

УДК 534.1

© 2002 г. М.А. КАГАН, М.И. ФЕЙГИН

## **К ТЕОРИИ ЭФФЕКТОВ БИФУРКАЦИОННОЙ ПАМЯТИ**

Рассматривается общий подход к исследованию особенностей поведения динамических систем, зависящих от параметра, изменение которого с течением времени сопровождается потерей устойчивости или исчезновением стационарного режима. Расчеты количественных характеристик эффектов выполнены применительно к автоколебательной системе с сухим трением. Наряду со случаями мгновенного и квазистационарного изменения параметра рассмотрен сценарий, названный диагностическим. Он дополнительно предусматривает специфические возмущения координат состояния, что позволяет диагностировать степень приближения системы к бифуркационной ситуации и сформулировать удобный для практического применения критерий бифуркационного прогнозирования.

**1. Введение.** При исследовании систем, зависящих от изменяющихся со временем параметров, скорость их изменения обычно принимают отличающейся на порядок от характерной скорости переменных. Так в системах с быстрыми и медленными движениями в зависимости от конкретной решаемой задачи рассматриваются два сценария изменения параметра: сверхбыстрое (триггерный сценарий Фейгина [1]) или медленное (квазистационарный сценарий Понтрягина – Шишковой [2]). В обоих указанных случаях было обнаружено интересное и несколько необычное явление – в постбифуркационной ситуации время прохождения определенного участка быстрых движений оказывалось сколь угодно большим. Существование "области замедления" быстрых движений триггера было подтверждено экспериментально [1].

В дальнейшем аналогичные явления были обнаружены при исследовании неустойчивых на прямом курсе судов [3–8], автоколебательной системы с сухим трением [9], потери устойчивости при динамических бифуркациях [10–13], процессов формирования обширной "озонной дыры" в весенней антарктической стратосфере [14, 15], робототехнических систем [16]. Имеются ссылки на обнаружение подобных эффектов в задачах лазерной физики, биофизики и химической кинетики [13]. С проявлением "бифуркационного предчувствия" связаны некоторые странности ударного виброгашения – неограниченное возрастание чувствительности решения к несимметричности модели с приближением к границе устойчивости [6]. Наряду с подчеркиванием важности необычного поведения в отдельных случаях отмечалось, что оно пока еще остается не до конца ясным [13].

Стремление установить общий механизм происхождения обнаруженных особенностей привело к "неожиданно простой" схематизации проблемы. В пространстве состояний существуют достаточно большие области, в которых скорость существенно отличается от характерных для данной системы скоростей. Такие области (фазовые пятна) в частности порождаются бифуркационными ситуациями [4]. Необычное поведение в области фазового пятна в простейших случаях проявляется на участке переходного процесса, характеризующимся стационарным режимом, который или уже не существует (потерял устойчивость), или еще не родился. И лишь после участка проявления эффекта переходный процесс станет характеризоваться тем "новым" стационарным режимом, к которому система асимптотически приближается.

В более тонких случаях необычность поведения может быть связана с алгоритмом управления координатами системы и параметрами, разрабатываемым в соответствии с конкретно решаемой задачей [5]. Перечисленные выше случаи оказались возможным рассматривать в рамках общей проблемы исследования эффектов бифуркационной памяти системы после прохождения границы устойчивости и эффектов бифуркационного предчувствия приближающейся границы. Именно такой подход позволил глубже понять уже известные, а также прогнозировать новые случаи необычного поведения [17]<sup>1</sup>.

Если в результате бифуркации стационарное решение исчезает, то размеры фазового пятна и количественную оценку эффекта можно получить, определяя координаты и скорости в двух характерных точках проходящей через пятно траектории. В этих точках фазовая скорость принимает минимальное и максимальное значения (центральная и граничная точки соответственно). При фиксированном значении параметра центр пятна естественно определить как точку из множества центральных точек траекторий, имеющую наименьшую фазовую скорость. Если в результате бифуркации стационарное решение становится неустойчивым, то это решение, в котором соответствующая фазовая скорость всегда равна нулю и является центром пятна. Для этого случая наряду с отысканием границы пятна, соответствующей максимальной скорости, можно также определить границу, введя некоторый дополнительный масштаб скорости, сообразно с решаемой задачей.

