МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2002

УДК 531.391

© 2002 г. В.Ф. ЧУБ

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ

Определяется гиперкомплексная числовая система ("обобщенные кватернионы"), обобщающая понятия бикватернионов Гамильтона и Клиффорда. Исследованы характерные свойства чисел этой системы и представление с их помощью переносов в пространстве и во времени, поворотов и бустов. Особое внимание уделено групповым свойствам преобразований пространства-времени. На основе развитого формализма выведены релятивистские уравнения инерциальной навигации в свободном от гравитационного поля пространстве.

1. Обобщенные кватернионы. Рассмотрим некоторые гиперкомплексные числовые системы (определения см., например, в [1, с. 31–35], [2, с. 1008]).

1.1. Кватернионы и бикватернионы. Обычный кватернион записывают в виде четырехкомпонентного гиперкомплексного числа с вещественной скалярной единицей 1 и тремя мнимыми векторными ортами **i**, **j**, **k**: $\Lambda = \lambda_0 + \lambda_{xi}\mathbf{i} + \lambda_{yi}\mathbf{j} + \lambda_{zi}\mathbf{k}$; его можно представить также в виде суммы вещественного скаляра и мнимого вектора: $\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}_i i$, где $\boldsymbol{\lambda}_i = \lambda_{xi}\mathbf{e}_x + \lambda_{yi}\mathbf{e}_y + \lambda_{zi}\mathbf{e}_z$ – вещественный вектор; $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ – векторные вещественные орты; i – обычная скалярная мнимая единица (независимая от векторного орта **i**).

Кватернионы (специального вида – нормированные) используются для представления группы вращений (трехмерного) пространства [3, с. 7–10, 41–57].

Кватернионы с комплексными коэффициентами называют бикватернионами Гамильтона [4, с. 224], [5, с. 163]. Бикватернионы Гамильтона (нормированные) используются для представления группы Лоренца, т.е. группы вращений пространства – времени [6, с. 103–105], [7, с. 391–403].

Кватернионы с дуальными коэффициентами называют бикватернионами Клиффорда и используют для описания группы движений пространства, включающей повороты и параллельные переносы [8, с. 124–134], [9, с. 65–106].

В теории бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) приходится иметь дело с системами координат, которые связаны между собой: параллельным переносом (переносом начала отсчета); относительной скоростью движения; пространственным поворотом базиса. Для того, чтобы преобразование общего вида, составленное из трех перечисленных выше элементарных преобразований, описать одним числом, нам потребуется ввести новый вид гиперкомплексного числа, обобщающего понятия бикватернионов Гамильтона и Клиффорда.

1.2. Обобщенные скаляры. Рассмотрим гиперкомплексные числа следующего вида: $\Lambda = \lambda_0 + \lambda_{0i}i + \lambda_{0\varepsilon}\varepsilon + \lambda_{0\varepsilon i}\varepsilon i$, где i – скалярная мнимая единица, ε – множитель Клиффорда (скалярная дуальная единица) [10, с. 31]. Этими числами можно пользоваться как комплексными числами с дуальными коэффициентами или как дуальными числами с комплексными коэффициентами [8, с. 84], [10, с. 26]. Устоявшегося названия для них нет.

1.3. Обобщенные кватернионы. Введем теперь гиперкомплексную систему, состоящую из кватернионов, коэффициентами которых являются обобщенные скаляры. Напишем выражение для обобщенного кватерниона в развернутом виде:

$$\Lambda = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda} + \lambda_{0i} i + \boldsymbol{\lambda}_i i + \lambda_{0\varepsilon}\varepsilon + \boldsymbol{\lambda}_\varepsilon \varepsilon + \lambda_{0\varepsilon i}\varepsilon i + \boldsymbol{\lambda}_{\varepsilon i}\varepsilon i = \lambda_0 + \lambda_x \mathbf{e}_x + \lambda_y \mathbf{e}_y + \lambda_z \mathbf{e}_z +$$

$$+ \lambda_{0i} i + \lambda_{xi}\mathbf{i} + \lambda_{yi}\mathbf{j} + \lambda_{zi}\mathbf{k} + \lambda_{0\varepsilon}\varepsilon + \lambda_{x\varepsilon}\varepsilon\mathbf{e}_x + \lambda_{y\varepsilon}\varepsilon\mathbf{e}_y + \lambda_{z\varepsilon}\varepsilon\mathbf{e}_z +$$

$$+ \lambda_{0\varepsilon i}\varepsilon i + \lambda_{x\varepsilon i}\varepsilon\mathbf{i} + \lambda_{y\varepsilon i}\varepsilon\mathbf{j} + \lambda_{z\varepsilon i}\varepsilon\mathbf{k}$$

Таблица умножения определяется[1] следующими соотношениями между известными гиперкомплексными единицами (ортами): $1^2 = 1$, $\varepsilon^2 = 0$, $i^2 = \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$, $\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}$, $\mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}$, $\mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}$ (с учетом $\mathbf{e}_x = -i\mathbf{i}$, $\mathbf{e}_y = -i\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_z = -i\mathbf{k}$).

Соответствующей перекомпоновкой (с изменением знака при необходимости) можно представить обобщенный кватернион: в виде бикватерниона Клиффорда с комплексными коэффициентами; в виде бикватерниона Гамильтона с дуальными коэффициентами; в виде обобщенного скаляра с коэффициентами – кватернионами; в виде дуального числа с коэффициентами – бикватернионами Гамильтона (главная и моментная части обобщенного кватерниона); в виде комплексного числа с коэффициентами – бикватернионами Клиффорда; в виде комплексного числа, компонентами которого являются вещественная и мнимая части обобщенного кватерниона; в виде суммы обобщенного скаляра и обобщенного вектора (скалярная и векторная части обобщенного кватерниона).

Обобщенные (комплексно-дуальные) кватернионы образуют ассоциативное кольцо.

1.4. Экспоненциальное представление обобщенных кватернионов. Введем на множестве обобщенных кватернионов некоторые функции, которые понадобятся далее для представления преобразований.

Согласно стандартному определению экспоненциальной функции в виде ряда

$$\Lambda = \exp\Phi = e^{\Phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi^n}{n!}$$

где Λ и Φ – числа, в данном случае обобщенные кватернионы. С экспонентой связаны тригонометрические и гиперболические функции. Если $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_x\mathbf{e}_x + \varphi_y\mathbf{e}_y + \varphi_z\mathbf{e}_z$ вещественный вектор, а $\varphi = |\boldsymbol{\varphi}| = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}$ его модуль (вещественный скаляр), то:

$$e^{\boldsymbol{\varphi}} = \operatorname{ch}\boldsymbol{\varphi} + \operatorname{sh}\boldsymbol{\varphi} = \operatorname{ch}\varphi + (\boldsymbol{\varphi}/\varphi)\operatorname{sh}\varphi, \qquad e^{\varepsilon\boldsymbol{\varphi}} = 1 + \varepsilon\boldsymbol{\varphi}$$

$$e^{i\boldsymbol{\varphi}} = \cos\boldsymbol{\varphi} + i\sin\boldsymbol{\varphi} = \cos\varphi + i(\boldsymbol{\varphi}/\varphi)\sin\varphi, \qquad e^{\varepsilon i\boldsymbol{\varphi}} = 1 + \varepsilon i\boldsymbol{\varphi}$$

Для обобщенного кватерниона Λ определим комплексно-сопряженный с ним

$$\overline{\Lambda} = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda} - \lambda_{0i} i - \boldsymbol{\lambda}_i i + \lambda_{0\varepsilon}\varepsilon + \boldsymbol{\lambda}_\varepsilon\varepsilon - \lambda_{0\varepsilon i}\varepsilon i - \boldsymbol{\lambda}_{\varepsilon i}\varepsilon i$$

и векторно-сопряженный

$$\tilde{\Lambda} = \lambda_0 - \boldsymbol{\lambda} + \lambda_{0i} i - \boldsymbol{\lambda}_i i + \lambda_{0\varepsilon}\varepsilon - \boldsymbol{\lambda}_\varepsilon\varepsilon + \lambda_{0\varepsilon i}\varepsilon i - \boldsymbol{\lambda}_{\varepsilon i}\varepsilon i$$

Согласно таблице умножения обобщенных кватернионов $\Lambda \circ \tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda = \Lambda\tilde{\Lambda}$ – обобщенный скаляр. Здесь и далее знак кватернионного умножения ($\circ$) будет опускаться только в том случае, если сомножители можно переставить местами (коммутативно, например, умножение обобщенного кватерниона на обобщенный скаляр). Если главная часть указанного выше скаляра не равна нулю, то для Λ определено обратное число: $\Lambda^{-1} = \tilde{\Lambda}/(\Lambda\tilde{\Lambda}) = \tilde{\Lambda}(\Lambda\tilde{\Lambda})^{-1}$, так что $\Lambda \circ \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \circ \Lambda = 1$.

---

[1] Конечно, при условии, что скалярные единицы коммутируют с любыми другими.

