МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2002

УДК 534.1

© 2002 г. В.В. ЛЮБИМОВ

# ВНЕШНЯЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕЗОНАНСА В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ С МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

В нелинейном случае анализируется внешняя устойчивость резонансов, возникающих в системе с несколькими медленно изменяющимися переменными. Внешняя устойчивость определяется поведением траекторий системы уравнений на нерезонансных участках движения вне асимптотически малой резонансной зоны [1]. При движении на нерезонансных участках резонансные члены присутствуют во втором приближении метода усреднения и (при отсутствии эволюции в первом приближении) проявляются в виде вторичных резонансных эффектов. В нелинейной постановке формулируются условия внешней устойчивости резонанса. Метод иллюстрируются на примере исследования внешней устойчивости резонанса при движении асимметричного твердого тела относительно неподвижной точки. Приводится фазовый портрет, построенный на нерезонансных участках, отражающий эволюцию медленных переменных при внешне устойчивом и внешне неустойчивом резонансе.

**1. Введение.** Вопросам исследования устойчивости резонансов при действии возмущений посвящено большое количество работ [1–3]. Как правило, в работах под устойчивостью резонансов понимается устойчивость решений системы внутри асимптотически малой резонансной зоны. В то же время резонансы могут определять эволюцию медленных переменных уже на нерезонансных участках движения [4]. Подобные явления, известные как вторичные резонансные эффекты, наблюдаются при усреднении систем с медленной эволюцией на нерезонансных участках движения. При этом в усредненных уравнениях резонансные знаменатели входят в члены второго приближения метода усреднения, поэтому влияние вторичных резонансных эффектов на изменение переменных является существенным при отсутствии эволюции в первом приближении. Усредняя медленно изменяющиеся переменные системы можно получить условия внешней устойчивости резонанса. Тогда, под внутренней устойчивостью следует понимать устойчивость решений в резонансном случае. В настоящей работе исследуется внешняя устойчивость резонансов в нелинейной двухчастотной системе, на которую действуют периодические по быстрым переменным возмущения. В качестве примера рассматривается внешняя устойчивость резонанса при движении асимметричного твердого тела относительно неподвижной точки.

**2. Внешняя устойчивость. Постановка задачи.** Рассматриваемая система является двухчастотной системой с периодическими возмущениями:

$$dx/dt = \varepsilon X(x, \varphi) \tag{2.1}$$

$$d\varphi/dt = \Omega(x) + \varepsilon\Phi(x, \varphi) \tag{2.2}$$

где $\varepsilon$ – малый параметр; $x = \{x_1, x_2\}$ – вектор медленных переменных; $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ – быстрые фазы; $X(x, \varphi)$, $\Phi(x, \varphi)$ – возмущения, периодические по фазам $\varphi$ с периодом равным $2\pi$ и раскладывающиеся по $\varphi$ в ряд Фурье без нулевого члена; $\Omega(x) =$

$= \{\Omega_1, \Omega_2\}$ – частоты системы (2.1), (2.2). Резонансное соотношение частот в системе (2.1), (2.2) имеет вид $\Delta(x) = n\Omega_1 + m\Omega_2$, где $n$ и $m$ – некоторые постоянные. Резонансные зоны традиционно имеющие порядок $\Delta(x) = O(\varepsilon^{1/2})$ [5] делят фазовую плоскость $x_1 = x_1(x_2)$ на нерезонансные области. Причем резонансная функция $\Delta(x)$ сохраняет в каждой из нерезонансных областей соответствующий данной области знак.

Внешнюю устойчивость резонанса $\Delta(x) = 0$ в системе (2.1), (2.2) можно определить следующим образом.

*Определение.* Резонанс $\Delta(x) = 0$ внешне устойчив в некоторой нерезонансной области $D(\Delta)$, если для любого $\lambda > 0$, можно найти такие $\lambda_1$ ($\lambda > \lambda_1 > 0$), $\varepsilon_0 > 0$, $C_1 > 0$, $L > 0$, что для всех $\Delta(x)$, определенных из системы (2.1), (2.2) при $C_1\varepsilon^{1/2} < |\Delta_0| < \lambda_1$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ на интервале $t_0 \leqslant t < t_* = L/\varepsilon$ выполняется условие $C_1\varepsilon^{1/2} < |\Delta| < \lambda$, где $\Delta_0 = \Delta(x_0)$, $x_0 = x(t_0)$, а $t_*$ определяет момент выхода $\Delta(x)$ на границу $\varepsilon^{1/2}$ – окрестности резонанса.