Вместе с тем, факт существования фазового пятна не является достаточным условием проявления необычного поведения. Для этого необходимо также, чтобы состояние системы оказалось на фазовой траектории, проходящей через пятно, т.е. в области его притяжения. Поэтому существует другая важная сторона в постановке рассматриваемого класса задач. Это разработка или формулировка сценария изменения параметров и начальных условий, при которых состояние системы окажется в фазовом пятне. В общем случае проявление эффекта будет тем сильнее, чем меньше окажется расстояние от центра пятна до фазовой траектории, вдоль которой происходит движение системы.

Так например, при исследовании запаздывания потери устойчивости одним из возможных сценариев "заброса" системы в фазовое пятно является задание начальных условий в области притяжения еще не потерявшего устойчивость стационарного решения [10–13]. Чем дальше от бифуркационной ситуации выбрано начальное значение параметра, тем ближе к центру пятна будет "заброшена" система.

При разработке нового типа авторулевого для неустойчивых на прямом курсе судов стояла задача наиболее длительно удерживания неуправляемого судна в окрестности неустойчивой особой точки – седла. Поэтому сценарий заброса в фазовое пятно предусматривал снятие управления при пересечении сепаратрисы [3,18]. Практическая эффективность указанного подхода была подтверждена результатами натуральных экспериментов [5]. Аналогичный алгоритм управления оказался эффективным и для стабилизации неустойчивых симметричных вынужденных колебаний осциллятора Дуффинга [6]. В случаях, когда необычное поведение связано с потенциально аварийной ситуацией (снижение управляемости, начальная неуправляемость), рекомендуемый сценарий должен исключать прохождение траектории в малой окрестности центра фазового пятна [8].

В настоящей работе рассматривается общий подход к анализу указанных эффектов и расчету их количественных показателей на примере исследования автоколебательной системы с сухим трением (аналога маятника Фроуда) [9,19]. Наряду со случаями мгновенного и квазистационарного изменения параметра рассмотрен сцена-

---

<sup>1</sup> Основные положения проблемы были также изложены в пленарных докладах М.И. Фейгина: "Manifestation of bifurcation memory effects in a dynamic system behaviour" на конференции "UK Dynamics Days", Intern. Centre Mathematical Sciences, Edinburgh, 1998 и "Проявление эффектов бифуркационной памяти в системах, функционирующих в сопровождении опасных бифуркаций" на V междунар. конфер. "Нелинейные колебания механических систем", РАН-ННГУ, Н-Новгород, 1999.

рий, названный диагностическим. Он дополнительно предусматривает специфические возмущения координат состояния, что позволяет диагностировать степень приближения системы к бифуркационной ситуации.

**2. Постановка задачи. Бифуркации стационарных режимов.** Исследуемая динамическая система представляет твердое тело, которое прикреплено к неподвижной точке пружины и находится на горизонтальной ленте, движущаяся с постоянной скоростью [9,19]. Сила трения, возникающая между телом и бесконечной лентой, описывается полиномом пятой степени и имеет падающий участок. Будем рассматривать в качестве исходного дифференциальное уравнение для амплитуды автоколебаний, полученное в [19]. После введения новых масштабов для переменных и параметров указанное уравнение принимает следующий вид:

$$dy/dt = F(y, \lambda) = y(\lambda - 1 + 2y^2 - y^4) \quad (2.1)$$

Здесь  $y > 0$  – амплитуда автоколебаний,  $\lambda$  – параметр, зависящий от крутизны падающего участка характеристики сухого трения. Стационарные решения  $y^*$  находятся из уравнения

$$F(y^*, \lambda) = 0 \quad (2.2)$$

Они будут устойчивы, если значение частной производной

$$F'_y(y, \lambda) = \lambda - 1 + 6y^2 - 5y^4 < 0 \text{ при } y = y^* \quad (2.3)$$