Из свойств умножения обобщенных кватернионов вытекают следующие полезные соотношения для произвольных Λ, Φ и Ψ:

$$\overline{\overline{\Lambda}} = \tilde{\tilde{\Lambda}} = \Lambda, \quad \overline{\tilde{\Lambda}} = \tilde{\overline{\Lambda}}$$

$$\overline{\Lambda^{-1}} = (\overline{\Lambda})^{-1} \text{ (если } \Lambda^{-1} \text{ определено)}$$

$$(\Lambda \circ \Phi)^{-1} = \Phi^{-1} \circ \Lambda^{-1} \text{ (если } \Lambda^{-1} \text{ и } \Phi^{-1} \text{ определены)}$$

$$\overline{\Lambda \circ \Phi} = \overline{\Phi} \circ \overline{\Lambda}, \quad \Lambda \circ \overline{\Lambda} = \overline{\Lambda \circ \overline{\Lambda}}$$

$$\Lambda \tilde{\circ} \Phi = \tilde{\Phi} \circ \tilde{\Lambda}, \quad \exp\tilde{\ } \Phi = \exp \tilde{\Phi}$$

$$\overline{\exp \Phi} = \exp \overline{\Phi}, \quad (\exp \Phi)^{-1} = \exp(-\Phi), \quad (\exp \Phi)^2 = \exp(2\Phi)$$

$$\Lambda \circ (\Phi \circ \Psi) = (\Lambda \circ \Phi) \circ \Psi \text{ (ассоциативность умножения)}$$

$$(\Lambda \circ \Phi)(\Lambda \tilde{\circ} \Phi) = (\Lambda \tilde{\Lambda})(\Phi \tilde{\Phi}) = (\Phi \circ \Lambda)(\Phi \tilde{\circ} \Lambda)$$

Однако в общем случае:

$$\Lambda \circ \Phi \neq \Phi \circ \Lambda \text{ (некоммутативность умножения)}$$

$$\Lambda \circ \overline{\Lambda} \neq \overline{\Lambda} \circ \Lambda, \quad \exp \Phi \circ \exp \Psi \neq \exp(\Phi + \Psi)$$

из $\Lambda \circ \Phi = \Lambda \circ \Psi$ не следует, что $\Phi = \Psi$

2. Операторы преобразований. Введем в пространстве–времени галилеевы (инерциальные с ортонормированными базисами) системы отсчета, которые будем обозначать заглавными латинскими буквами I, E, J, K, I', I'' и т.д. Масштабы при измерении расстояний и времени согласуем так, чтобы скорость света (в вакууме) равнялась единице. В работе используются только такие системы отсчета.

Далее (до *п. 2.5*) будем использовать геометрические объекты[2] только двух типов (а в третьем разделе – только одного): объекты векторного типа (т.е. "векторы" R; не путать с алгебраическими векторами – частью гиперкомплексного числа); операторы преобразований (операторы перехода от одной системы отсчета к другой Λ^{JK}, т.е. "операторы").

Роль наблюдаемых величин играют не сами геометрические объекты, а проекции (отображения) геометрических объектов на какую-либо систему отсчета, поскольку измерение всегда производится в некоторой системе отсчета. Проекции геометрических объектов (= физические величины[3]) будем обычно обозначать тем же символом, но с нижним индексом, указывающим систему отсчета. Физическим величинам (как проекциям векторов, так и проекциям операторов – преобразованиям) сопоставим обобщенные кватернионы.

Так, оператору перехода от системы J к K в системе отсчета I соответствует обобщенный кватернион специального вида, который обозначим Λ_I^{JK}.

Например, тождественному преобразованию, которое переводит систему J в себя, соответствует обобщенный кватернион, равный единице $\Lambda_I^{JJ} = 1$. Тождественное преобразование переводит в себя не только систему J, но также любую другую систему отсчета: $\Lambda_I^{JJ} = \Lambda_I^{KK} = \Lambda_I^{II}$. Оператор, который в одной системе отсчета выглядит как тождественное преобразование, так же выглядит и в других системах отсчета $\Lambda_I^{JJ} = \Lambda_K^{JJ} = \Lambda_J^{JJ}$.

[2] Интерпретируемые как соответствующие физические объекты.

[3] Если теорию изначально строить как геометрическую, без физической интерпретации, то проекции геометрических объектов следует называть геометрическими величинами.

Геометрические объекты характеризуются прежде всего законом преобразования (перепроектирования) при смене системы отсчета. При записи законов преобразования (и при выводе уравнений движения – см. [3, с. 67, 73–75]) важную роль играют проекции операторов на ту систему отсчета, которую они преобразуют (собственные проекции). Введем для собственных проекций специальное обозначение: $\Lambda_{IE} = \Lambda_I^{IE}$ (равенство по определению). Собственные проекции операторов инвариантны (в смысле строгого равенства) при переходе от преобразуемой (этим оператором) системы отсчета к преобразованной: $\Lambda_E^{IE} = \Lambda_I^{IE} = \Lambda_{IE}$.

Для рассматриваемых операторов преобразований (Λ^{JK}) всегда существуют обратные, соответствующие обратному переходу (от K к J).

Очевидно $(\Lambda_I^{JK})^{-1} = \Lambda_I^{KJ}$, $\Lambda_I^{JK}\Lambda_I^{KJ} = \Lambda_I^{JJ} = \Lambda_I^{KK} = 1$; в частности, $\Lambda_{IE}^{-1} = \Lambda_{EI}$, $\Lambda_{IE}\Lambda_{EI} = \Lambda_{II} = \Lambda_{EE} = 1$.

Закон перепроектирования объектов векторного типа в общем случае имеет вид

$$\mathrm{R}_E = \Lambda_{IE}^{-1} \circ \mathrm{R}_I \circ \overline{\Lambda_{IE}^{-1}}$$

в *п. 2.1–2.3* проверяется его справедливость в важных частных случаях[4].

Закон перепроектирования операторов преобразований в общем случае имеет вид

$$\Lambda_E^{JK} = \Lambda_{IE}^{-1} \circ \Lambda_I^{JK} \circ \Lambda_{IE}$$

в *п. 2.4* он используется для исследования групповых свойств преобразований и, тем самым, подтверждается для ряда частных случаев[5].

2.1. Перенос. Пусть преобразование (физическая величина) имеет вид:

$$\Lambda_I^{JK} = \exp\left(\varepsilon i \frac{\tau + \boldsymbol{\rho}}{2}\right) = 1 + \varepsilon i \frac{\tau}{2} + \varepsilon i \frac{\boldsymbol{\rho}}{2} = \exp\left(\varepsilon i \frac{\tau}{2}\right) \exp\left(\varepsilon i \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right)$$

$$\tau + \boldsymbol{\rho} = \tau + \rho_x \mathbf{e}_x + \rho_y \mathbf{e}_y + \rho_z \mathbf{e}_z$$

где $\tau + \boldsymbol{\rho}$ – вещественный четырехмерный вектор (далее "4-вектор"); τ, ρ_x, ρ_y, ρ_z – компоненты 4-вектора (в алгебраическом смысле).

Покажем, что такое преобразование следует интерпретировать как параллельный перенос (сдвиг, трансляцию) во времени (на τ – скалярное преобразование exp $(\varepsilon i\tau/2)$) и в пространстве (на $\boldsymbol{\rho}$ – векторное преобразование exp $(\varepsilon i\boldsymbol{\rho}/2)$), задаваемый в системе отсчета I четырехмерным вектором $\tau + \boldsymbol{\rho}$, и переводящий систему J в K.

Очевидно, что всегда можно найти такую систему E, в которую переходит I. Система отсчета E, в которую переходит базовая система отсчета I, однозначно характеризует преобразование, и потому можно ограничиться интерпретацией только собственной проекции $\Lambda_{IE} = \Lambda_I^{JK}$.

Рассмотрим некоторый 4-вектор R (как самостоятельный геометрический объект). В системе отсчета I ему соответствует обобщенный кватернион $\mathrm{R}_I = t_I + \mathbf{r}_I = t_I + r_{xI}\mathbf{e}_x + r_{yI}\mathbf{e}_y + r_{zI}\mathbf{e}_z$, составленный из проекций 4-вектора на орты базиса системы отсчета I. Если R связывает два события в пространстве – времени, то t_I – промежу-

---

[4] Вид общей формулы перепроектирования векторов не вполне определяется преобразованиями из *п. 2.1–2.3* (например, закон $\mathrm{R}_E = \tilde{\Lambda}_{IE} \circ \mathrm{R}_I \circ \overline{\tilde{\Lambda}_{IE}}$ для всех них приводит к тем же результатам). Здесь удобно постулировать приведенную в тексте формулу.

[5] Вместо закона перепроектирования операторов можно постулировать правило сложения преобразований, заданных в одной системе отсчета (см. начало *п. 2.4*) или связь между законами перепроектирования векторов и операторов преобразований (они преобразуются как $\mathrm{R}_1 \circ \mathrm{R}_2^{-1}$).

ток времени от первого события до второго, а r_{xI}, r_{yI}, r_{zI} – координаты пространственного вектора, направленного от первого события ко второму, измеренные в системе отсчета I.

Координаты того же 4-вектора R (вообще, геометрического объекта с векторным законом преобразования) в системе E можно найти с помощью равенства перепроектирования векторов (так называемая пассивная точка зрения на преобразование, см., например, [9, с. 269]). В данном случае

$$\Lambda_{IE}^{-1} = e^{-\frac{1}{2}\varepsilon i(\tau+\boldsymbol{\rho})}, \quad \overline{\Lambda_{IE}^{-1}} = \Lambda_{IE} = e^{\frac{1}{2}\varepsilon i(\tau+\boldsymbol{\rho})}$$

$$\mathrm{R}_E = \Lambda_{IE}^{-1} \circ \mathrm{R}_I \circ \overline{\Lambda_{IE}^{-1}} = e^{-\frac{1}{2}\varepsilon i\tau} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon i\boldsymbol{\rho}} \circ (t_I + \mathbf{r}_I) \circ e^{\frac{1}{2}\varepsilon i\boldsymbol{\rho}} e^{\frac{1}{2}\varepsilon i\tau} =$$

$$= t_I + (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon i\boldsymbol{\rho}) \circ \mathbf{r}_I \circ (1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon i\boldsymbol{\rho}) = t_I + (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon i\boldsymbol{\rho}) \circ (\mathbf{r}_I + \tfrac{1}{2}\varepsilon i\mathbf{r}_I \cdot \boldsymbol{\rho} + \tfrac{1}{2}\varepsilon \mathbf{r}_I \times \boldsymbol{\rho}) =$$

$$= t_I + \mathbf{r}_I + \tfrac{1}{2}\varepsilon i\mathbf{r}_I \cdot \boldsymbol{\rho} + \tfrac{1}{2}\varepsilon \mathbf{r}_I \times \boldsymbol{\rho} - \tfrac{1}{2}\varepsilon i\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{r}_I - \tfrac{1}{2}\varepsilon \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{r}_I = t_I + \mathbf{r}_I - \varepsilon \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{r}_I$$

Здесь использована формула для произведения векторов

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - i\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z$$

вытекающая из таблицы умножения обобщенных кватернионов и стандартных определений скалярного и векторного произведений векторов:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{e}_z$$

Как и следовало ожидать, координаты 4-вектора не изменились. Возникшее дополнительно векторное произведение при ε следует интерпретировать как проявившийся момент 4-вектора относительно нового начала отсчета.

