МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2002

УДК 531.381

 А.В. КРУТОВ

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ НА ОСНОВЕ КЛАССИФИКАЦИИ КРИВЫХ

С помощью геометрических и кинематических представлений движения твердого тела с неподвижной точкой [1], а также на основе геометрикокинематического способа классификации кривых по сложности [2] выявлен смысл и возможность применения в теоретической механике теоремы Гаусса-Боне классической дифференциальной геометрии. На существование проблемы установления этого смысла обращено внимание в [3]. В частности, с геометрических позиций рассматривается задача определения угла поворота тела, различные варианты постановки и решений которой представлены в [1, 3] при несколько ином подходе.

Эффективность использования кинематических понятий (угловой скорости тела, например) в различных областях, в частности, в развитии положений дифференциальной геометрии с последующим их привлечением для описания движения (возвращением в кинематику), связана с тем, что многообразие положений тела, в отличие от точки, не ограничивается рамками евклидова пространства [1].

В каждой точке натурально s-параметризованной или произвольно p-параметризованной кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(p(s))$ определяется последовательность $\boldsymbol{\varepsilon}_n = (\boldsymbol{\varepsilon}_{1n}, \boldsymbol{\varepsilon}_{2n}, \boldsymbol{\varepsilon}_{3n})$ базисов, где первый индекс означает номер орта, а второй – номер базиса. Нулевым условно считается базис Френе $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ кривой. Орты других базисов, в предположении $ds/dp > 0$, определяются так

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (\boldsymbol{\varepsilon}_{10}, \boldsymbol{\varepsilon}_{20}, \boldsymbol{\varepsilon}_{30}) = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{r}'(s), \mathbf{r}''/|\mathbf{r}''|, \mathbf{r}'\times\mathbf{r}''/|\mathbf{r}''|) \tag{1}$$

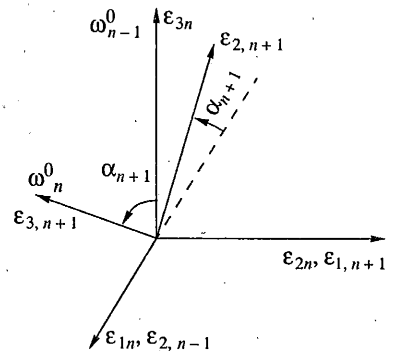
$$\begin{gathered}\boldsymbol{\varepsilon}_{1n} = \boldsymbol{\varepsilon}_{2,n-1}\\ \boldsymbol{\varepsilon}_{2n} = (d\boldsymbol{\varepsilon}_{1n}/dp)/|d\boldsymbol{\varepsilon}_{1n}/dp| = (d\boldsymbol{\varepsilon}_{2,n-1}/dp)/|d\boldsymbol{\varepsilon}_{2,n-1}/dp| \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{3n} = \boldsymbol{\varepsilon}_{1n}\times\boldsymbol{\varepsilon}_{2n} = (\boldsymbol{\varepsilon}_{1n}\times d\boldsymbol{\varepsilon}_{1n}/dp)/|d\boldsymbol{\varepsilon}_{1n}/dp| = (\boldsymbol{\varepsilon}_{2,n-1}\times d\boldsymbol{\varepsilon}_{2,n-1}/dp)/|d\boldsymbol{\varepsilon}_{2,n-1}/dp|\end{gathered} \tag{2}$$

Или в матричной форме

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{\nu}} = A_{n,n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_n = (\boldsymbol{\varepsilon}_{1n}, \boldsymbol{\varepsilon}_{2n}, \boldsymbol{\varepsilon}_{3n})$$

$$A_{nn-1} = \begin{Vmatrix} 0 & -\cos\alpha_n & \sin\alpha_n \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\alpha_n & \cos\alpha_n \end{Vmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\cos\alpha_n = (\boldsymbol{\varepsilon}_{3,n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{3n}) = (\boldsymbol{\varepsilon}_{2,n-2}\times\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0_{2,n-2})(\boldsymbol{\varepsilon}_{2,n-1}\times\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0_{2,n-1})\\ \sin\alpha_n = (\boldsymbol{\varepsilon}_{3,n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{3n}\boldsymbol{\varepsilon}_{2,n-1}) = ((\boldsymbol{\varepsilon}_{2,n-2}\times\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0_{2,n-2})(\boldsymbol{\varepsilon}_{2,n-1}\times\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0_{2,n-1})\boldsymbol{\varepsilon}_{2,n-1})\\ \alpha_n = 2\,\mathrm{arctg}\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_{3,n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{3n}\boldsymbol{\varepsilon}_{2,n-1})}{1+(\boldsymbol{\varepsilon}_{3n}\boldsymbol{\varepsilon}_{3,n-1})}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0_{2i} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{2i}/|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{2i}| = (d\boldsymbol{\varepsilon}_{2i}/dp)/|d\boldsymbol{\varepsilon}_{2i}/dp|\end{gathered} \tag{4}$$