Результат анализа системы (2.2), (2.3) дает следующий результат. Состояния равновесия  $y_1^* = 0$  устойчиво в интервале  $\lambda < 1$  и неустойчиво при  $\lambda > 1$ . Автоколебания с амплитудой

$$y_2^* = \sqrt{1 + \lambda^{1/2}}, \quad \lambda > 0 \quad (2.4)$$

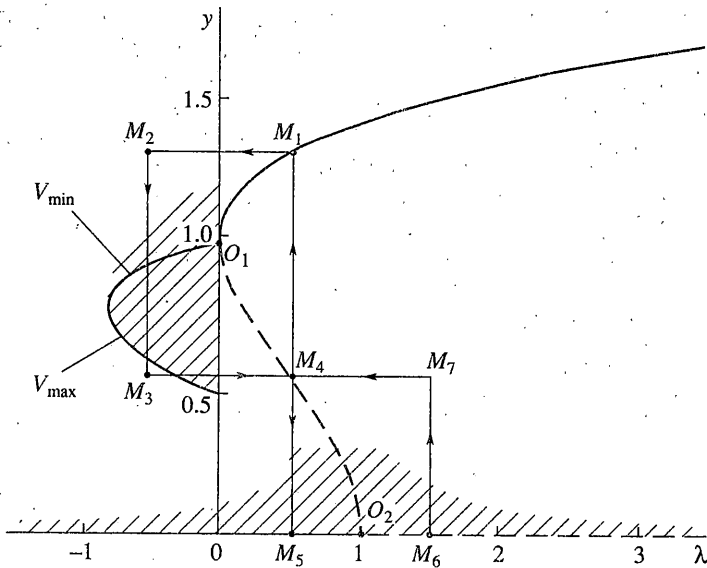
всегда устойчивы. Автоколебания с амплитудой

$$y_3^* = \sqrt{1 - \lambda^{1/2}}, \quad 0 < \lambda < 1 \quad (2.5)$$

неустойчивы. Бифуркационному значению параметра  $\lambda = 0$  соответствует слияние устойчивого и неустойчивого режимов автоколебаний. При бифуркационном значении  $\lambda = 1$  состояние равновесия с возрастанием параметра теряет устойчивость. Кривые зависимости стационарных решений от параметра представлены на фиг. 1. Устойчивые участки изображены сплошной, а неустойчивые – штриховой линиями. Бифуркационные состояния отмечены точками  $O_1$  и  $O_2$ .

**3. Построение областей фазовых пятен.** Происхождение фазовых пятен в окрестности точек бифуркации  $O(\lambda, y)$  имеет различную природу. Точка  $O_1(0,1)$  соответствует кратному корню уравнения (2.2)  $y_1^* = y_2^* = 1$ . Следовательно,  $F'_y(y^*, \lambda) = F'_y(1, 0) = 0$ , что соответствует экстремуму (минимуму) фазовой скорости  $V = |dy/dt|$ . Фазовая траектория направлена из  $O_1$  к существующей при  $\lambda = 0$  устойчивой точке  $y_1^* = 0$ . Поскольку в ней фазовая скорость также равна нулю, на рассматриваемом участке траектории должна быть точка, в которой фазовая скорость достигает максимального значения. В силу теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных значений и параметров  $V_{\min}(\lambda, y)$  и  $V_{\max}(\lambda, y)$  должны непрерывно изменяться на интервале изменения параметра  $\lambda \leq 0$ . Соответствующие кривые на плоскости  $\lambda, y$  являются геометрическим местом центральных  $F_c(\lambda)$  и нижних граничных  $y_b(\lambda)$  точек фазового пятна. Из анализа условий  $F'_y(y, \lambda) = 0$  получаем следующие уравнения

$$y_c^2(\lambda) = 0.6 + 0.2\sqrt{4 + 5\lambda}, \quad y_b^2(\lambda) = 0.6 - 0.2\sqrt{4 + 5\lambda}, \quad -0.8 \leq \lambda \leq 0$$



Фиг. 1

При  $\lambda = -0.8$  значения  $y_c^2(\lambda) = y_b^2(\lambda) = 0.6$ . Следовательно, в результате слияния граничной и центральных точек фазовое пятно исчезает. На интервале  $-0.8 \leq \lambda \leq 0$  при движении системы из начальных условий  $y > 1$  модуль фазовой скорости изменяется не монотонно, а имеет минимум и максимум в точках  $y_c(\lambda)$  и  $y_b(\lambda)$  соответственно. Верхнюю границу пятна естественно доопределить как геометрическое место точек  $y > y_c$ , в которых  $V(\lambda, y) = V(\lambda, y_b)$  или  $y(\lambda - 1 + 2y^2 - y^4) = y_b(\lambda - 1 + 2y_b^2 - y_b^4)$ ,  $-0.8 \leq \lambda \leq 0$ . Выделенная область фазового пятна в окрестности бифуркационной точки  $O_1$  приведена на фиг. 1.