Вообще, момент вектора относительно начала отсчета следует добавлять к нему со множителем Клиффорда и рассматривать как единый объект – дуальный вектор (винт, бивектор – см., например, [10, с. 32–36] и [11, с. 66]). В данном случае к обобщенному кватерниону R_I следовало сразу добавить момент 4-вектора R относительно системы отсчета I со множителем ε. Либо, если интересоваться только компонентами 4-вектора, а не его моментами, то все члены с ε можно просто отбрасывать, так как при умножении обобщенных кватернионов моментные части не влияют на главные.

Иногда полезна активная точка зрения на преобразование. Пусть Λ_{IE} переводит 4-вектор R в R′. Формула, связывающая координаты 4-векторов (или, в соответствии со сказанным выше, 4-векторов вместе с моментами как геометрических объектов с векторным законом преобразования) в системе I имеет вид: $\mathrm{R}'_I = \Lambda_{IE} \circ \mathrm{R}_I \circ \overline{\Lambda_{IE}}$ (в системе J: $\mathrm{R}'_J = \Lambda_J^{IE} \circ \mathrm{R}_J \circ \overline{\Lambda_J^{IE}}$). Очевидно, что координаты R′ в E такие же, как координаты R в I:

$$\mathrm{R}'_E = \Lambda_{IE}^{-1} \circ \mathrm{R}'_I \circ \overline{\Lambda_{IE}^{-1}} = \Lambda_{IE}^{-1} \circ \Lambda_{IE} \circ \mathrm{R}_I \circ \overline{\Lambda_{IE}} \circ \overline{\Lambda_{IE}^{-1}} = \mathrm{R}_I$$

2.2. Поворот. Пусть преобразование имеет вид

$$\Lambda_I^{JK} = \exp(\tfrac{1}{2} i\boldsymbol{\vartheta}) = \cos(\tfrac{1}{2}\vartheta) + i(\boldsymbol{\vartheta}/\vartheta)\sin(\tfrac{1}{2}\vartheta) = \Lambda_{IE}$$

т.е. представляется нормированным обычным кватернионом. Покажем, что его следует интерпретировать как пространственный поворот на угол (вектор) Эйлера[6] $\boldsymbol{\vartheta}$, переводящий J в K (соответственно, I в E).

Посмотрим, как связаны координаты (проекции) одного и того же 4-вектора R в системах I и E. В данном случае:

$$\Lambda_{IE}^{-1} = \tilde{\Lambda}_{IE} = e^{-\frac{1}{2}i\boldsymbol{\vartheta}}, \quad \overline{\Lambda_{IE}^{-1}} = \Lambda_{IE} = e^{\frac{1}{2}i\boldsymbol{\vartheta}}$$

$$\mathrm{R}_E = \Lambda_{IE}^{-1} \circ \mathrm{R}_I \circ \overline{\Lambda_{IE}^{-1}} = \tilde{\Lambda}_{IE} \circ (t_I + \mathbf{r}_I) \circ \Lambda_{IE} =$$

$$= t_I + \mathbf{r}_I \cos\vartheta + \boldsymbol{\vartheta}\frac{\mathbf{r}_I \cdot \boldsymbol{\vartheta}}{\vartheta^2}(1-\cos\vartheta) + \frac{\mathbf{r}_I \times \boldsymbol{\vartheta}}{\vartheta}\sin\vartheta = t_E + \mathbf{r}_E$$

Таким образом, временна́я координата 4-вектора не изменилась, а уравнение для пространственных координат можно записать в виде формулы (конечного поворота), в которую входят только обычные кватернионы [9, с. 239]:

$$i\mathbf{r}_E = \tilde{\Lambda}_{IE} \circ i\mathbf{r}_I \circ \Lambda_{IE}$$

2.3. Буст. Пусть преобразование имеет вид

$$\Lambda_I^{JK} = \exp(\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\psi}) = \mathrm{ch}(\tfrac{1}{2}\psi) + (\boldsymbol{\psi}/\psi)\,\mathrm{sh}(\tfrac{1}{2}\psi) = \Lambda_{IE}$$

Покажем, что такое преобразование следует интерпретировать как буст (лоренцев поворот), характеризуемый в системе отсчета I вектором параметра скорости $\boldsymbol{\psi}$ (гиперболическим углом поворота, быстротой) и переводящий J в K (соответственно, I в E). Параметр скорости $\boldsymbol{\psi}$ связан с обычной скоростью (движения E относительно I) $\mathbf{v} = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z$ (v_x, v_y, v_z – компоненты вектора $\mathbf{v}$; $v = |\mathbf{v}| < 1$, так как скорость света единица) формулой $\mathbf{v} = \mathrm{th}\,\boldsymbol{\psi}$. Подчеркнем, что начала отсчета систем I и E (но не J и K) совпадают (т.е. время и расстояния отсчитываются от одного и того же события), а их базисы одинаково ориентированы в пространстве ("чистый буст").

Найдем связь между координатами 4-вектора в системах I и E:

$$\mathrm{R}_E = \Lambda_{IE}^{-1} \circ \mathrm{R}_I \circ \overline{\Lambda_{IE}^{-1}} = e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}} \circ (t_I + \mathbf{r}_I) \circ e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}} = \left(\mathrm{ch}\frac{\psi}{2} - \frac{\boldsymbol{\psi}}{\psi}\mathrm{sh}\frac{\psi}{2}\right) \circ$$

$$\circ\left(t_I\,\mathrm{ch}\frac{\psi}{2} - t_I\frac{\boldsymbol{\psi}}{\psi}\mathrm{sh}\frac{\psi}{2} + \mathbf{r}_I\,\mathrm{ch}\frac{\psi}{2} - \frac{\mathbf{r}_I \cdot \boldsymbol{\psi}}{\psi}\mathrm{sh}\frac{\psi}{2} + i\frac{\mathbf{r}_I \times \boldsymbol{\psi}}{\psi}\mathrm{sh}\frac{\psi}{2}\right) = t_I\,\mathrm{ch}\,\psi - \frac{\mathbf{r}_I \cdot \boldsymbol{\psi}}{\psi}\mathrm{sh}\,\psi +$$

$$+\mathbf{r}_I - t_I\frac{\boldsymbol{\psi}}{\psi}\mathrm{sh}\,\psi + \boldsymbol{\psi}\frac{\mathbf{r}_I \cdot \boldsymbol{\psi}}{\psi^2}2\,\mathrm{sh}^2\frac{\psi}{2}$$

откуда следует

$$t_E = t_I\,\mathrm{ch}\,\psi - \frac{\mathbf{r}_I \cdot \boldsymbol{\psi}}{\psi}\mathrm{sh}\,\psi = \frac{t_I - \mathbf{r}_I \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\mathbf{r}_E = \mathbf{r}_I - t_I\frac{\boldsymbol{\psi}}{\psi}\mathrm{sh}\,\psi + \boldsymbol{\psi}\frac{\mathbf{r}_I \cdot \boldsymbol{\psi}}{\psi^2}(\mathrm{ch}\,\psi - 1) = \mathbf{r}_I - \frac{t_I\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{\mathbf{r}_I \cdot \mathbf{v}}{v^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1\right)\mathbf{v}$$

т.е. координаты 4-вектора связаны преобразованием Лоренца (см., например, [12, с. 555] или [13, с. 39]).

---

[6] Т.е. как поворот вокруг оси, проходящей через начало отсчета I параллельно вектору $\boldsymbol{\vartheta}$, на угол $\vartheta = |\boldsymbol{\vartheta}|$ против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{\vartheta}$. Вектор Эйлера называют также вектором ориентации [9, с. 231, 256] (или, иногда, вектором истинного поворота [3, с. 150, 314]). Здесь, как обычно, $\boldsymbol{\vartheta} = \vartheta_x\mathbf{e}_x + \vartheta_y\mathbf{e}_y + \vartheta_z\mathbf{e}_z$, где ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z – компоненты вектора $\boldsymbol{\vartheta}$.

Определенные выше векторные преобразования: пространственный перенос, пространственный поворот и буст не инвариантны (в смысле ковариантности согласно формуле перепроектирования операторов преобразований) относительно допускаемой обобщенными кватернионами группы преобразований систем отсчета (например, оператор, который в одной системе выглядит как чистый буст, в другой системе может быть представлен только комбинацией буста и поворота; оператор, который в одной системе выглядит как пространственный поворот, в другой системе может быть представлен только комбинацией поворота и параллельного переноса и т.п.), но имеют ясный физический смысл.

Аналогично, понятия "промежуток времени" и "расстояние" между двумя событиями имеют ясный физический смысл (допускают непосредственное измерение с помощью часов и линеек), но не инвариантны (согласно формуле перепроектирования векторов) при смене системы отсчета (например, 4-вектор, который в одной системе выглядит как чистый "промежуток времени", в другой системе отсчета может быть представлен только комбинацией "промежутка времени" и "расстояния" и т.п.).