Следовательно, о внешней устойчивости резонанса $\Delta(x) = 0$ в случае нескольких медленных переменных можно говорить лишь применительно к некоторой области $D(\Delta)$.

**3. Теорема о внешней устойчивости резонанса.** Сформулируем теорему о внешней устойчивости резонанса $\Delta(x) = 0$ в системе (2.1), (2.2). При получении этой теоремы используются схемы доказательства, приведенные в [2].

Условия теоремы о внешней устойчивости резонанса $\Delta(x) = 0$ для системы (2.1), (2.2) имеют следующий вид

(*1*) существует положительно определенная по переменной $\Delta$ функция Ляпунова $V(\Delta)$ системы (2.1), (2.2), допускающая по переменной $\Delta$ бесконечно малый высший предел;

(*2*) равномерно относительно $\Delta$ из области $C_1\sqrt{\varepsilon(\lambda)} < |\Delta| < \lambda$ существует среднее

$$\psi(\Delta) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial V}{\partial \Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial t}\,dt$$

и для всякого $\rho > C_1\varepsilon^{1/2}$ можно указать такое $\delta > 0$, что если $|\Delta| > \rho$, то $\psi(\Delta) < -\delta$ при $t \geqslant 0$;

(*3*) существуют суммируемые функции $F(t)$ и $M(t)$, постоянные $F_0$ и $M_0$, а также неубывающая функция $\chi_1(\alpha)$, $\lim \chi_1(\alpha) = 0$ при $\alpha \to 0$, такие, что в области $C_1\sqrt{\varepsilon(\lambda)} < |\Delta| < \lambda$ имеют место неравенства:

$$|\dot V(\Delta') - \dot V(\Delta'')| \leqslant \chi_1(\|\Delta' - \Delta''\|)F(t), \quad \frac{dV}{dt} = \dot V$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t)dt \leqslant F_0(t_2 - t_1), \quad \|X(\Delta, t)\| < M(t), \quad \int_{t_1}^{t_2} M(t)dt \leqslant M_0(t_2 - t_1)$$

на любом конечном отрезке $[t_1, t_2]$.

*Теорема.* При выполнении условий (*1*)–(*3*) резонанс $\Delta(x) = 0$ внешне устойчив.

*Доказательство.* Зададим $\lambda > 0$, а также $\lambda_1$ с помощью неравенства $\lambda_1 < \lambda$. Согласно условию (*1*) функция Ляпунова $V(\Delta)$ положительно определена и имеет бесконечно малый высший предел. Поэтому для заданного $\lambda_1$ можно указать такие $C(\lambda_1) > 0$ и $C_1 > 0$, что подвижные поверхности уровня $V(\Delta) = C$ расположены в кольцевой области $0 < C_1\sqrt{\varepsilon(\lambda)} < |\Delta| < \lambda_1$. Пусть начальная точка $\Delta(0) = \Delta_0$ удовлетворяет условию $C_1\sqrt{\varepsilon(\lambda)} < |\Delta_0| < \lambda_1$. Рассмотрим решение $\Delta = \Delta(t, \Delta_0)$ уравнения

