', y')$ – решение системы (12), (13) или уравнения (15):

$$f'(x', y') = f^*(x', y') = 1 - \frac{R_2}{R_1} x'^2 - y'^2 \quad (19)$$

Как показывают числовые расчеты, итерационный процесс численного решения нелинейного граничного интегрального уравнения (15) с правой частью (19) сходится значительно лучше.

Перепишем соотношение (17) в виде

$$\delta = (P(1 - \nu))^{2/3} (2\pi G P^* \sqrt{2R_2})^{-2/3} \equiv D(\delta) \quad (20)$$

и будем рассматривать (20) как уравнение для определения перемещения штампа δ . Это уравнение является нелинейным, так как, исходя из соотношения (14), величина P^* зависит от $\lambda_0 = h/b = h/\sqrt{2\delta R_2}$ нелинейно, а следовательно и от δ зависит нелинейно.

Функция $D(\delta)$ в соответствии с соотношениями (18), (20) вычисляется через решение системы (12), (13), (19). Уравнение (20) будем решать методом последовательных приближений по схеме

$$\delta_n = D(\delta_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (21)$$

В случае, когда $h = \infty$, P^* , а соответственно и $D(\delta)$ от δ не зависят и поэтому, естественно, за нулевое приближение δ_0 в (20) взять величину δ внедрения штампа в полупространство ($\lambda_0 = \infty$) при неизменности других параметров задач.

Как показывают числовые расчеты, итерационный процесс (21) сходится достаточно быстро, скорость его сходимости в основном зависит от глубины слоя: чем больше глубина слоя, тем быстрее сходимость.

Окончательно алгоритм решения поставленных контактных задач в случае, когда заданы механические свойства слоя и его толщина, форма штампа, коэффициент трения и действующая на штамп нормальная сила P , состоит из следующих этапов. На первом этапе решается задача для полупространства. Для этого надо решить уравнение (15), (19), когда в (14) $T(t, \tau) = 0$, найти перемещение штампа $\delta = \delta_0$ и величину $\lambda_0 = h/\sqrt{2\delta_0 R_2}$. На следующем этапе необходимо реализовать итерационный процесс (21), на каждом шаге которого решается уравнение (15), (19) при $\lambda_0 = h/\sqrt{2\delta_{n-1} R_2}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где n – номер итерации. После того, как точность вычисления величины перемещения штампа будет достигнута, на заключительном этапе могут быть вычислены контактные напряжения, форма поверхности слоя вне штампа, форма области контакта и величина момента, удерживающего штамп в вертикальном положении.

Ниже приведены некоторые результаты числовых расчетов. Контроль точности результатов производился путем их сравнения при разных значениях числа узлов дискретизации нелинейного интегрального уравнения (15) и также путем сравнения их с известными частными случаями при $\mu = 0$ [9, 10].

В результате проведенных числовых расчетов было установлено, что при заданной силе P перемещение штампа δ практически не зависит от коэффициента трения μ , но существенно зависит от коэффициента Пуассона ν и других параметров. В табл. 1 приведены значения перемещения $\delta \cdot 10^3$ при $P = 10^7$, $\mu = 0.9$, $R_1 = R_2 = 1.0$ при некоторых значениях коэффициента Пуассона ν , модуля сдвига G и толщины слоя h [М]. Заметим, что при любых P и G результаты не меняются, если $P/G = \text{const}$. Здесь и далее размерные величины указаны в системе СИ.

Как видно из табл. 1 при постоянной силе P перемещение штампа δ уменьшается с увеличением коэффициента Пуассона ν и с уменьшением толщины слоя h .