Закономерность, на основе которой строится эта последовательность, такова. Первым ортом следующего базиса берется второй орт предыдущего, вторым – орт производной по дуге данной кривой от первого, а третьим – векторное произведение первых двух.

Кинематический смысл этой закономерности в том, что третий орт есть нормированная угловая скорость первого орта своего, данного базиса, или нормированная угловая скорость второго орта или всего самого предыдущего базиса.

Фактически, каждый последующий n-й базис получается из предыдущего (n – 1)-го переименованием второго повторяющегося орта в первый, что равнозначно повороту на $\pi/2$ предыдущего базиса вокруг третьего его орта, и последующим поворотом получившегося базиса на угол α_n вокруг второго орта предыдущего или же вокруг первого орта последующего. При этом угол α_n определяется по (4) (фигура).

Оказывается также, что каждый последующий базис последовательности, построенной таким образом, является базисом Френе эвольвенты и индикатрисы касательных той кривой, базисом Френе которой является предыдущий базис (эволюты и индикаты) [2, 4, 5].

Среди кривых, для которых базисом Френе является предыдущий базис по отношению к базису Френе индикатрисы касательных данной кривой, находится, во-первых, сама эта данная кривая (индиката), а во-вторых, некоторая сферическая кривая, которую называем сферической индикатой по отношению к сферической индикатрисе данной кривой. Индикатрисы и индикаты могут быть многократными.

Приведенный алгоритм построения базисов допускает его формальное обобщение на базисы с целыми номерами [2], чем для удобства изложения воспользуемся в дальнейшем.

Применим эту последовательность базисов к анализу движения твердого тела с неподвижной точкой. В частности, рассмотрим теорему [1, 3], которая гласит, что полный угол, на который поворачивается тело с неподвижной точкой относительно своего исходного положения около вектора $\boldsymbol{\xi} \perp \boldsymbol{\omega}$, жестко связанного с телом, когда конец этого вектора описывает замкнутый контур-траекторию, равен телесному углу, охватываемому этим контуром.

Пусть, как в условиях этой теоремы, конец второго орта – 2-го базиса (или первого орта – 1-го базиса, орта $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varepsilon}_{2,-2} = \boldsymbol{\varepsilon}_{1,-1}$) описывает некоторую кривую-траекторию. Далее видно, что этот – 2-й базис можно считать сопутствующим для тела с неподвижной точкой, конец единичного отрезка которого (перпендикулярного угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела и определяемого вектором $\boldsymbol{\xi}$, проведенным из неподвижной точки) описывает данную кривую-траекторию. Рассмотрим характеристики этой траектории.

Из формулы Эйлера для скоростей точек тела получим, если принять во внимание существование зависимости дуги s траектории от времени

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\xi} = -(\varphi^0 \times \boldsymbol{\tau}), \quad \mathbf{r}'(s) = -\dot{\boldsymbol{\omega}}^0 \times \boldsymbol{\tau} - k\boldsymbol{\omega}^0 \times \boldsymbol{\nu}, \quad (\boldsymbol{\omega}^0 \boldsymbol{\tau}) = 0$$

$$\boldsymbol{\nu} = \rho\boldsymbol{\omega}^0 \times \boldsymbol{\tau} + (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\omega}^0)\boldsymbol{\omega}^0$$