$d\Delta/dt = \varepsilon\partial\Delta/\partial x\, dx/dt$. Допустим, что в некоторый момент $t = t_0$ решение $\Delta = \Delta(t, \Delta_0)$ пересекает поверхность $V(\Delta) = C(\lambda_1)$. Начиная с момента $t = t_0$, изучим изменение функции вида $V = \Delta^2$ на решении $\Delta = \Delta(t)$. Для этого найдем производную

$$\dot{V} = 2\Delta d\Delta / dt \tag{3.1}$$

Причем $\dot{V} = O(\varepsilon)$. Проинтегрировав уравнение (3.1) получим

$$V(\Delta) = V(\Delta_0) + \varepsilon \int_{t_0}^{t} \dot{V} dt \tag{3.2}$$

Для анализа влияния последнего в выражении (3.2) на поведение функции Ляпунова $V = V(t)$, прибавим к нему и вычтем аналогичный интеграл, вычисленный на усредненном решении $\overline{\Delta} = \overline{\Delta}(t)$ уравнения (3.2), проведенном из той же точки $\Delta(t_0)$:

$$\int_{t_0}^{t} \dot{V}(\Delta, t)dt = \int_{t_0}^{t} \dot{V}(\overline{\Delta}, t)dt + \int_{t_0}^{t} [\dot{V}(\Delta, t) - \dot{V}(\overline{\Delta}, t)]dt \tag{3.3}$$

Согласно условию (2), существует функция $\xi(t)$, имеющая нулевой предел при $t \to \infty$ и такая, что

$$\int_{t_0}^{t} \dot{V}(\overline{\Delta}, t)dt = (t - t_0)[\psi(\Delta_0, t_0) + \xi(t)] \tag{3.4}$$

Это же условие (2) утверждает, что существует такое $\delta > 0$, что справедливо условие

$$\psi(\Delta_0, t_0) < -\delta \tag{3.5}$$

Выберем $l > 0$ настолько большим, чтобы при $t_0 + l < t$ имело место неравенство

$$\xi(t) < \delta/4 \tag{3.6}$$

Оценим второй интеграл в равенстве (3.3):

$$| \dot{V}(\Delta, t) - \dot{V}(\overline{\Delta}, t) | < N \| \Delta(t) - \overline{\Delta}(t) \| \tag{3.7}$$

Можно показать, что при выполнении условий (3) при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + l < L/\varepsilon$ в нерезонансных областях справедливо условие [5]:

$$\Delta - \overline{\Delta} < C_2\varepsilon^{1/2} \tag{3.8}$$

Здесь $C_2$ – некоторая немалая постоянная. С учетом условия (3.8) неравенство (3.7) принимает вид

$$| \dot{V}(\Delta, t) - \dot{V}(\overline{\Delta}, t) | < C_2 N\varepsilon^{1/2} \tag{3.9}$$

Выберем $\varepsilon_0 = [\delta/(4NC_2)]^2$, тогда из условия (3.9) имеем оценку

$$\int_{t_0}^{t} | \dot{V}(\Delta, t) - \dot{V}(\overline{\Delta}, t) | dt < \frac{l\delta}{4} \tag{3.10}$$

Таким образом, в силу неравенств (3.5), (3.6) и (3.10) получим оценку

$$\int_{t_0}^{t} \dot{V}(\Delta, t)dt < l[\psi(\Delta_0, t_0) + \xi(t_0 + l)] < -\frac{l\delta}{2} \tag{3.11}$$

из которой следует, что

$$V(x(t_0 + l), t_0 + l) = V(x(t_0), t_0) - \tfrac{1}{2} l\delta < C(\lambda_1) \tag{3.12}$$

Следовательно, в момент времени $t = t_0 + l$ решение $\Delta = \Delta(t)$ системы (2.1), (2.2) снова попадает внутрь поверхности уровня $V(\Delta) = C(\lambda_1)$. С другой стороны, поскольку $|\Delta_0| < \lambda_1$, то с учетом условия (3.8), получаем $|\Delta| < \lambda$, где $\lambda = \lambda_1 + C_2 N \varepsilon^{1/2}$.

Кроме того, согласно условию (3) производная $|d\overline{V}/dt| = |\psi| < -\delta$ отрицательна, поэтому $\overline{V}(t)$ и $V(t)$ убывают. Если использовать простейшую функцию Ляпунова вида
$V = \Delta^2$, то величина $|\Delta(t)|$ также монотонно убывает и в некоторый момент времени $t = t_*$ функция $|\Delta(t)|$ выйдет на $\varepsilon^{1/2}$ – окрестность резонансной зоны. Таким образом, резонанс $\Delta = 0$ является внешне устойчивым. Теорема доказана.