Для построения области фазового пятна в окрестности бифуркационной точки  $O_2$  используем другой подход. Дело в том, что стационарное решение  $y^* = 0$  здесь не исчезает. Поэтому в центре пятна, совпадающим с особой точкой, фазовая скорость  $V(\lambda, 0)$  всегда равна нулю. По мере удаления от неустойчивой особой точки функция  $V(\lambda, y)$ ,  $\lambda = \text{const}$  возрастает. За границу фазового пятна естественно принять геометрическое место точек  $V = V_b$ , в которых скорость будет отличаться на порядок от характерной скорости рассматриваемой системы. Соответствующее фазовое пятно в окрестности  $O_2$  для случая  $V_b = 0.1$ ,  $y < 0.3$  приведено на фиг. 1. Из рисунка видно, что выделенная область быстро сужается по мере удаления параметра от точки бифуркации.

Общий вывод из построения фазовых пятен в плоскости  $\lambda, y$ : чем меньше расстояние от точек бифуркации до проходящей через пятно траектории, тем сильнее будет проявляться особенность в поведении рассматриваемой системы.

**4. Эффекты бифуркационной памяти при триггерном сценарии включения и выключения режима автоколебаний.** Пусть для нормального функционирования рассматриваемой системы требуется обеспечить включение и выключение режима автоколебаний. Выбираем для этой цели рабочее значение параметра  $\lambda_0$  в зоне неоднозначности стационарных режимов  $0 < \lambda_0 < 1$ . Значению  $\lambda_0$  соответствуют две устойчивые точки: либо  $M_1$  (автоколебания), либо  $M_5$  (состояние равновесия). Границей областей их притяжения является неустойчивый стационарный режим  $M_4$  (фиг. 1). При триггерном сценарии параметр управления достаточно быстро (мгновенно)

изменяется на величину  $\Delta\lambda = -\lambda_0 - \varepsilon$  или  $\Delta\lambda = 1 - \lambda_0 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , так чтобы система оказалась в левой или правой зонах однозначности устойчивых режимов. Включению автоколебаний отвечает  $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = 1 + \varepsilon$ , выключению  $-\lambda = -\varepsilon$ . За время  $T$  действия управляющего импульса прямоугольной формы состояние системы должно оказаться соответственно выше или ниже неустойчивой точки  $M_4$  при  $\lambda = \lambda_0$ . Тогда после снятия импульса управления будет обеспечен переход системы в нужную область притяжения, а значит и переключение режимов. Эффекты бифуркационной памяти могут иметь место во время действия управляющего импульса на участке траектории, расположенном в фазовом пятне. Следует ожидать, что с приближением этого участка к точкам бифуркации  $O_1$  или  $O_2(\varepsilon \rightarrow 0)$  необходимая длительность импульса  $T \rightarrow \infty$ .

В случае выключения автоколебаний фазовая траектория перехода от колебательного режима к состоянию равновесия состоит из четырех участков (фиг. 1). На участке  $M_1M_2$  параметр мгновенно изменяется от  $\lambda = \lambda_0$  до  $\lambda = -\varepsilon$ . Затем на участке  $M_2M_3$  в течение времени  $T$  параметр остается постоянным. На участке  $M_3M_4$  вновь происходит мгновенное изменение параметра до первоначального значения  $\lambda_0$ . В результате система окажется в области притяжения состояния покоя. Необходимая длительность  $T$  определяется временем прохождения участка между точками  $M_2$  ( $\lambda = -\varepsilon, y = y_2^*(\lambda_0)$ ) и  $M_3$  ( $\lambda = -\varepsilon, y = y_3^*(\lambda_0)$ ). Значения  $y_2^*$  и  $y_3^*$  определяются из соотношений (2.4), (2.5).

Интегрируя в пределах от  $y_2^*$  до  $y_3^*$  уравнение (2.1), переписанное в форме  $dt = [y(-1 - \varepsilon + 2y^2 - y^4)]^{-1} dy$ , получаем

$$T = \frac{1}{1+\varepsilon} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{\lambda_0}}{1-\sqrt{\lambda_0}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\lambda_0}{\varepsilon}} \right), \quad 0 < \lambda_0 < 1$$

Если  $\varepsilon \ll 1$ , то длительность участка траектории, соответствующего уменьшению амплитуды колебаний и проходящего через фазовое пятно,  $T \approx \pi/(2\sqrt{\varepsilon})$ . Следовательно, амплитуда затухающих колебаний достаточно долго будет пребывать в окрестности "умершего" предельного цикла, как это отмечено в [9].