2.4. Групповые свойства преобразований. Если переход от системы I к E определяется обобщенным кватернионом Λ_{IE}, а от системы E к третьей системе отсчета K обобщенным кватернионом Λ_{EK}, то собственная проекция оператора результирующего преобразования Λ_{IK} находится по формуле

$$\Lambda_{IK} = \Lambda_{IE} \circ \Lambda_{EK}$$

Действительно, согласно равенству перепроектирования для 4-векторов (которое проверено выше для переносов, поворотов и бустов[7]) $\mathrm{R}_K = \Lambda_{IK}^{-1} \circ \mathrm{R}_I \circ \overline{\Lambda_{IK}^{-1}}$; аналогично будем иметь

$$\mathrm{R}_K = \Lambda_{EK}^{-1} \circ \mathrm{R}_E \circ \overline{\Lambda_{EK}^{-1}} = \Lambda_{EK}^{-1} \circ \Lambda_{IE}^{-1} \circ \mathrm{R}_I \circ \overline{\Lambda_{IE}^{-1}} \circ \overline{\Lambda_{EK}^{-1}} = (\Lambda_{IE} \circ \Lambda_{EK})^{-1} \circ \mathrm{R}_I \circ \overline{(\Lambda_{IE} \circ \Lambda_{EK})^{-1}}$$

Сравнивая первое выражение с последним, приходим к формуле сложения (произведения, композиции) операторов преобразований (для собственных проекций).

Однако, чтобы складывать определенные ранее преобразования полезно знать и закон сложения проекций операторов, отнесенных к одной и той же системе отсчета. Получим его с помощью закона перепроектирования операторов

$$\Lambda_{IK} = \Lambda_{IE} \circ \Lambda_{EK} = \Lambda_{IE} \circ \Lambda_{EK} \circ \Lambda_{IE}^{-1} \circ \Lambda_{IE} = \Lambda_I^{EK} \circ \Lambda_{IE}$$

или $\Lambda_I^{IK} = \Lambda_I^{EK} \circ \Lambda_I^{IE}$

Общий вид полученной формулы не зависит от базовой системы отсчета:

$$\Lambda_J^{IK} = \Lambda_{IJ}^{-1} \circ \Lambda_I^{IK} \circ \Lambda_{IJ} = \Lambda_{IJ}^{-1} \circ \Lambda_I^{EK} \circ \Lambda_I^{IE} \circ \Lambda_{IJ} = \Lambda_{IJ}^{-1} \circ \Lambda_I^{EK} \circ \Lambda_{IJ} \circ \Lambda_{IJ}^{-1} \circ \Lambda_I^{IE} \circ \Lambda_{IJ} =$$
$$= \Lambda_J^{EK} \circ \Lambda_J^{IE}$$

Поэтому, согласно терминологии классической механики, эта формула имеет векторный (третье значение слова вектор) смысл.

Два последовательных[8] переноса во времени (на t_1 и t_2) дают в результате снова сдвиг во времени (на $t = t_1 + t_2$):

$$e^{\frac{1}{2}\varepsilon i t_2} e^{\frac{1}{2}\varepsilon i t_1} = e^{\frac{1}{2}\varepsilon i (t_1 + t_2)} = e^{\frac{1}{2}\varepsilon i t}$$

---

[7] Экспоненциальные представления всех указанных преобразований известны в литературе, для представления каждого из них в отдельности достаточно бикватернионов.

[8] Далее в этом пункте предполагается, что все преобразования заданы по отношению к одной и той же системе отсчета. Часто удобна и другая точка зрения, когда второе преобразование задается в системе отсчета, преобразованной первым преобразованием (т.е. когда используются собственные проекции операторов – см. начало *п. 3.1*). Структура исследуемой группы от этого не зависит, а соответствующие формулы связи параметров получаются простой заменой переменных.

Поскольку перенос во времени представляется скаляром, он коммутирует с любым другим преобразованием.

Два последовательных переноса в пространстве дают снова параллельный перенос, причем результат не зависит от порядка выполнения преобразований

$$e^{\frac{1}{2}\varepsilon i\mathbf{r}_2}e^{\frac{1}{2}\varepsilon i\mathbf{r}_1}=e^{\frac{1}{2}\varepsilon i(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)}=e^{\frac{1}{2}\varepsilon i\mathbf{r}}$$

Два пространственных поворота (на $\boldsymbol{\vartheta}_1$, затем на $\boldsymbol{\vartheta}_2$) дают в результате снова поворот, но результат в общем случае уже зависит от последовательности их выполнения

$$e^{\frac{1}{2}i\boldsymbol{\vartheta}_2}\circ e^{\frac{1}{2}i\boldsymbol{\vartheta}_1}=e^{\frac{1}{2}i\boldsymbol{\vartheta}}$$

Связь между $\boldsymbol{\vartheta}_1$, $\boldsymbol{\vartheta}_2$ и $\boldsymbol{\vartheta}$ удобно выразить, перейдя к другим переменным: $\boldsymbol{\Theta} = \operatorname{tg}(^1/_2\boldsymbol{\vartheta})$, $\boldsymbol{\Theta}_1 = \operatorname{tg}(^1/_2\boldsymbol{\vartheta}_1)$, $\boldsymbol{\Theta}_2 = \operatorname{tg}(^1/_2\boldsymbol{\vartheta}_2)$. В этих обозначениях

$$\boldsymbol{\Theta}=\frac{\boldsymbol{\Theta}_1+\boldsymbol{\Theta}_2+\boldsymbol{\Theta}_2\times\boldsymbol{\Theta}_1}{1-\boldsymbol{\Theta}_1\cdot\boldsymbol{\Theta}_2}$$

(известная формула для сложения конечных поворотов[9] [8, с. 152]; с точностью до обозначений см., например, [9, с. 229]).

Пространственный поворот и параллельный перенос системы отсчета можно выполнить в обратной последовательности, но при этом придется (в общем случае) изменить направление переноса:

$$e^{\frac{1}{2}\varepsilon i\mathbf{r}}\circ e^{\frac{1}{2}i\boldsymbol{\vartheta}}=e^{\frac{1}{2}i\boldsymbol{\vartheta}}\circ e^{\frac{1}{2}\varepsilon i\mathbf{r}'}$$

Заметим, что в данном случае $\mathbf{r}'$ связан с $\mathbf{r}$ формулой конечного поворота

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}\cos\vartheta+\boldsymbol{\vartheta}\frac{\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\vartheta}}{\vartheta^2}(1-\cos\vartheta)+\frac{\mathbf{r}\times\boldsymbol{\vartheta}}{\vartheta}\sin\vartheta$$

Таким образом, любую последовательность поворотов и переносов можно свести к одному повороту с последующим переносом: повороты и переносы образуют группу движений 3-мерного пространства.

Поворот и буст тоже можно поменять местами, при этом изменяется только параметр скорости

$$e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}}\circ e^{\frac{1}{2}i\boldsymbol{\vartheta}}=e^{\frac{1}{2}i\boldsymbol{\vartheta}}\circ e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}'}$$

Выполнив умножение обобщенных кватернионов и приравняв в правых и левых частях члены при одинаковых гиперкомплексных ортах, получим систему уравнений. Произведя элементарные тригонометрические преобразования, найдем связь между $\boldsymbol{\psi}$ и $\boldsymbol{\psi}'$:

$$\boldsymbol{\Psi}'=\frac{\boldsymbol{\Psi}(1-\boldsymbol{\Theta}^2)+2\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{\Psi}-2\boldsymbol{\Theta}\times\boldsymbol{\Psi}}{1+\boldsymbol{\Theta}^2}=\boldsymbol{\Psi}\cos\vartheta+\boldsymbol{\vartheta}\frac{\boldsymbol{\Psi}\cdot\boldsymbol{\vartheta}}{\vartheta^2}(1-\cos\vartheta)+\frac{\boldsymbol{\Psi}\times\boldsymbol{\vartheta}}{\vartheta}\sin\vartheta$$

$$\boldsymbol{\Psi}=\operatorname{th}(\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\psi}),\quad \boldsymbol{\Psi}'=\operatorname{th}(\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\psi}'),\quad \boldsymbol{\Theta}=\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta})$$

Лоренцевы повороты, как известно, незамкнуты [12, с. 17]. Два непараллельных буста дают в результате буст и пространственный поворот:

$$e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}_2}\circ e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}_1}=e^{\frac{1}{2}i\boldsymbol{\vartheta}}\circ e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}},\quad \boldsymbol{\Theta}=\frac{\boldsymbol{\Psi}_1\times\boldsymbol{\Psi}_2}{1+\boldsymbol{\Psi}_1\cdot\boldsymbol{\Psi}_2}$$

---

[9] Для вырожденных случаев, когда какой-либо (какие-либо) из углов стремится к π, формулы сложения конечных поворотов получаются из выписанной предельным переходом.

$$\Psi = \frac{\Psi_1 + \Psi_2 + (\Psi_1 + \Psi_2)\times\Theta}{(1+\Psi_1\cdot\Psi_2)(1+\Theta^2)} = \frac{\Psi_1(1+2\Psi_1\cdot\Psi_2+\Psi_2^2)+\Psi_2(1-\Psi_1^2)}{1+2\Psi_1\cdot\Psi_2+\Psi_1^2\Psi_2^2}$$

$$\Psi_1 = \mathrm{th}(\tfrac{1}{2}\psi_1),\quad \Psi_2 = \mathrm{th}(\tfrac{1}{2}\psi_2),\quad \Psi = \mathrm{th}(\tfrac{1}{2}\psi),\quad \Theta = \mathrm{tg}(\tfrac{1}{2}\vartheta)$$

Повороты и бусты образуют группу вращений пространства-времени (группу Лоренца). Последовательность поворотов и бустов можно свести к одному повороту с последующим бустом (т.е. к одному повороту в пространстве – времени).