Обозначив $(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\omega}^0) = \sin \alpha_0$, получим для радиуса кривизны траектории $\rho = k^{-1} = \cos \alpha_0$. Отсюда следует, что базис Френе траектории расположен и является по отношению к правому базису $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\omega}^0)$ нулевым базисом, а сам этот базис $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\omega}^0)$ – 1-м базисом последовательности базисов для траектории, т.е. базисом Френе – 1-й индикатрисы касательных траектории (или 1-й индикаты ее индикатрисы касательных) $(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\omega}^0) = (\boldsymbol{\varepsilon}_{1,-1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{2,-1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{3,-1}) = (\boldsymbol{\tau}_{-1}, \boldsymbol{\nu}_{-1}, \boldsymbol{\beta}_{-1})$. При этом считаем заданными первый $\boldsymbol{\xi}$

и третий $\boldsymbol{\omega}^0$ орты этого базиса; второй, дополняющий тройку до правой, однозначно определяется первым и третьим: $\boldsymbol{\varepsilon}_{2,-1} = \boldsymbol{\omega}^0 \times \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\tau}$.

Вектор $\boldsymbol{\omega}^0$ есть орт угловой скорости – 2-го базиса ($\boldsymbol{\varepsilon}_{1,-2}$; $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{3,-2}$) который можно считать теперь сопутствующим для тела; угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ тела есть угловая скорость этого – 2-го базиса, как базиса Френе – 2-й индикатрисы траектории (2-й сферической индикаты 1-й индикатрисы касательных траектории), а $\boldsymbol{\xi}$ – второй орт сопутствующего базиса тела есть также орт главной нормали этой – 2-й индикатрисы.

Отметим, что вообще, в качестве параллельно геодезически переносимого вдоль данной кривой на поверхности могут быть взяты различные векторы (или векторное поле), обладающие определенным свойством: эти векторы должны существовать во всех точках данной обходимой при переносе кривой на поверхности и лежать при этом в касательной плоскости в соответствующих точках поверхности. Необходимым и достаточным условием того, чтобы вектор был параллельно переносимым, является коллинеарность нормали поверхности дифференциала этого вектора [6]. В данном случае вектор $\boldsymbol{\xi}$, ортогональный $\boldsymbol{\omega}$, направлен по нормали к сфере с центром в неподвижной точке и, следовательно, вектор, производной (возможно нормированной) которого он является, может быть параллельно переносимым по сфере вдоль замкнутой кривой-контура, описываемого концом вектора $\boldsymbol{\xi}$. Одним из таких векторов в соответствии со свойствами ортов последовательных базисов кривой-контура является вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_{1,-2}$. Этот вектор есть первый орт – 2-го базиса последовательности по отношению к базису Френе траектории (орт касательной 2-й эволюты траектории или второй сферической индикаты индикатрисы ее касательных); он же является одним из ортов сопутствующего базиса тела при соответствующем выборе такового, или, по крайней мере, совпадает с последним в рассматриваемом положении; вторым ортом сопутствующего базиса тела является вектор $\boldsymbol{\xi}$, он же – орт главной нормали – 2-й индикатрисы касательных траектории (или второй ее эволюты).

Таким образом, геодезически параллельно переносимый вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_{1,-2}$ является ортом касательной – 2-й эвольвенты или второй эволюты или 2-й сферической индикаты первой индикатрисы касательных траектории конца отрезка $\boldsymbol{\xi}$ твердого тела, ортогонального его угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

Данная структура ортов сопутствующего базиса, очевидно, является необходимым и достаточным условием того, чтобы орт $\boldsymbol{\xi}$ этого базиса постоянно был ортогонален вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела.

При параллельном геодезическом перенесении вектора по поверхности вдоль замкнутой кривой этот вектор повернется в касательной плоскости так, что его угол с касательной контура получит некоторое приращение $\Delta\psi = -\oint k_g ds$. В этом один из смыслов параллельного перенесения, а также интегральной геодезической кривизны. Еще один смысл в том, что полный поворот вектора в касательной плоскости при параллельном перенесении по поверхности вдоль замкнутого контура оказывается равным полной интегральной кривизне куска поверхности, охватываемого этим контуром, или соответствующему телесному углу Θ на гауссовой изображающей единичной сфере, вырезаемому ортом нормали данной поверхности [6], [7]:

$$\Delta\varphi = \Theta = S_g = \iint\limits_{(D)} K\sqrt{EG - F^2}\,du dv = \iint\limits_{(D)} K dS, \quad dS_g = K dS \tag{5}$$

При этом под полным геодезическим поворотом вектора понимается поворот относительно его исходного положения.