Таблица 1

$G \cdot 10^{-10}$	ν	$h = 0.5$	0.2	0.1	0.05	0.02
7.0	0.1	1.29	1.21	1.09	0.907	0.617
	0.2	1.19	1.12	1.01	0.833	0.566
	0.3	1.08	1.01	0.912	0.750	0.504
	0.4	0.967	0.906	0.811	0.657	0.430
1.0	0.1	4.52	4.04	3.36	2.55	1.65
	0.3	3.79	3.37	2.79	2.10	1.34
	0.4	3.39	2.99	2.45	1.80	1.10

Таблица 2

$P \cdot 10^{-7}$	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
$h = 0.1$	0.910	1.37	1.73	2.03	2.31	2.55	2.78	2.99	3.19	3.37
$h = 0.02$	0.500	0.708	0.864	1.00	1.12	1.22	1.32	1.41	1.49	1.58

Таблица 3

N	$P \cdot 10^{-7}$	$G \cdot 10^{-10}$	μ	h	ν	R_1	R_2	$a \cdot 10^2$	$\delta \cdot 10^4$
2	1.0	7.0	0.9	0.02	0.1	1.0	1.0	3.51	6.17
3	1.0	7.0	0.9	0.02	0.4	1.0	1.0	2.93	4.30
4	1.0	7.0	0.9	0.1	0.1	1.0	1.0	4.68	10.9
5	1.0	7.0	0.9	0.1	0.4	1.0	1.0	4.03	8.11
6	1.0	7.0	0.5	0.02	0.1	1.0	1.0	3.51	6.14
7	1.0	7.0	0.5	0.02	0.4	1.0	1.0	2.92	4.27
8	1.0	1.0	0.9	0.1	0.1	1.0	1.0	8.20	3.36
9	1.0	1.0	0.9	0.1	0.4	1.0	1.0	7.00	2.45

В табл. 2 приведены значения величины $\delta \cdot 10^3$ при некоторых значениях $P, h, \nu = 0.3, G = 7 \cdot 10^{10}, \mu = 0.9, R_1 = R_2 = 1.0, h = 0.1$ и $h = 0.02$. При других значениях $\mu < 1.0$ они будут такими же.

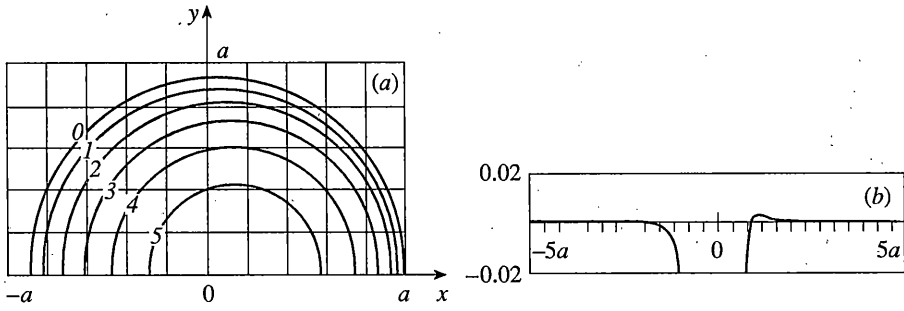
Проведено численное исследование вертикальных перемещений точек поверхности слоя $z = h$ и формы области контакта. Здесь также наблюдается существенная зависимость этих характеристик от коэффициента Пуассона ν , толщины слоя h и от коэффициента трения μ .

На фиг. 2, $b-9, b$ приведены графики величины $w^*(x, y) = w(x, y, 0)/\delta(y = 0)$, соответствующей вертикальным перемещениям точек поверхности слоя $z = h$ в плоскости $y = 0$, при значениях параметров из табл. 3 (N – номер фигур).

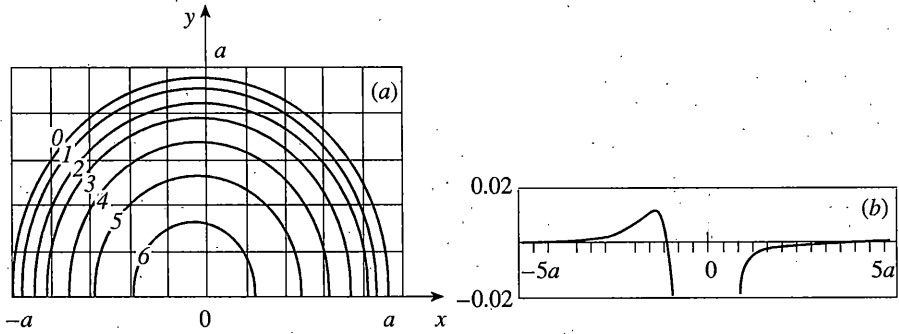
На этих фигурах $|x| \leq 5a$, а $w^*(x, 0) > -0.02$. Последнее условие соответствует тому, что на фигурах не изображены перемещения точек на некоторой части области контакта, которые равны перемещениям соответствующих точек штампа. Значения величины $a \cdot 10^2$ приведены в табл. 4 при тех же значениях параметров, что и табл. 1.