В случае включения режима автоколебаний фазовая траектория перехода из окрестности  $y = y_0 \ll 1$  состояния покоя к автоколебаниям включает четыре участка (фиг. 1). Первый  $M_5M_6$  соответствует мгновенному изменению параметра от  $\lambda = \lambda_0$  до  $\lambda = \lambda_1 = 1 + \varepsilon$ . Затем на участке  $M_6M_7$  в течение времени  $T$  действия управляющего импульса параметр остается постоянным. Участок  $M_7M_4$  соответствует мгновенному возвращению значения параметра к исходному значению  $\lambda = \lambda_0$ . В результате состояние окажется в области притяжения устойчивого предельного цикла на заключительном участке  $M_4M_1$ . Искомая длительность  $T$  управляющего импульса определяется временем движения между точками  $M_6$  ( $\lambda = \lambda_1, y = y_0$ ) и  $M_7$  ( $\lambda = \lambda_1, y = y_3^*(\lambda_0)$ ). Описываемый сценарий, вообще говоря, можно рассматривать как частный случай задачи о запаздывании потери устойчивости. Вместе с тем, сама задача о запаздывании требует дополнительных уточнений в постановке. Дело в том, что состояние равновесия  $y = 0$  не меняется с изменением параметра. И если точка  $M_5$  расположена точно на оси абсцисс, то запаздывание окажется бесконечным. Поэтому рассматриваемый сценарий либо должен предполагать расположение системы в окрестности  $y = y_0$ ,  $0 < y_0 \ll 1$ , либо начинаться с возмущения состояния от  $y = 0$  до значения  $y = y_0$ .

Непосредственный подсчет  $T$  аналогичен предыдущему случаю

$$T = \int_{y_0}^{y_3^*} \frac{dy}{y(\lambda_1 - 1 + 2y^2 - y^4)}$$

В предположении  $y_0 \ll 1$

$$T \approx \frac{1}{4\epsilon} \left( \ln \frac{(1 - \sqrt{\lambda_0})^2 (\epsilon + 2y_0^2)}{y_0^4 (\lambda_1 - \lambda_0)} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \ln \frac{(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_0})(\sqrt{\lambda_1} + 1)}{(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_0})(\sqrt{\lambda_1} - 1 + y_0^2)} \right)$$

Если дополнительно полагать  $\epsilon \ll 1$ , то

$$T \approx \frac{1}{2\epsilon} \ln \frac{\epsilon + 2y_0^2}{2y_0^2} - \frac{1}{8} \ln(\epsilon + 2y_0^2) + \frac{1}{8} \ln \frac{4(1 - \sqrt{\lambda_0})}{1 + \sqrt{\lambda_0}}$$

Отметим, что для случая  $\epsilon \ll y_0^2$ ,  $\lambda_0 < 1 - 4y_0^2$  длительность импульса управления  $T \approx 1/(2y_0)^2$ , определяется начальной близостью системы к состоянию покоя. Следовательно, расположение и конфигурация фазового пятна оказывает существенное влияние на количественную оценку эффекта.

**5. Квазистационарный переход к автоколебаниям. Запаздывание потери устойчивости.** В рассматриваемом случае параметр  $\lambda$  в уравнении (2.1) становится медленной переменной, изменяясь согласно  $d\lambda/dt = \mu$ ,  $0 < \mu \ll 1$ , или  $\lambda = \lambda_0 + \mu t$ .