Термин "геодезическое параллельное перенесение" был введен Леви-Чевита в связи с аналогией с буквальным параллельным перенесением вектора в случае плоской кривой, когда полный угол, на который повернется касательная относительно параллельно перенесенного своего исходного положения, равен интегралу от кривизны кривой.

Угол $\Delta\vartheta = 2\pi$ полного геодезического поворота касательной замкнутого контура представим в виде суммы переносного геодезического поворота $\Delta\varphi$ параллельно переносимого вектора и поворота $-\Delta\psi$ касательной относительно этого вектора $\Delta\vartheta = \Delta\varphi - \Delta\psi$. В результате будем иметь

$$\iint\limits_{(D)} KdS + \oint\limits_{(l)} k_g ds = 2\pi$$

Для контура, содержащего элементы криволинейного многоугольника, в левой части добавляется сумма внешних углов многоугольника, что дает теорему Гаусса – Боне

$$\iint\limits_{(D)} KdS + \oint\limits_{(l)} k_g ds + \Sigma\vartheta_i = 2\pi \qquad (6)$$

Как отмечалось выше, куску F поверхности с положительной гауссовой кривизной K, ограниченного замкнутой кривой l с конечным числом угловых точек и с геодезической кривизной k_g можно поставить в соответствие площадь области на изображающей единичной гауссовой сфере, равную телесному углу Θ, вырезаемому ортом нормали данной поверхности на гауссовой сфере и полной гауссовой кривизне $\iint KdS$ данной поверхности.

В случае, когда кривая l лежит на сфере радиуса R, величина

$$2\pi - \int\limits_{(l)} k_g ds - \Sigma\vartheta_i$$

как и всегда, по (5), (6) равна телесному углу, площади S_g области на единичной гауссовой сфере или телесному углу на данной сфере радиуса R. Действительно, в этом случае $K = 1/R^2$, и мы получаем для этой величины, принимая u и v за широту и долготу и совмещая центры гауссовой и данной сфер

$$2\pi - \oint\limits_{(l)} k_g ds - \Sigma\vartheta_i = \iint\limits_{(D)} KdS = \Theta = S_g = \iint\limits_{(D)} \sqrt{EG - F^2}\,dudv = (1/R^2)\iint\limits_{(D)} \sqrt{EG - F^2}\,dudv =$$

$$= (1/R^2)R^2 \iint\limits_{(D)} |\cos v|\,dudv = (1/R^2)S_{sp} \qquad (7)$$

Если же на поверхности имеется кусок незамкнутой кривой, то его можно мысленно замкнуть одной или несколькими дугами геодезических на этой поверхности, и тогда также будет иметь место формула Гаусса – Боне в той же форме (6), но с добавлением к $\Sigma\vartheta_i$, суммы соответствующих внешних углов.

Таким образом, в общем случае кривой на поверхности можно поставить в соответствие телесный угол на сфере приведенного радиуса R, вычисляемого из формулы

$$R^2 = \iint\limits_{(D)} K\sqrt{EG - F^2}\,dudv \,/ (2\pi - \oint\limits_{(l)} k_g ds - \Sigma\vartheta_i)$$

Примем во внимание, что в случае теоремы о телесном угле вектор ξ направлен по нормали к поверхности (к сфере). Тогда, сравнивая утверждение теоремы с (5), приходим с учетом (7) к выводу, что телесный угол и угол поворота тела в теореме есть также полный угол поворота вектора $\varepsilon_{1,-2}$, параллельно переносимого в касательной плоскости сферы вдоль кривой-траектории, описываемой концом вектора ξ, ортогонального угловой скорости тела с неподвижной точкой. Этот телесный угол и соответственно угол поворота тела в данном случае его движения около неподвижной точки вычисляется по формуле (7).