При $P = 10^7, G = 7 \cdot 10^{10}, \mu = 0.9, h = 0.02, R_1 = R_2 = 1$ на фиг. 10, 11 приведен для наглядности вид деформированной поверхности в окрестности штампа и под штампом, что соответствует значениям функции $w^*(x, y)$ при $|x| \leq 2a, 0 \leq y \leq 2a$ соответственно при $\nu = 0.1$ и $\nu = 0.4$.

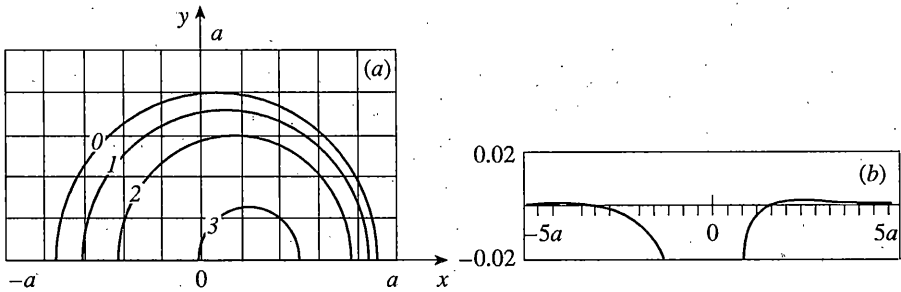
На фиг. 2, $a-9, a$ приведена граница области контакта (кривая 0) при $y \geq 0$ при значениях параметров, указанных в табл. 3.



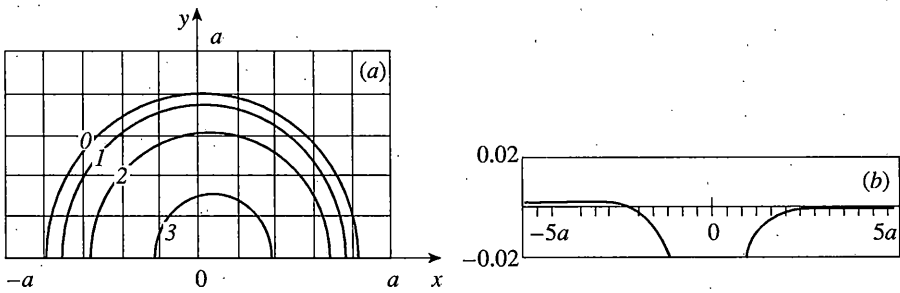
Фиг. 2



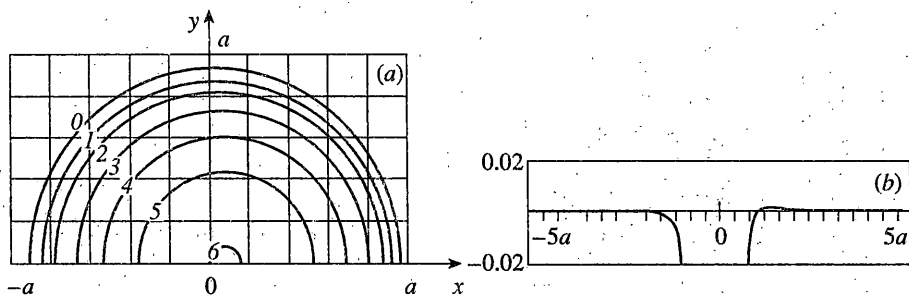
Фиг. 3



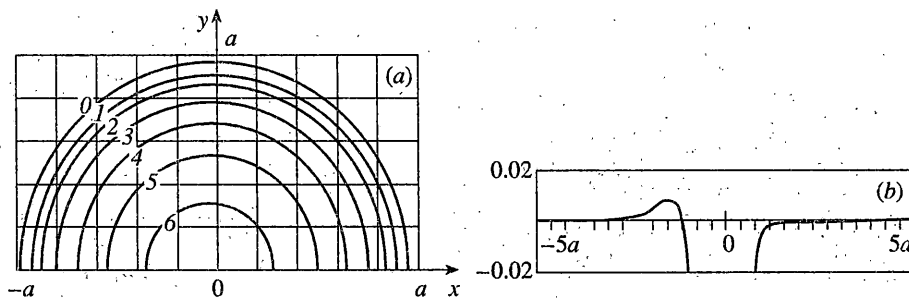
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