Начальное значение параметра  $\lambda_0$  выбирается в области притяжения устойчивого равновесия  $y^* = 0$  таким образом, чтобы к достижению бифуркационного значения  $\lambda = 1$  состояние системы из первоначального положения  $y_1$  оказалось в малой окрестности  $y^*$ . Пусть это будет  $y_0 \ll 1$ . Следовательно, на участке траектории в интервале  $\lambda \leq 1$ ,  $0 < t \leq (1 - \lambda_0)/\mu$  происходит "заброс" системы в малую окрестность центра фазового пятна. При дальнейшем увеличении параметра система оказывается в области  $\lambda > 1$  притяжения устойчивых автоколебаний. Однако быстрая переменная вместо срыва продемонстрирует запаздывание потери устойчивости. Для количественной оценки эффекта введем в рассмотрение время запаздывания  $T$  — интервал, за который состояние из положения  $y = y_0$  вновь достигнет исходного значения  $y = y_1$ . Поскольку наиболее значимая часть рассматриваемых процессов происходит в окрестности  $y = 0$ , пренебрежем в исходном уравнении (2.1) членами с  $y^3$  и  $y^5$ . Полученное укороченное уравнение после замены  $t = \tau + (1 - \lambda_0)/\mu$  можно представить в виде

$$dy/y = \mu \tau d\tau \quad (5.1)$$

Отсюда непосредственно следует, что в результате движения на участке "заброса" из начального состояния  $y_1$  ( $t = 0$  или  $\tau = -(1 - \lambda_0)/\mu$ ) в состояние  $y_0$  ( $t = (1 - \lambda_0)/\mu$  или  $\tau = 0$ ) искомое значение

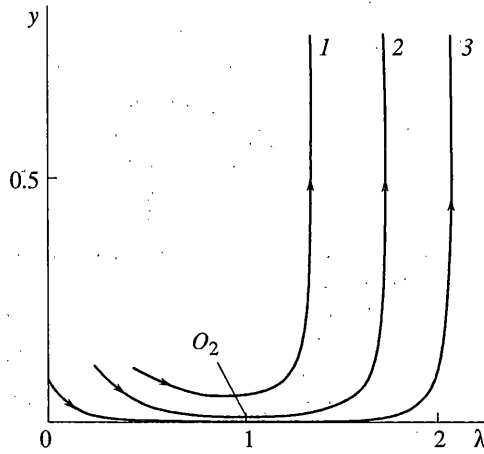
$$y_0 = y_1 e^{-(1 - \lambda_0)^2 / 2\mu} \quad (5.2)$$

Следовательно, чем дальше от бифуркационного значения выбрано  $\lambda_0$  и медленнее изменяется  $\lambda$ , тем ближе к центру фазового пятна окажется система в момент бифуркации.

Движение на втором участке определит запаздывание  $T$ , в течение которого состояние из  $y_0$  ( $\tau = 0$ ) удалится до  $y = y_1$  ( $\tau = T$ ). После подстановки указанных значений в качестве пределов интегрирования (5.1) получаем

$$T = \sqrt{\frac{2 \ln(y_1 / y_0)}{\mu}} = \frac{1 - \lambda_0}{\mu} \quad (5.3)$$

Выражение (5.2) позволяет оценить роль первого участка в проявлении эффекта запаздывания потери устойчивости. Так в случае обычного сценария динамической бифуркации значением  $y_0$  не интересуются. Подставляя в (5.3) значение  $\lambda_0 = 0$ , соответствующее запасу устойчивости на интервале времени  $t = 1/\mu$ , получаем извест-



Фиг. 2

ный [2] характер зависимости  $T \approx 1/\mu$  (кривая 3 на фиг. 2). Если же "заброс" осуществляется при начальном значении параметра, более близком к бифуркационному, то траектории запаздывания демонстрируют существенно другую зависимость от  $\lambda_0$  (кривые 1, 2 на фиг. 2).

**6. Расчет эффекта бифуркационного предчувствия.** Перейдем далее к рассмотрению эффекта бифуркационного предчувствия, проявляющегося все сильнее по мере приближения к состоянию потери устойчивости стационарным режимом. Будем полагать исходное значение  $\lambda_0 > 0$ , координату состояния  $y > 1$  в области притяжения устойчивых автоколебаний и достаточно медленное уменьшение параметра в сторону бифуркационного значения  $\lambda^* = 0$ :

$$\lambda = \lambda_0 - \mu t, \quad \lambda_0 > 0, \quad 0 < \mu \ll 1 \quad (6.1)$$