Рассмотрим теперь бусты и переносы. При попытке переставить местами непараллельные (с неколлинеарными векторными параметрами) перенос и буст приходится вводить новое преобразование, которое до сих пор здесь не рассматривалось

$$e^{\frac{1}{2}\psi}\circ e^{\frac{1}{2}\varepsilon i\mathbf{r}} = e^{\frac{1}{2}\varepsilon i\mathbf{r}'}e^{\frac{1}{2}\varepsilon\varphi}\circ e^{\frac{1}{2}\psi}$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}\,\mathrm{ch}\,\psi + \psi\frac{\mathbf{r}\cdot\psi}{\psi^2}(1-\mathrm{ch}\,\psi),\qquad \varphi = -\frac{\mathbf{r}\times\psi}{\psi}\mathrm{sh}\,\psi$$

Выяснять физического смысла преобразования, соответствующего обобщенному кватерниону $\exp(\frac{1}{2}\varepsilon\varphi)$, не будем[10]. В разделе **3** будет показано, что развитая выше теория в целом, как физическая теория, ошибочна. Приведем для справки только формулы, позволяющие переставить это преобразование с любым другим[11]:

$$e^{\frac{1}{2}\varepsilon\varphi_2}e^{\frac{1}{2}\varepsilon\varphi_1} = e^{\frac{1}{2}\varepsilon(\varphi_1+\varphi_2)} := e^{\frac{1}{2}\varepsilon\varphi}$$

$$e^{\frac{1}{2}\varepsilon i\mathbf{r}}e^{\frac{1}{2}\varepsilon\varphi} = e^{\frac{1}{2}\varepsilon\varphi}e^{\frac{1}{2}\varepsilon i\mathbf{r}} = e^{\frac{1}{2}\varepsilon\varphi+\frac{1}{2}\varepsilon i\mathbf{r}}$$

$$e^{\frac{1}{2}\varepsilon\varphi}\circ e^{\frac{1}{2}i\vartheta} = e^{\frac{1}{2}i\vartheta}\circ e^{\frac{1}{2}\varepsilon\varphi'}$$

$$\varphi' = \varphi\cos\vartheta + \vartheta\frac{\varphi\cdot\vartheta}{\vartheta^2}(1-\cos\vartheta) + \frac{\varphi\times\vartheta}{\vartheta}\sin\vartheta$$

$$e^{\frac{1}{2}\psi}\circ e^{\frac{1}{2}\varepsilon\varphi} = e^{\frac{1}{2}\varepsilon\varphi'}e^{\frac{1}{2}\varepsilon i\mathbf{r}}\circ e^{\frac{1}{2}\psi}$$

$$\varphi' = \varphi\,\mathrm{ch}\,\psi + \psi\frac{\varphi\cdot\psi}{\psi^2}(1-\mathrm{ch}\,\psi),\qquad \mathbf{r} = \frac{\varphi\times\psi}{\psi}\mathrm{sh}\,\psi$$

Таким образом, в отношении коммутационных свойств преобразования типа $\exp(\frac{1}{2}\varepsilon\varphi)$ аналогичны параллельным переносам: перестановочны друг с другом (и с переносами), изменяются при перестановке с пространственным поворотом и требуют преобразования третьего типа (в данном случае – переноса) при перестановке с бустом.

Итак, согласно развитой выше теории, повороты и переносы пространства – времени группы не образуют (они порождают 13-параметрическую группу); последовательность преобразований, состоящих из: переноса во времени и в пространстве, буста (лоренцева поворота), пространственного поворота, нельзя в общем случае свести к одному такому преобразованию.

Подчеркнем, что структура изучаемой группы преобразований, в том числе и отсутствие в ней подгруппы, изоморфной 10-параметрической группе Пуанкаре, зависит только от таблицы умножения обобщенных кватернионов и определения функции $\exp(\cdot)$.

2.5. Группа преобразований пространства–времени. "То, что мы называем геометрией, есть не что иное, как изучение формальных свойств некоторой группы,

---

[10] Заметим, что возникло векторное преобразование, не определенное в *п. 2.1–2.3*. Ситуацию можно сравнить с "неожиданным" появлением поворота при сложении бустов, если бы в статье отсутствовал *п. 2.2*.

[11] Недостающие формулы получаются комплексным или векторным сопряжением выписанных в этом пункте и не приводят к качественно новым результатам.

так что мы можем сказать: пространство есть группа" А. Пуанкаре [14]; "В основе специальной теории относительности лежит математическое понятие группы" В. Паули [15, с. 51]; "Развитие физики в последние годы обратило, в известном смысле, соотношение между уравнениями движения и группами симметрии. Теперь группа симметрии физической системы выступает на первый план, представления этой группы и ее подгрупп несут самую фундаментальную информацию о ней. Таким образом, группы оказываются первичным, наиболее глубоким элементом физического описания природы" Ю.Б. Румер, А.И. Фет [16, с. 4].

Доказательство существования группы преобразований, отличной от группы Галилея и группы Пуанкаре, и позволяющей описывать известные преобразования пространства – времени, формально является достаточным основанием для построения новой физической теории [17]. Далее будем называть эту теорию "кватернионной теорией пространства-времени" или просто кватернионной теорией.. В основу этой теории положим исследованную в *п. 2.4* группу (далее – кватернионная группа).

Группой, как хорошо известно [2, с. 1138], называют множество (элементов), на котором задана ассоциативная бинарная (групповая) операция, причем требуется наличие обратного элемента для каждого элемента группы и существование единичного элемента. Далее в статье будут рассматриваться три группы преобразований, точнее три множества, элементы которых будут интерпретироваться как преобразования пространства – времени, с заданными на этих множествах операциями, которые будут интерпретироваться как композиция (последовательное выполнение) преобразований, причем будет обеспечена ассоциативность, обратимость преобразований и наличие единичного элемента (интерпретируемого как тождественное преобразование).

Цель настоящего пункта – описать множество преобразований, которое включает: тождественное преобразование, переносы во времени и в пространстве, повороты, бусты и их композиции. Будут рассматриваться следующие три неизоморфные группы, т.е. три существенно разные модели пространства – времени[12]: 10-параметрическая группа Галилея (G); 10-параметрическая группа Пуанкаре (P); 13-параметрическая группа из *п. 2.4* (Q).

Введенный ранее формализм в той части, где он не связан прямо с отождествлением преобразований с числами, а композиции преобразований с умножением чисел, без изменений подходит для всех трех групп. Например, закон перепроектирования операторов преобразований имеет тот же вид

$$\Lambda_E^{JK} = \Lambda_{IE}^{-1} \circ \Lambda_I^{JK} \circ \Lambda_{IE}$$

где Λ_I^{JK} – оператор перехода от системы J к K в системе отсчета I, ($\circ$) – символ групповой операции (опускается на тех же условиях), Λ^{-1} – обратный элемент для Λ ($(\Lambda_1 \circ \Lambda_2)^{-1} = \Lambda_2^{-1} \circ \Lambda_1^{-1}$). Из этого закона выводятся формулы сложения преобразований (как для собственных проекций операторов $\Lambda_{IK} = \Lambda_{IE} \circ \Lambda_{EK}$, так и для преобразований, заданных в одной системе отсчета $\Lambda_J^{IK} = \Lambda_J^{EK} \circ \Lambda_J^{IE}$). Но, например, введенная ранее формула перепроектирования объектов векторного типа включает операцию комплексного сопряжения и потому явно учитывает специальное (гиперкомплексное) представление соответствующей группы (Q).

Введем следующие общие (не связанные с числовым представлением) обозначения для элементарных преобразований: T_t – перенос во времени с параметром t, $R_{\mathbf{r}}$ – перенос в пространстве с параметром $\mathbf{r}$, $\Theta_{\boldsymbol{\vartheta}}$ – поворот с параметром $\boldsymbol{\vartheta}$, $V_{\boldsymbol{\psi}}$ – буст с параметром $\boldsymbol{\psi}$ (для группы G – с параметром $\mathbf{v} = \operatorname{th} \boldsymbol{\psi}$), Φ_φ – преобразование с параметром φ (только для группы Q). Каждому элементарному преобразованию соответствует

[12] Поэтому по крайней мере две из них ошибочны.

обратное элементарное преобразование того же типа ($T_t^{-1} = T_{-t}$, $R_{\mathbf{r}}^{-1} = R_{-\mathbf{r}}$ и т.д.). Элементарные преобразования определены для всех значений своих (вещественных) параметров, т.е. от $-\infty$ до $+\infty$ для скалярного параметра или для каждой из трех компонент векторного параметра (с этой целью вместо параметра $\mathbf{v}$ в группах P и Q используется параметр $\boldsymbol{\psi}$). Каждому значению параметра элементарного преобразования обычно соответствует свой элемент соответствующей группы и разным типам элементарных преобразований соответствуют разные элементы группы. Отметим важные исключения: при нулевом значении параметра любое элементарное преобразование соответствует единичному элементу группы (совпадает с тождественным преобразованием); повороты на 2π (радиан) определяют одно и то же преобразование независимо от направления, его отличают от тождественного [7, с. 407] (повороты на 4π совпадают с тождественным преобразованием).

Группа преобразований будет определена, если задать формулы, позволяющие находить композицию элементарных преобразований одного типа и переставлять элементарные преобразования разных типов. В этом случае любые две последовательности элементарных преобразований можно проверить на эквивалентность (т.е. соответствуют ли они одному и тому же элементу группы), приведя их к некоторому стандартному виду (например, $T_t R_{\mathbf{r}} \circ V_{\mathbf{v}} \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}}$ для группы G, $T_t R_{\mathbf{r}} \circ V_{\boldsymbol{\psi}} \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}}$ для группы P, $T_t R_{\mathbf{r}} \Phi_{\varphi} \circ V_{\boldsymbol{\psi}} \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}}$ для группы Q) и сравнив значения параметров[13] (учитывая цикличность поворотов и поглощение тождественного преобразования).

Приведем табличку, позволяющую систематизировать определяющие соотношения для рассматриваемых групп.