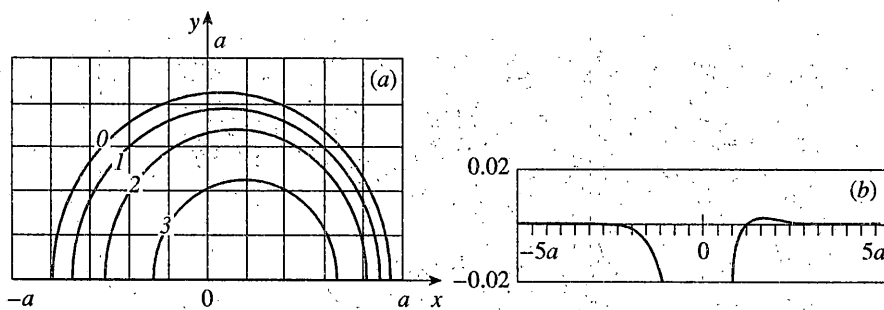
На этих же фигурах приведены также линии равных значений функции $q^*(x/b, y/b) = q(x, y) \sqrt{R_2} / (\pi G \sqrt{2\delta})$ (кривые 1-6), соответствующие безразмерным значениям контактных напряжений $q(x, y)$ (16). На этих рисунках кривые с номером n соответствуют значениям $q^* = 0.1 \cdot n$. В табл. 5 приведены наибольшие значения величины $q^*(x', y')$ в области контакта при значениях параметров задач, соответствующих указанным фигурам. Очевидно, что в этих точках $y' = 0$, а значения x' указаны в табл. 5.

Таблица 4

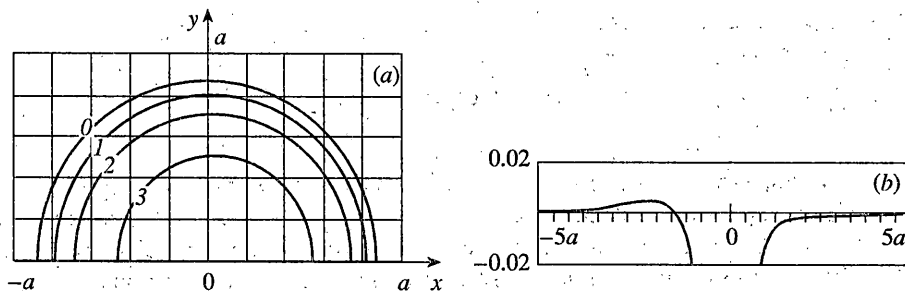
$G \cdot 10^{-10}$	ν	$h = 0.5$	0.2	0:1	0.05	0.02
7.0	0.1	5.07	4.92	4.68	4.26	3.51
	0.2	4.87	4.72	4.49	4.08	3.36
	0.3	4.64	4.50	4.27	3.87	3.17
	0.4	4.40	4.26	4.03	3.62	2.93
1.0	0.1	9.51	8.99	8.20	7.15	5.74
	0.3	8.71	8.21	7.47	6.48	5.16
	0.4	8.24	7.73	7.00	6.00	4.70