Ранее было введено простое понятие вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \times \mathbf{u}'/\mathbf{u}^2$ переменного вектора $\mathbf{u}(p)$, как одной составляющей угловой скорости подвижной системы координат, вращающейся вместе с этим вектором относительно основной неподвижной системы, получающейся путем отбрасывания другой составляющей угловой скорости системы, коллинеарной этому вектору[1]. Затем было показано, что, если какой-нибудь неизменный по направлению в сопутствующей системе координат вектор остается ортогональным вектору угловой скорости этой системы, то угловая скорость вектора и системы совпадают. Так, например, угловая скорость орта главной нормали кривой совпадает с вектором Дарбу угловой скорости репера Френе этой кривой. Исходя из этих соображений, делаем вывод, что угловая скорость вектора $\boldsymbol{\xi}$ совпадает с угловой скоростью тела, а угловая скорость параллельно переносимого вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_{1,-2} = \boldsymbol{\varepsilon}_{2,-3}$ равна угловой скорости минус третьего базиса, являющегося базисом Френе третьей эволюты кривой-траектории. При этом имеем связь вектора угловой скорости тела $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{-2}$, параллельно переносимого вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_{1,-2}$, вектора $\boldsymbol{\xi}$ и их производных по дуге кривой-траектории

$$\boldsymbol{\omega}_{-2} = \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{-3} + \alpha'_{-2}\boldsymbol{\varepsilon}_{2,-3} = \boldsymbol{\omega}_{-3} + \alpha'_{-2}\boldsymbol{\varepsilon}_{1,-2} = \boldsymbol{\varepsilon}_{1,-2}\times\boldsymbol{\varepsilon}'_{1,-2} + \alpha'_{-2}\boldsymbol{\varepsilon}_{1,-2} = \boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\xi}' \tag{8}$$

где α_{-2} – угол, составляемый третьим ортом минус второго базиса (вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_{-3}$ минус третьего базиса) и третьим ортом минус третьего базиса; $\alpha'_{-2}(s)$ – проекция на параллельно переносимый вектор угловой скорости минус второго базиса (тела) относительно минус третьего.

Заметим, что коническим аксоидом тела в данном случае движения около неподвижной точки будет являться индикатриса бинормалей – 1-й индикатрисы касательных, так как третий орт последующего базиса есть нормированная угловая скорость предыдущего, т.е. 2-го.

Главная кривизна K_{N0} конуса, направляющей которого является траектория конца единичного отрезка тела, перпендикулярного его угловой скорости, с точностью до знака и размерности равна коническому радиусу кривизны аксоида-конуса, описываемого вектором угловой скорости тела. Это указывает на тесную взаимосвязь этих конусов и позволяет определять один из них, если другой найден. При этом важным обстоятельством является то, что траектория, как направляющая одного конуса, имеет меньший ранг, чем направляющая другого конуса – аксоида, и следовательно, ее уравнения проще [5]. При их получении с помощью алгоритма интегрирования, включающего ряд последовательных квадратур, нужно будет сделать меньшее число шагов.

Следует отметить, что рассмотренная задача является примером того, как результаты кинематического подхода в теории кривых возвращаются в механику и находят применение в задачах движения твердого тела, в частности, они могут быть использованы в робототехнике, а также в задачах автоматического регулирования [8, 9].

Автор выражает глубокую признательность Журавлеву В.Ф. за постановку проблемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Наука. Физматлит, 1997. 320 с.
2. *Крутов А.В.* Классификация и уравнения кривых // Вестн. ВГУ. Сер. 2. Естеств. науки. 1996. № 2. С. 210–217.
3. *Журавлев В.Ф.* Теорема о телесном угле в динамике твердого тела // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 323–326.
4. *Крутов А.В.* Некоторые понятия и соотношения кинематической геометрии // Beiträge zur Algebra und Geometrie. 1990. Bd. 31. S. 87–102.
5. *Крутов А.В.* Последовательность базисов кривой и ее применение: геометрико-кинематиче-

[1] *Крутов А.В.* О построении аппроксимирующих кривых/Воронеж: Воронеж. ун-т, 1992. 23 с. Деп. в ВИНИТИ 25.03.92, № 1025 – В92.

ская модель // Математическое моделирование информационных и технологических систем: Сб. науч. тр. Воронеж. гос. технол. акад. 2000. Вып. 4. С. 31–38.
6. *Норден А.П.* Краткий курс дифференциальной геометрии. М.: Физматгиз, 1958. 244 с.
7. *Struik Dirk J.* Lectures on classical Differential Geometry. New York: Dover, 1988, 240 p.
8. *Крутов В.И.* Автоматическое регулирование и управление двигателей внутреннего сгорания. М.: Машиностроение, 1989. 415 с.
9. *Крутов В.И.* Электронные системы регулирования и управления двигателями внутреннего сгорания. М.: Изд-во МГТУ, 1991. 135 с.

Воронеж

Поступила в редакцию
18.06.2001