**4. Пример.** Рассмотрим выполнение условий внешней устойчивости в задаче о движении асимметричного твердого тела относительно неподвижной точки. Исходные нелинейные уравнения движения тела могут быть приведены к системе с двумя быстрыми фазами. Однако прямое применение метода усреднения к данным уравнениям приводит к решениям достаточно громоздкого вида, поэтому для исследования внешней устойчивости резонансов в данной работе будем использовать систему уравнений, описывающих движение по некоторому интегральному многообразию, полученную из исходных нелинейных уравнений движения с помощью метода, представленного в [6]. Данная система уравнений описывает движение тела в случае, близком к регулярной прецессии. Эта система является аналогом частично усредненной системы метода усреднения [5] и имеет вид

$$du/dt = \varepsilon U(u,\varphi), \quad d\varphi/dt = \Delta(u) + \varepsilon R(u,\varphi) \tag{4.1}$$

Здесь $u = (\theta, \omega_z)$ – новый вектор медленных переменных; $\theta$ – угол нутации тела, $\omega_z$ – угловая скорость вращения тела вокруг оси $OX$, связанной с телом, $U(u, \varphi) = (U_1, U_2)$ – вектор-функция, периодичная по углу собственного вращения $\varphi$ с периодом $2\pi$:

$$U_1 = -m^A\cos(\varphi + \varphi_A), \quad U_2 = \frac{-\Delta y G\sin\theta\sin\varphi}{I_z}, \quad m^A = \sqrt{(m_1^A)^2 + (m_2^A)^2}$$

$$m_1^A = (F^{(\theta)})^{-1}[(1+\bar{I}_z)\omega_z - 3\omega_{1,2}]\Delta M_y/I, \quad I_x = I_y = I$$

$$m_2^A = (F^{(\theta)})^{-1}\left\{[(1+\bar{I}_z)\omega_z - 3\omega_{1,2}]\frac{\Delta yG\cos\theta + \Delta M_x}{I} - \frac{\Delta yG\omega_{1,2}\sin^2\theta}{I\cos\theta}\right\}$$

$$\cos\varphi_A = -m_1^A/m^A, \quad \sin\varphi_A = m_2^A/m^A, \quad \omega_{1,2} = \tfrac{1}{2}\bar{I}_z\omega_z \pm \omega_a, \quad \bar{I}_z = I_z/I$$

$$\omega_a = (\tfrac{1}{4}\bar{I}_x^2\omega_x^2 + \Delta zG\cos\theta/I)^{1/2}, \quad \Delta(u) = \omega_2 - \omega_{1,2}$$

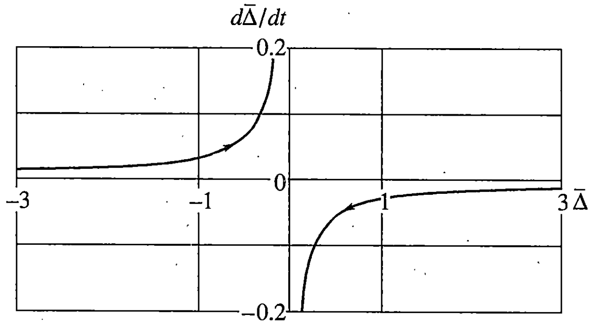
$$R(u,\varphi) = \frac{(\Delta yG\cos\theta + \Delta M_x)\cos\varphi - \Delta M_y\sin\varphi}{2I\omega_a\,\mathrm{tg}\,\theta}$$

где $m^A$ и $\varphi_A$ – некоторые обобщенные параметры асимметрии твердого тела, $G$ – сила тяжести тела. В системе (4.1) малый параметр $\varepsilon$ характеризует малое смещение центра масс тела относительно оси динамической симметрии ($\Delta y$) и величины возмущающих моментов ($\Delta M_x$, $\Delta M_y$).