Зависимость (2.4) амплитуды автоколебаний  $y^* = \sqrt{1 + \lambda^{1/2}}$ , устанавливающихся при  $\lambda = \text{const}$  и  $t \rightarrow \infty$ , позволяет получить характер изменения крутизны предельной характеристики

$$\frac{dy^*}{d\lambda} = \frac{1}{4\sqrt{\lambda(1 + \lambda^{1/2})}}$$

Вместе с тем, в рассматриваемом случае движение системы описывается исходным дифференциальным уравнением (2.1) и зависимостью (6.1). Поэтому реальная крутизна определяется касательной к фазовой траектории на плоскости  $\lambda, y$ :

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\lambda} = \frac{F(y, \lambda)}{-\mu}$$

Количественную оценку эффекта бифуркационного предчувствия можно получить из отношения найденных выше значений крутизны

$$k = \frac{dy^*}{dy} = \frac{\mu}{4y((y^2 - 1)^2 - \lambda)\sqrt{\lambda(1 + \lambda^{1/2})}}$$

Отсюда следует, что  $k \rightarrow \infty$  при  $\lambda \rightarrow \lambda^* = 0$ .

Заметим, что при выборе начального состояния  $y \leq y^*$  фазовая траектория переходного процесса пересечет кривую стационарных решений  $y^*(\lambda)$ , для которой выпол-

няется  $F(y, \lambda) = 0$ . Однако в соответствии с (6.1), траектория уже в следующий момент окажется выше этой кривой.

**7. Диагностический сценарий исследования приближающейся бифуркации<sup>2</sup>.** В прикладном плане более важным представляется "диагностировать" приближение к бифуркационной границе, не зная ни зависимости  $y^*(\lambda)$ , ни самих дифференциальных уравнений, имея лишь возможность отслеживать естественную эволюцию системы при различных начальных условиях и значениях параметра. Предполагаем, что система как-то реагирует на приближающуюся бифуркационную ситуацию. При этом желательно получить критерий, легко проверяемый практически.

Примером соответствующего подхода может быть принципиально отличный диагностический сценарий, при котором производится мгновенное возмущение состояния на величину  $\Delta$ . В процессе дальнейшей эволюции системы определяется время  $T$ , за которое возмущение спадает в  $n$  раз или на величину  $(1-1/n)\Delta$ . Естественно ожидать, что по мере приближения к бифуркационной ситуации будет происходить замедление процесса "спада возмущения" и возрастание  $T$ .

Применим изложенную схему и рассмотрим эволюцию окрестности стационарного состояния  $y^* = 0$  системы (2.1) при медленном изменении параметра  $\lambda = \lambda_0 + \mu t$ ,  $0 < \lambda_0 < 1$ ,  $0 < \mu \ll 1$ ,  $0 < t < T$ . В области  $0 < y \ll 1$  уравнение (2.1) можно представить в виде (5.1), где  $-(1 - \lambda_0)/\mu < \tau < T - (1 - \lambda_0)/\mu$ .

Полагая пределы интегрирования (5.1) по  $y$  от  $y(0) = \Delta$  до  $y(T) = \Delta/n$  и по  $\tau$  от  $-(1 - \lambda_0)/\mu$  до  $T - (1 - \lambda_0)/\mu$ , получаем следующее уравнение относительно  $T$ :

$$\mu T^2 - 2\varepsilon T + 2 \ln n = 0, \quad \varepsilon = 1 - \lambda_0 \quad (7.1)$$

Величина  $\varepsilon$  характеризует "запас устойчивости": разность между значениями параметра  $\lambda_0$ , соответствующего диагностическому возмущению, и бифуркационным значением  $\lambda^* = 1$ . Решение (7.1) существует, если  $\varepsilon > \varepsilon_{\min} = \sqrt{2\mu \ln n}$ . Следовательно, при  $\varepsilon < \varepsilon_{\min}$  система уже не успеет выполнить "диагностическое восстановление" возмущенного состояния.

В наиболее важном случае ранней диагностики  $\varepsilon^2 \gg \varepsilon_{\min}^2$  значение  $T \approx \varepsilon_{\min}^2 / (2\varepsilon\mu)$ . Отсюда следует удобный для практического применения критерий бифуркационного прогнозирования: если с изменением параметра от  $\lambda_i$  до  $\lambda_{i+1}$  диагностический показатель увеличился в  $k$  раз ( $T_{i+1}/T_i = k$ ), то оставшийся запас устойчивости в изменении параметра составляет  $\delta\lambda = (\lambda_{i+1} - \lambda_i)/(k - 1)$ . В частности, если время восстановления возмущения возрастает вдвое, то до бифуркации пройдена половина пути.