Таблица 5

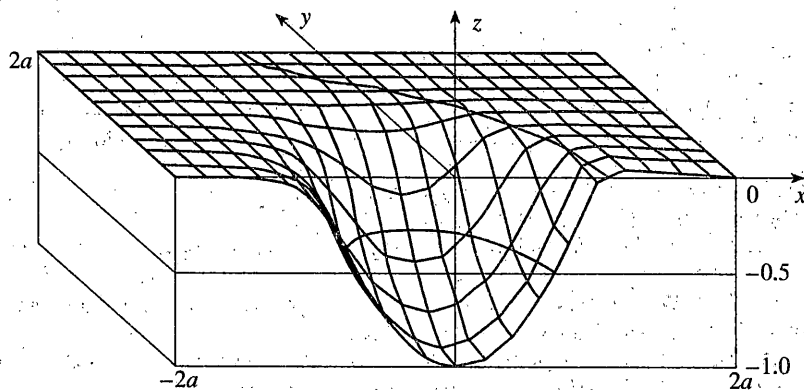
N	x'	$q^*(x', 0)$	N	x'	$q^*(x', 0)$	N	x'	$q^*(x', 0)$
3, a	0.15	0.597	4, a	-0.1	0.661	5, a	0.25	0.318
6, a	0.1	0.326	7, a	0.1	0.605	8, a	-0.05	0.659
9, a	0.25	0.365						



Фиг. 8



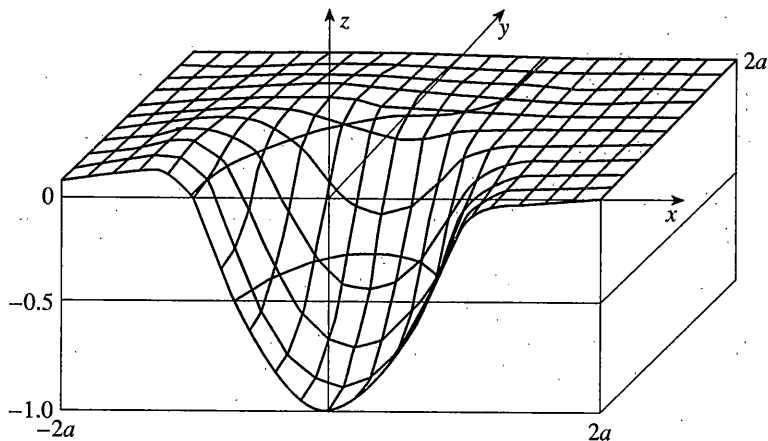
Фиг. 9



Фиг. 10

Координаты точек в таблице 5 указаны с абсолютной погрешностью, равной не более $0.05a$.

Анализ результатов числовых расчетов позволяет сделать следующие выводы: при заданной силе P перемещение штампа δ практически не зависит от коэффициента трения μ , но существенно зависит от коэффициента Пуассона ν ; при значениях коэффициента Пуассона близких к нулю перемещения точек поверхности слоя вне штампа в его окрестности в направлении действия силы P при $x > 0$ меньше, чем при $x < 0$, а при коэффициентах Пуассона близких к 0.5 эти перемещения при $x > 0$ больше, чем при $x < 0$. Это различие увеличивается с уменьшением величины относительной толщины слоя $h^* = h/D$ (D – максимальный линейный размер площадки контакта) и увеличением коэффициента трения μ . При этом площадка контакта при малых ν



Фиг. 11

смещается в направлении действия силы T , а при больших ν – в противоположном направлении действия силы T по сравнению со случаем, когда коэффициент трения $\mu = 0$. Расчеты показывают также, что при малых h^* происходит выпучивание поверхности слоя либо в точках при $x > 0$ (малые значения ν) либо в точках при $x < 0$ (значения ν , близкие к 0.5). Эти факты проиллюстрированы на приведенных фигурах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-01146).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галанов Б.А. Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // 1985. ПММ. Т. 49. Вып. 5. С. 827–835.
2. Галанов Б.А. Нелинейные граничные уравнения контактных задач теории упругости // Докл. АН СССР. 1987. Т. 296. № 4. С. 812–815.
3. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
4. Александров В.М. О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления или трения // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 2. С. 246–257.
5. Галин Л.А., Горячева И.Г. Пространственная контактная задача о движении штампа с трением // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 1016–1022.
6. Кравчук А.С. Решение некоторых пространственных контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // Трение и износ. 1981. Т. 2. № 4. С. 589–595.
7. Пожарский Д.А. Трехмерная контактная задача для упругого клина при учете трения в неизвестной области контакта // Докл. РАН. 2000. Т. 372. № 3. С. 333–336.
8. Пожарский Д.А. О трехмерной контактной задаче для упругого клина при учете сил трения // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 151–159.
9. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974: 455 с.
10. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.