	T	R	Θ	V	Φ
T	(2.1)	(2.2)	(2.5)	(2.10)	(2.31)
R	(2.3)	(2.4)	(2.7)	(2.12)	(2.33)
Θ	(2.6)	(2.8)	(2.9)	(2.14)	(2.35)
V	(2.11)	(2.13)	(2.15)	(2.16)	(2.37)
Φ	(2.32)	(2.34)	(2.36)	(2.38)	(2.39)

Здесь в левом столбце и в верхней строке стоят символы элементарных преобразований, а в соответствующей клетке таблицы – номер формулы, отвечающей композиции этих преобразований. Для группы P формулы (2.10)–(2.16) следует заменить на (2.17)–(2.23); для Q – на (2.24)–(2.30). Формулы (2.31)–(2.39) требуются только для группы Q.

Метод получения определяющих соотношений для группы Q ясен из *п. 2.4*.

Для группы P все соотношения получены из формулы (ср. [18, с. 13]):

$$\mathrm{X}'_I = e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}} \circ e^{\frac{1}{2}i\boldsymbol{\vartheta}} \circ \mathrm{X}_I \circ e^{-\frac{1}{2}i\boldsymbol{\vartheta}} \circ e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}} + t + \mathbf{r}$$

($\mathrm{X}_I = \tau_I + \boldsymbol{\rho}_I$ и $\mathrm{X}'_I = \tau'_I + \boldsymbol{\rho}'_I$ – координаты двух точек – событий), обычным образом интерпретируемой (активная трактовка) как преобразование геометрического объекта X типа точка (физически интерпретируемого как событие) под действием преобразования общего вида из группы Пуанкаре. Для получения, например, перестановочного соотношения (2.20) для буста и переноса, следует приравнять результат действия буста с последующим переносом результату действия переноса с последующим бустом

$$e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}} \circ \mathrm{X}_I \circ e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{r} = e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}} \circ (\mathrm{X}_I + \mathbf{r}' + t) \circ e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}}$$

[13] В кватернионной теории, где элементарным преобразованиям по определению соответствуют гиперкомплексные числа специального вида, а композиции преобразований – операция умножения комплексно-дуальных кватернионов, достаточно произвести покомпонентное сравнение соответствующих обобщенных кватернионов в алгебраическом представлении.

(нетрудно убедиться, что параметр буста не изменяется, а без переноса во времени в общем случае не обойтись).

Для группы G аналогичную роль играет формула (ср. [19, с. 11]):

$$\tau_I' + \boldsymbol{\rho}_I' = e^{\frac{1}{2}i\boldsymbol{\vartheta}} \circ (\tau_I + \boldsymbol{\rho}_I) \circ e^{-\frac{1}{2}i\boldsymbol{\vartheta}} + t + \mathbf{r} + \tau_I \mathbf{v}$$

Ниже выписаны все соотношения в явном виде. Причем, формулы (2.1)–(2.9), общие для всех трех групп, выписаны только один раз. Формулы, симметричные относительно диагонали приведенной выше таблички, выписаны полностью даже в тех случаях, когда они дублируют друг друга.

$$T_{t_2} T_{t_1} = T_t, \quad t = t_1 + t_2 \tag{2.1}$$

$$R_{\mathbf{r}} T_t = T_t R_{\mathbf{r}} \tag{2.2}$$

$$T_t R_{\mathbf{r}} = R_{\mathbf{r}} T_t \quad \text{(совпадает с (2.2))} \tag{2.3}$$

$$R_{\mathbf{r}_2} R_{\mathbf{r}_1} = R_{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \tag{2.4}$$

$$\Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} T_t = T_t \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} \tag{2.5}$$

$$T_t \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} = \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} T_t \quad \text{(совпадает с (2.5))} \tag{2.6}$$

$$\Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} \circ R_{\mathbf{r}} = R_{\mathbf{r}'} \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} \tag{2.7}$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \vartheta + \boldsymbol{\vartheta} \frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\vartheta}}{\vartheta^2} (1 - \cos \vartheta) - \mathbf{r} \times \sin \boldsymbol{\vartheta}$$

$$R_{\mathbf{r}} \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} = \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} \circ R_{\mathbf{r}'} \quad \text{(следует из (2.7))} \tag{2.8}$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \vartheta + \boldsymbol{\vartheta} \frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\vartheta}}{\vartheta^2} (1 - \cos \vartheta) + \mathbf{r} \times \sin \boldsymbol{\vartheta}$$

$$\Theta_{\boldsymbol{\vartheta}_2} \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}_1} = \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{\vartheta} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}_1) + \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}_2) - \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}_1) \times \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}_2)}{1 - \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}_1) \cdot \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}_2)}$$

Для группы G:

$$V_{\mathbf{v}} \circ T_t = T_t R_{\mathbf{r}} \circ V_{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{r} = t\,\mathbf{v} \tag{2.10}$$

$$T_t \circ V_{\mathbf{v}} = V_{\mathbf{v}} \circ T_t R_{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} = -t\,\mathbf{v} \tag{2.11}$$

$$V_{\mathbf{v}} R_{\mathbf{r}} = R_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}} \tag{2.12}$$

$$R_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}} = V_{\mathbf{v}} R_{\mathbf{r}} \quad \text{(совпадает с (2.12))} \tag{2.13}$$

$$V_{\mathbf{v}} \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} = \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} \circ V_{\mathbf{v}'} \tag{2.14}$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} \cos \vartheta + \boldsymbol{\vartheta} \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\vartheta}}{\vartheta^2} (1 - \cos \vartheta) + \mathbf{v} \times \sin \boldsymbol{\vartheta}$$

$$\Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} \circ V_{\mathbf{v}} = V_{\mathbf{v}'} \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} \quad \text{(следует из (2.14))} \tag{2.15}$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} \cos \vartheta + \boldsymbol{\vartheta} \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\vartheta}}{\vartheta^2} (1 - \cos \vartheta) - \mathbf{v} \times \sin \boldsymbol{\vartheta}$$

$$V_{\mathbf{v}_2} V_{\mathbf{v}_1} = V_{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \tag{2.16}$$

Для группы P:

$$V_{\psi} \circ T_t = T_{t'} R_{\mathbf{r}} \circ V_{\psi}, \quad t' = t\,\mathrm{ch}\,\psi, \quad \mathbf{r} = t\,\mathrm{sh}\,\boldsymbol{\psi} \tag{2.17}$$

$$T_t \circ V_{\psi} = V_{\psi} \circ T_{t'} R_{\mathbf{r}}, \quad t' = t\,\mathrm{ch}\,\psi, \quad \mathbf{r} = -t\,\mathrm{sh}\,\boldsymbol{\psi} \tag{2.18}$$

$$V_{\psi} \circ R_{\mathbf{r}} = T_t R_{\mathbf{r}'} \circ V_{\psi} \tag{2.19}$$

$$t = \mathbf{r}\cdot\mathrm{sh}\,\boldsymbol{\psi}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}\,\mathrm{ch}\,\psi + \boldsymbol{\psi}\frac{\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\psi}}{\psi^2}(\mathrm{ch}\,\psi - 1)$$

$$R_{\mathbf{r}} \circ V_{\psi} = V_{\psi} \circ T_t R_{\mathbf{r}'} \tag{2.20}$$

$$t = -\mathbf{r}\cdot\mathrm{sh}\,\boldsymbol{\psi}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}\,\mathrm{ch}\,\psi + \boldsymbol{\psi}\frac{\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\psi}}{\psi^2}(\mathrm{ch}\,\psi - 1)$$

$$V_{\psi} \circ \Theta_{\vartheta} = \Theta_{\vartheta} \circ V_{\psi'}, \quad \boldsymbol{\Psi} = \mathrm{th}(\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\psi}) \tag{2.21}$$

$$\boldsymbol{\psi}' = 2\,\mathrm{arth}\left[\boldsymbol{\Psi}\cos\vartheta + \boldsymbol{\vartheta}\frac{\boldsymbol{\Psi}\cdot\boldsymbol{\vartheta}}{\vartheta^2}(1-\cos\vartheta) + \boldsymbol{\Psi}\times\sin\boldsymbol{\vartheta}\right]$$

$$\Theta_{\vartheta} \circ V_{\psi} = V_{\psi'} \circ \Theta_{\vartheta} \quad \text{(следует из (2.21))} \tag{2.22}$$

$$\boldsymbol{\psi}' = 2\,\mathrm{arth}\left[\boldsymbol{\Psi}\cos\vartheta + \boldsymbol{\vartheta}\frac{\boldsymbol{\Psi}\cdot\boldsymbol{\vartheta}}{\vartheta^2}(1-\cos\vartheta) - \boldsymbol{\Psi}\times\sin\boldsymbol{\vartheta}\right]$$

$$V_{\psi_2} \circ V_{\psi_1} = V_{\psi} \circ \Theta_{\vartheta}, \quad \boldsymbol{\vartheta} = 2\,\mathrm{arctg}\frac{\boldsymbol{\Psi}_1\times\boldsymbol{\Psi}_2}{1+\boldsymbol{\Psi}_1\cdot\boldsymbol{\Psi}_2} \tag{2.23}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_1 = \mathrm{th}(\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\psi}_1), \quad \boldsymbol{\Psi}_2 = \mathrm{th}(\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\psi}_2)$$

$$\boldsymbol{\psi} = 2\,\mathrm{arth}\frac{\boldsymbol{\Psi}_2(1+2\boldsymbol{\Psi}_1\cdot\boldsymbol{\Psi}_2+\boldsymbol{\Psi}_1^2)+\boldsymbol{\Psi}_1(1-\boldsymbol{\Psi}_2^2)}{1+2\boldsymbol{\Psi}_1\cdot\boldsymbol{\Psi}_2+\boldsymbol{\Psi}_1^2\boldsymbol{\Psi}_2^2}$$