Расстройка частот является медленно изменяющейся функцией $\Delta(\theta, \omega_z)$, определяемой из уравнения вида

$$\frac{d\Delta}{dt} = \varepsilon\frac{\partial\Delta}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \varepsilon\frac{\partial\Delta}{\partial\omega_z}\frac{d\omega_z}{dt} \tag{4.2}$$

Правая часть уравнения (4.2) периодична по фазе $\varphi$ с периодом $2\pi$, следовательно, данное уравнение можно усреднить по $\varphi$ известным методом усреднения на нере-



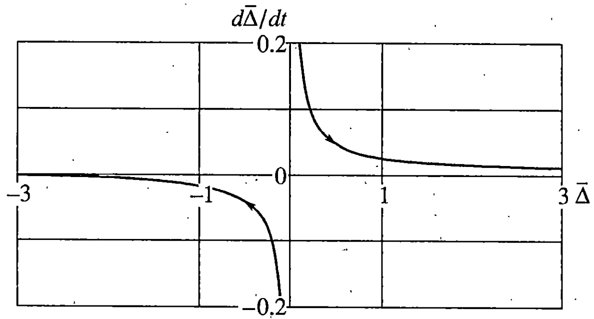

Фиг. 1

зонансных областях движения, рассмотренным в [7]. В результате усреднения получим

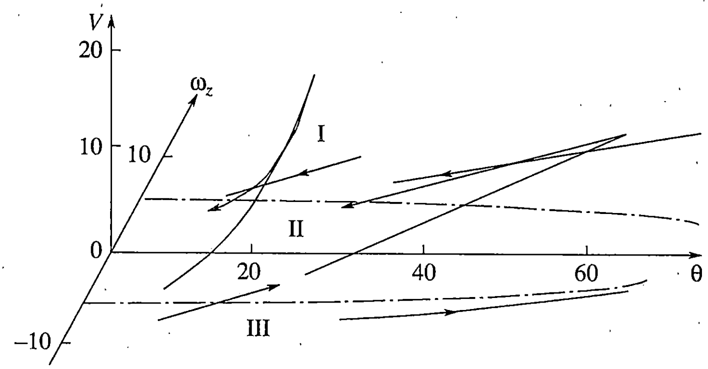
$$\left\langle\frac{d\Delta}{dt}\right\rangle=\varepsilon^2\left(1-\frac{\bar{I}_z}{2}\mp\frac{\bar{I}_z^2\omega_z}{4\omega_a}\right)\left(m^A\cos\varphi_A\mp\frac{\Delta M_y}{2I\omega_a}\right)\frac{\Delta yG\cos\theta}{2I_z(\omega_z-\omega_{1,2})}+$$
$$+\varepsilon^2\frac{\Delta zm^AG\sin\theta[(\Delta yG\cos\theta+\Delta M_x)\cos\varphi_A+\Delta M_y\sin\varphi_A]}{8I^2\omega_a^2\operatorname{tg}\theta(\omega_z-\omega_{1,2})}\mp$$
$$\mp\varepsilon^2\frac{\partial(m^A\cos\varphi_A)}{\partial\omega_z}\frac{\Delta z\Delta yG^2\sin^2\theta}{4I_zI\omega_a(\omega_z-\omega_{1,2})}\mp\varepsilon^2\frac{\partial\varphi_A}{\partial\theta}\frac{\Delta zG\sin\theta(m^A)^2}{4I\omega_a(\omega_z-\omega_{1,2})} \tag{4.3}$$