**8. Заключение.** Эффекты бифуркационной памяти и бифуркационного предчувствия в окрестности границ устойчивости могут различно проявляться и использоваться в конкретных динамических системах. В статье применительно к автоколебательной системе с сухим трением развивается общий подход к исследованию эффектов для различных сценариев изменения параметров.

Исследование рассмотренных эффектов представляет особый интерес для систем, в процессе работы которых переходы через границы устойчивости (в прямом и обратном направлении) являются обычными штатными ситуациями. Это, например, суда и самолеты, для которых необходимость повышения маневренности сопряжена с "проектной" неустойчивостью стационарного режима движения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 00-01-00334), а также Международного центра – фонда перспективных исследований в Нижнем Новгороде (INCAS) (проект № 99-1-02).

<sup>2</sup> Рассмотрение сценария было анонсировано в докладе *Feigin M.I. and Kagan M.A. A Diagnostic Scheme for Studying an Effect of Bifurcation Augury* // Тез. докл. VI Междун. семинара "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления". М.: ИПУ. 2000. С. 119.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фейгин М.И.* К теории триггера // Памяти А.А. Андропова. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С. 300–333.
2. *Шишкова М.А.* Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высшей производной // Докл. АН СССР. 1973. 209. № 3. С. 576–579.
3. *Фейгин М.И.* К теории движения неустойчивого на прямом курсе судна // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 1. С. 66–72.
4. *Фейгин М.И., Чиркова М.М.* О существовании области пониженной управляемости для судов, неустойчивых на прямом курсе // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 73–78.
5. *Фейгин М.И., Чиркова М.М.* Динамика неустойчивых на прямом курсе судов // Судостроение. 1987. № 7. С. 23–25.
6. *Фейгин М.И.* Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994. 287 с.
7. *Фейгин М.И.* О начальной неуправляемости динамической системы // Проблемы теории колебаний. Н-Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1995. С. 184–197.
8. *Куряков Я.А., Фейгин М.И.* Исследование математической модели авторулевого с блоком обнаружения и подавления начальной неуправляемости // Моделирование и оптимизация сложных систем. Н-Новгород: Изд-е Волжск. акад. водн. трансп., 1997. Вып. 273. Ч. 1. С. 79–82.
9. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
10. *Нейштадт А.И.* Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось // Успехи мат. наук. 1985. 40. Вып. 5. С. 300–301.
11. *Нейштадт А.И.* О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. I; II // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 12. С. 2060–2067; 1988. Т. 24. № 2. С. 226–233.
12. *Baensens C.* Gevrey series and dynamic bifurcations for analytic slow-fast mappings // Nonlinearity. 1995. V. 8. № 2. P. 179–201.
13. *Neishtadt A.I., Simo C., Treschev D.V.* On stability loss delay for a periodic trajectory // Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Boston: Birkhauser, 1996. V. 19. P. 253–278.
14. *Feigin A.M., Konovalov I.V.* On the possibility of complicated dynamic behavior of atmospheric photochemical systems: Instability of the Antarctic photochemistry during the ozone hole formation // J. Geophys. Res., 1996. V. 101. № D20. P. 26023–26038.
15. *Konovalov I.V., Feigin A.M., Mukhina A.Y.* Toward understanding of the nonlinear nature of atmospheric photochemistry: multiple equilibrium states in the high-latitude lower stratospheric photochemical system // J. Geophys. Res., 1999. V. 104. № D3. P. 3669–3689.
16. *Нейштадт А.И., Сидоренко В.В.* Запаздывание потери устойчивости в системе Циглера // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 18–29.
17. *Feigin M.I.* Investigations of bifurcation memory effects in behaviour of nonlinear controlled systems // Proc. of Intern. Conf. "Control of Oscillations and Chaos". St-Peterburg, 1997. V. 3. P. 474–477.
18. *Фейгин М.И., Чиркова М.М.* Способ управления движением судна // А. с. № 1066896 СССР // Бюл. изобр. 1984. № 2. С. 77; А. с. № 1178652 СССР // Бюл. изобр. 1985. № 34. С. 63.
19. *Бутенин Н.В.* Элементы теории нелинейных колебаний Л.: Судпромгиз. 1962. 195 с.

Н. Новгород

Поступила в редакцию  
24.07.2000