Для группы Q:

$$V_{\psi} T_t = T_t V_{\psi} \tag{2.24}$$

$$T_t V_{\psi} = V_{\psi} T_t \quad \text{(совпадает с (2.24))} \tag{2.25}$$

$$V_{\psi} \circ R_{\mathbf{r}} = R_{\mathbf{r}'} \Phi_{\varphi} \circ V_{\psi} \tag{2.26}$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}\,\mathrm{ch}\,\psi - \boldsymbol{\psi}\frac{\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\psi}}{\psi^2}(\mathrm{ch}\,\psi - 1), \quad \varphi = -\mathbf{r}\times\mathrm{sh}\,\boldsymbol{\psi}$$

$$R_{\mathbf{r}} \circ V_{\psi} = V_{\psi} \circ R_{\mathbf{r}'} \Phi_{\varphi} \tag{2.27}$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}\,\mathrm{ch}\,\psi - \boldsymbol{\psi}\frac{\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\psi}}{\psi^2}(\mathrm{ch}\,\psi - 1), \quad \varphi = \mathbf{r}\times\mathrm{sh}\,\boldsymbol{\psi}$$

(2.28) совпадает с (2.21) (2.28)

(2.29) совпадает с (2.22) (2.29)

(2.30) совпадает с (2.23) (2.30)

$$\Phi_{\varphi} T_t = T_t \Phi_{\varphi} \tag{2.31}$$

$$T_t \Phi_{\varphi} = \Phi_{\varphi} T_t \quad \text{(совпадает с (2.31))} \tag{2.32}$$

$$\Phi_\varphi R_{\mathbf{r}} = R_{\mathbf{r}} \Phi_\varphi \qquad (2.33)$$

$$R_{\mathbf{r}} \Phi_\varphi = \Phi_\varphi R_{\mathbf{r}} \quad \text{(совпадает с (2.33))} \qquad (2.34)$$

$$\Phi_\varphi \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} = \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} \circ \Phi_{\varphi'} \qquad (2.35)$$

$$\varphi' = \varphi \cos\vartheta + \boldsymbol{\vartheta} \frac{\varphi \cdot \boldsymbol{\vartheta}}{\vartheta^2}(1 - \cos\vartheta) + \varphi \times \sin\boldsymbol{\vartheta}$$

$$\Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} \circ \Phi_\varphi = \Phi_{\varphi'} \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} \quad \text{(следует из (2.35))} \qquad (2.36)$$

$$\varphi' = \varphi \cos\vartheta + \boldsymbol{\vartheta} \frac{\varphi \cdot \boldsymbol{\vartheta}}{\vartheta^2}(1 - \cos\vartheta) - \varphi \times \sin\boldsymbol{\vartheta}$$

$$\Phi_\varphi \circ V_{\boldsymbol{\psi}} = V_{\boldsymbol{\psi}} \circ R_{\mathbf{r}} \Phi_{\varphi'} \qquad (2.37)$$

$$\varphi' = \varphi \operatorname{ch}\psi - \boldsymbol{\psi} \frac{\varphi \cdot \boldsymbol{\psi}}{\psi^2}(\operatorname{ch}\psi - 1), \quad \mathbf{r} = -\varphi \times \operatorname{sh}\boldsymbol{\psi}$$

$$V_{\boldsymbol{\psi}} \circ \Phi_\varphi = R_{\mathbf{r}} \Phi_{\varphi'} \circ V_{\boldsymbol{\psi}} \qquad (2.38)$$

$$\varphi' = \varphi \operatorname{ch}\psi - \boldsymbol{\psi} \frac{\varphi \cdot \boldsymbol{\psi}}{\psi^2}(\operatorname{ch}\psi - 1), \quad \mathbf{r} = \varphi \times \operatorname{sh}\boldsymbol{\psi}$$

$$\Phi_{\varphi_2} \Phi_{\varphi_1} = \Phi_\varphi, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \qquad (2.39)$$

3. Уравнения движения. В теории БИНС (бесплатформенных инерциальных навигационных систем – см. [9]) имеют дело, как минимум, с двумя системами отсчета, одна из которых (I) инерциальная ("неподвижная", базовая), а вторая (E) связана с движущимся объектом (например, космическим аппаратом). Неинерциальную связанную систему отсчета E следует рассматривать как непрерывную последовательность инерциальных (галилеевых) систем отсчета $E(\tau)$, совпадающих с E в соответствующие моменты времени (см., например, [13, с. 145]). Тем самым, преобразование, переводящее I в E, оказывается функцией времени $\Lambda_{IE}(\tau)$.

Рассмотрим простейший случай. Пусть в начальный момент $\tau = 0$ системы I и E совпадают. Если в дальнейшем объект остается неподвижным в (пустом) пространстве, то $\Lambda_{IE}(\tau) = T_\tau$, т.к. связанная с объектом система отсчета движется во времени.

В общем случае задачей БИНС является[14] вычисление текущего преобразования $\Lambda_{IE}(\tau)$ по измеряемым на борту (т.е. в системе E) кажущемуся ускорению $\mathbf{a}(\tau)$ и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(\tau)$ (как функций от τ – измеряемого объектом времени) при известном начальном состоянии $\Lambda_{IE}(\tau_0)$ и заданном гравитационном поле.

Далее будем рассматривать только случай движения объекта в свободном от гравитационного поля пространстве.

3.1. Уравнения инерциальной навигации. Пусть в некоторый момент времени τ преобразование Λ_{IE} имеет вид

$$\Lambda_{IE} = T_t \circ R_{\mathbf{r}} \circ V_{\boldsymbol{\psi}} \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}}$$

Это преобразование удобно считать разложенным в последовательность переноса во времени $T_t = \Lambda_{II'}$ и в пространстве $R_{\mathbf{r}} = \Lambda_{I'I''}$, буста $V_{\boldsymbol{\psi}} = \Lambda_{I''I'''}$ и поворота $\Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} = \Lambda_{I'''E}$, где I', I'', I''' – промежуточные системы отсчета, а все преобразования за-

---

[14] В соответствии с канонической постановкой задачи инерциальной навигации [20].

даны собственными проекциями соответствующих операторов. Очевидно, что рассматриваемое преобразование Λ_{IE} можно считать разложенным и в последовательность элементарных преобразований, каждое из которых задано в базовой системе отсчета I: $\Lambda_{IE} = \Lambda_I^{J'''E} \circ \Lambda_I^{J''J'''} \circ \Lambda_I^{J'J''} \circ \Lambda_{IJ'}$, $\Lambda_I^{J'''E} = T_t$, $\Lambda_I^{J''J'''} = R_{\mathbf{r}}$, $\Lambda_I^{J'J''} = V_{\boldsymbol{\psi}}$, $\Lambda_{IJ'} = \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}}$. Параметры преобразований остались теми же самыми, но промежуточные системы J', J'' и J''' в общем случае отличаются от I', I'' и I''' (а если раскладывать в последовательность $\Lambda_{IE} = \Lambda_{IJ'} \circ \Lambda_{J'J''} \circ \Lambda_{J''J'''} \circ \Lambda_{J'''E}$, то составляющие уже не будут элементарными преобразованиями). Меняется и порядок преобразований: сначала выполняется пространственный поворот, затем буст, перенос в пространстве, и последним – перенос во времени.

Для всех трех интересующих нас групп преобразований переносы во времени и в пространстве коммутируют, поэтому знак ($\circ$) между соответствующими символами может быть опущен. Для группы G, как указано в *п. 2.5*, вместо быстроты $\boldsymbol{\psi}$ следует использовать скорость $\mathbf{v}$.

Процедура вывода уравнений инерциальной навигации аналогична известной процедуре вывода кинематического уравнения[15] для обычного кватерниона поворота – см. [3, с. 97–100].

Пусть бортовыми часами зафиксировано бесконечно малое приращение собственного времени $d\tau$; при этом акселерометры измеряют вектор кажущегося ускорения $\mathbf{a}$, а датчики угловой скорости – вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Воспользуемся формулой сложения собственных проекций операторов, соответствующих интересующему нас преобразованию Λ_{IE} и его приращению, поскольку приращение Λ_{IE} определяется по измерениям в связанной системе отсчета E. Запишем, что преобразование $\Lambda_{IE(\tau+d\tau)} = \Lambda_{IE}(\tau + d\tau)$ получается из $\Lambda_{IE(\tau)} = \Lambda_{IE}(\tau)$ после выполнения бесконечно малого преобразования $\Lambda(d\tau) = \Lambda_{E(\tau)E(\tau+d\tau)}$:

$$\Lambda_{IE(\tau+d\tau)} = \Lambda_{IE(\tau)} \circ \Lambda_{E(\tau)E(\tau+d\tau)}$$

где $\Lambda(d\tau)$ можно представить в виде композиции переноса во времени с параметром $d\tau$, буста с параметром $\mathbf{a}d\tau$ и поворота с параметром $\boldsymbol{\omega}d\tau$, выполняемых в произвольной последовательности, так как удерживаются только члены первого порядка по $d\tau$, а все элементарные преобразования с малыми параметрами (малыми для обоих преобразований) можно переставлять местами с точностью до малых более высокого порядка: $\Lambda(d\tau) = T_{d\tau} V_{\mathbf{a}d\tau} \Theta_{\boldsymbol{\omega}d\tau}$. Для буста с малым параметром с точностью до малых более высокого порядка все равно, использовать скорость или быстроту, так как $\mathbf{v} = \operatorname{th} \boldsymbol{\psi} \to \boldsymbol{\psi}$ при $\psi \to 0$ (или $v \to 0$).

Располагая символическим уравнением

$$T_{t+dt} R_{\mathbf{r}+d\mathbf{r}} \circ V_{\boldsymbol{\psi}+d\boldsymbol{\psi}} \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}+d\boldsymbol{\vartheta}} = (T_t R_{\mathbf{r}} \circ V_{\boldsymbol{\psi}} \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}}) \circ (T_{d\tau} V_{\mathbf{a}d\tau} \Theta_{\boldsymbol{\omega}d\tau})$$

и системой определяющих соотношений для соответствующей группы в неявном виде уже имеем (если решение вообще существует) систему уравнений инерциальной навигации[16].