Согласно уравнению (3.1), знак усредненной производной функции Ляпунова $\langle dV/dt\rangle$ определяется знаками функции $\bar{\Delta}$ и ее производной $\langle d\bar{\Delta}/dt\rangle$. При этом знак функции $\bar{\Delta}$ известен в каждой конкретной нерезонансной области, следовательно, внешняя устойчивость резонанса $\Delta = 0$ в системе (4.1) определяется знаком правой части уравнения (4.3). Относительно вида уравнения (4.3) можно сделать некоторые замечания. Так в правой части уравнения (4.3) наблюдается зависимость $\langle d\bar{\Delta}/dt\rangle = f/\bar{\Delta}$. При этом уравнение (4.3) не содержит слагаемых с квадратами расстроек частот в знаменателях (члены $\sim 1/\bar{\Delta}^2$), что нельзя сказать об усредненных уравнениях для медленных переменных $\omega_z$ и $\theta$. Следовательно, внешнюю устойчивость резонанса $\Delta = 0$ в уравнении (4.3) определяют члены вида $\varepsilon^2 f(\omega_z,\theta)/\bar{\Delta}$. Причем, знаки функции $f$ сохраняются в данной нерезонансной области, но различны для двух других областей, прилегающих к одному и тому же резонансу. Подобное поведение функции $\langle d\bar{\Delta}/dt\rangle = f/\bar{\Delta}$ (4.3) показано на фиг. 1, 2. Где стрелками изображается направление эволюции. Так на фиг. 1 при внешне устойчивом резонансе знаки $\langle d\bar{\Delta}/dt\rangle$ [$с^{-2}$] и $\bar{\Delta}$ [$с^{-1}$] противоположны, а на фиг. 2 при внешне неустойчивом резонансе, напротив, знаки $\langle d\bar{\Delta}/dt\rangle$ и $\bar{\Delta}$ совпадают. Расчеты производились при следующих исходных данных: $G$ = 200 Н, $I_z$ = 2 кгм$^2$, $I$ = 40 кгм$^2$, $\Delta z$ = 3 м, $\Delta y$ = –0.02 м, $\Delta M_x = \Delta M_z = 0$, $\Delta M_y$ = –0.25 Нм (фиг. 1), $\Delta M_y$ = 0.25 Нм (фиг. 2).

Представляет также интерес изучение эволюций медленных переменных в пространстве ($\theta$, $\omega_z$, $V$). При этом может быть выявлена полная картина эволюционных движений медленных переменных в нерезонансных областях, прилегающих к резонансам. Решение данной задачи основывается на получении усредненных уравнений для переменных $\omega_z$ и $\theta$ в нерезонансном случае. Однако получение и анализ усредненных уравнений для переменных $\omega_z$, $\theta$ выходит за рамки рассматриваемой работы.




Фиг. 2




Фиг. 3

Ограничимся рассмотрением фиг. 3, где в пространстве $(\theta, \omega_z, V)$ показаны нерезонансные эволюции медленных переменных в усредненных уравнениях для $\omega_z$ [$с^{-1}$], $\theta$ [град], $V$ [$с^{-2}$]. Исходные данные для фиг. 3 соответствуют данным фиг. 1. На фиг. 3 штриховой линией показана резонансная кривая, разделяющая фазовую плоскость $(\theta, \omega_z)$ на три нерезонансных области I, II, III. При этом положительная ветвь резонансной кривой "притягивает" к себе траектории из областей I и II. Напротив, нижняя ветвь резонансной кривой "отталкивает" от себя траектории из областей II и III. Одновременно с этим наблюдается уменьшение функции Ляпунова $V$ при приближении к внешне устойчивому резонансу. Следовательно, при $\omega_z > 0$ резонансная кривая соответствует случаю внешне устойчивого резонанса, реализующегося в областях I и II. Проводились также расчеты нерезонансных траекторий по исходным нелинейным уравнениям, подтверждающие справедливость полученных результатов. При этом оказалось, что при дальнейшем движении внешне устойчивый резонанс, показанный на фиг. 3, переходит во внутренне устойчивый.

Таким образом, существует ряд условий, при которых в рассматриваемой системе наблюдается внешняя устойчивость резонанса $\Delta = 0$ на нерезонансных участках движения, прилегающих к данному резонансу.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00477).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гребенников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 431 с.
2. *Хапаев М.М.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. М.: Высш. шк., 1988. 184 с.
3. *Черноусько Ф.Л.* О резонансе в существенно нелинейной системе // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т. 3. № 1. С. 131–144.
4. *Садов Ю.А.* Вторичные резонансные эффекты в механических системах // Изв. СССР. МТТ. 1990. № 4. С. 20–24.
5. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
6. *Заболотников Ю.М.* Метод исследования резонансного движения одной нелинейной колебательной системы // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 1. С. 33–45.
7. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.

Самара

Поступила в редакцию
20.06.2000