3.2. Решение для группы Галилея. Пользуясь символическим уравнением из *п. 3.1* (с заменой $\boldsymbol{\psi}$ на $\mathbf{v}$) и определяющими соотношениями для группы Галилея из *п. 2.5* получаем следующую цепочку равенств:

$$T_{t+dt} R_{\mathbf{r}+d\mathbf{r}} \circ V_{\mathbf{v}+d\mathbf{v}} \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}+d\boldsymbol{\vartheta}} = T_t R_{\mathbf{r}} \circ V_{\mathbf{v}} \circ \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}} T_{d\tau} V_{\mathbf{a}d\tau} \Theta_{\boldsymbol{\omega}d\tau} =$$

---

[15] Или уравнения инерциальной ориентации [21].

[16] Другие формы представления исходного преобразования, например $\Lambda_{IE} = \Theta_{\boldsymbol{\vartheta}'} \circ V_{\boldsymbol{\psi}'} \circ R_{\mathbf{r}'} \circ T_{t'}$ (другой выбор параметров, допустимый для групп G и P), также приводят к уравнениям инерциальной навигации, но в нетрадиционной форме.

$$= T_t R_r \circ V_v \circ T_{d\tau}\Theta_{\vartheta} \circ V_{\mathbf{a}d\tau}\Theta_{\omega d\tau} = T_t R_r T_{d\tau} R_{\mathbf{v}d\tau} \circ V_v V_{\kappa} \circ \Theta_{\vartheta} \circ \Theta_{\omega d\tau} =$$

$$= T_{t+d\tau} R_{\mathbf{r}+\mathbf{v}d\tau} \circ V_{\mathbf{v}+\kappa} \circ \Theta_{\sigma}$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \left[\mathbf{a}\cos\vartheta + \boldsymbol{\vartheta}\frac{\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\vartheta}}{\vartheta^2}(1-\cos\vartheta) - \mathbf{a}\times\sin\boldsymbol{\vartheta}\right]d\tau$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\,\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}(\frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}d\tau - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}d\tau\times\mathrm{tg}(\frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta})}{1-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}d\tau\cdot\mathrm{tg}(\frac{1}{2}\boldsymbol{\vartheta})}$$

Приравнивая параметры элементарных преобразований в первом и последнем выражении можно получить уравнения инерциальной навигации в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных $dt/d\tau$, $d\mathbf{r}/d\tau$, $d\mathbf{v}/d\tau$, $d\boldsymbol{\vartheta}/d\tau$. Вместо громоздкого вывода уравнения для вектора ориентации воспользуемся кватернионной формой представления пространственного поворота:

$$\Theta_{\vartheta+d\vartheta} = \mathrm{Q}(\tau+d\tau) = e^{\frac{1}{2}i(\boldsymbol{\vartheta}+d\boldsymbol{\vartheta})}, \qquad \Theta_{\vartheta} = \mathrm{Q}(\tau) = e^{\frac{1}{2}i\boldsymbol{\vartheta}}$$

$$\Theta_{\omega d\tau} = \mathrm{Q}(d\tau) = e^{\frac{1}{2}i\boldsymbol{\omega}d\tau} \approx 1 + \tfrac{1}{2}i\boldsymbol{\omega}d\tau$$

$$\mathrm{Q}(\tau+d\tau) = \Theta_{\vartheta+d\vartheta} = \Theta_{\vartheta}\circ\Theta_{\omega d\tau} = \mathrm{Q}(\tau)\circ\mathrm{Q}(d\tau)$$

$$\frac{d\,\mathrm{Q}(\tau)}{d\tau} = \frac{\mathrm{Q}(\tau+d\tau)-\mathrm{Q}(\tau)}{d\tau} = \frac{\mathrm{Q}(\tau)\circ(\mathrm{Q}(d\tau)-1)}{d\tau} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Q}(\tau)\circ i\boldsymbol{\omega}$$

В итоге получим известную систему нерелятивистских (в рамках механики Ньютона) уравнений инерциальной навигации (без учета гравитации):

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \mathrm{Q}\circ\mathbf{a}\circ\mathrm{Q}^{-1}, \quad \frac{d\mathrm{Q}}{d\tau} = \frac{1}{2}\mathrm{Q}\circ i\boldsymbol{\omega}$$

$$\mathrm{Q} = e^{\frac{1}{2}i\boldsymbol{\vartheta}}$$

Заметим, что в традиционной записи первое уравнение обычно опускается (так как $t = \tau$ с точностью до константы), а мнимая единица i включается в векторы $\boldsymbol{\vartheta}$ и $\boldsymbol{\omega}$ (см. *п. 1.1*). Поскольку $\mathrm{Q} = \exp(i\boldsymbol{\vartheta}/2)$, то $\mathrm{Q}^{-1} = \tilde{\mathrm{Q}} = \overline{\mathrm{Q}}$.

Приведем для справки в явном виде дифференциальное уравнение для вектора ориентации (уравнение инерциальной ориентации)

$$\frac{d\boldsymbol{\vartheta}}{d\tau} = \boldsymbol{\omega} + \frac{\boldsymbol{\vartheta}\times\boldsymbol{\omega}}{2} + \frac{\boldsymbol{\vartheta}\times[\boldsymbol{\vartheta}\times\boldsymbol{\omega}]}{\vartheta^2}\left(1-\frac{\vartheta}{2}\mathrm{ctg}\frac{\vartheta}{2}\right)$$

Уравнения инерциальной навигации, полученные исходя из определяющих соотношений для группы Галилея, подтверждаются всем опытом использования в существующих БИНС. Это подтверждает правильность метода вывода уравнений инерциальной навигации, изложенного в *п. 3.1*. С другой стороны, известные эксперименты показывают, что теория пространства – времени, основанная на группе Галилея, в целом ошибочно описывает структуру пространства – времени.

3.3. Решение для группы Пуанкаре. Пользуясь символическим уравнением из *п. 3.1* и определяющими соотношениями для группы Пуанкаре из *п. 2.5* имеем

$$T_{t+dt}R_{\mathbf{r}+d\mathbf{r}} \circ V_{\psi+d\psi} \circ \Theta_{\vartheta+d\vartheta} = T_t R_r \circ V_{\psi} \circ \Theta_{\vartheta} T_{d\tau} V_{\mathbf{a}d\tau}\Theta_{\omega d\tau} = T_t R_r \circ V_{\psi} \circ T_{d\tau}\Theta_{\vartheta} \circ V_{\mathbf{a}d\tau}\Theta_{\omega d\tau} =$$

$$= T_t R_r T_{d\tau\,\mathrm{ch}\,\psi} R_{d\tau\,\mathrm{sh}\,\psi} \circ V_{\psi} \circ \Theta_{\vartheta} \circ V_{\mathbf{a}d\tau}\Theta_{\omega d\tau} = T_{t+d\tau\,\mathrm{ch}\,\psi} R_{\mathbf{r}+d\tau\,\mathrm{sh}\,\psi} \circ V_{\psi} \circ \Theta_{\vartheta} \circ V_{\mathbf{a}d\tau}\Theta_{\omega d\tau}$$

Далее удобно воспользоваться бикватернионной формой представления поворотов пространства – времени:

$$V_{\psi+d\psi}\circ\Theta_{\vartheta+d\vartheta}=\mathrm{B}(\tau+d\tau)=e^{\frac{1}{2}(\psi+d\psi)}\circ e^{\frac{1}{2}i(\vartheta+d\vartheta)}$$

$$V_{\psi}\circ\Theta_{\vartheta}=\mathrm{B}(\tau)=e^{\frac{1}{2}\psi}\circ e^{\frac{1}{2}i\vartheta}$$

$$V_{\mathbf{a}d\tau}\Theta_{\omega d\tau}=\mathrm{B}(d\tau)=e^{\frac{1}{2}\mathbf{a}d\tau}e^{\frac{1}{2}i\omega d\tau}\approx 1+\tfrac{1}{2}\mathbf{a}d\tau+\tfrac{1}{2}i\boldsymbol{\omega}d\tau$$

$$\mathrm{B}(\tau+d\tau)=V_{\psi+d\psi}\circ\Theta_{\vartheta+d\vartheta}=V_{\psi}\circ\Theta_{\vartheta}\circ V_{\mathbf{a}d\tau}\Theta_{\omega d\tau}=\mathrm{B}(\tau)\circ\mathrm{B}(d\tau)$$

$$\frac{d\mathrm{B}(\tau)}{d\tau}=\frac{\mathrm{B}(\tau+d\tau)-\mathrm{B}(\tau)}{d\tau}=\frac{\mathrm{B}(\tau)\circ(\mathrm{B}(d\tau)-1)}{d\tau}=\tfrac{1}{2}\mathrm{B}(\tau)\circ(\mathbf{a}+i\boldsymbol{\omega})$$

В итоге получим следующую систему релятивистских (в рамках специальной теории относительности (СТО)) уравнений инерциальной навигации (без учета гравитации)[17]:

$$d\mathrm{R}/d\tau=\mathrm{B}\circ\overline{\mathrm{B}},\qquad d\mathrm{B}/d\tau=\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\circ(\mathbf{a}+i\boldsymbol{\omega})$$

$$\mathrm{R}=t+\mathbf{r},\qquad \mathrm{B}=e^{\frac{1}{2}\psi}\circ e^{\frac{1}{2}i\vartheta}$$

Заметим, что при традиционном изложении специальной теории относительности 4-мерный вектор

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\tau}=\mathrm{B}\circ\overline{\mathrm{B}}=e^{\psi}=\operatorname{ch}\psi+\operatorname{sh}\boldsymbol{\psi}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}+\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}$$

называют 4-мерной скоростью (4-скоростью), а 4-вектор

$$\frac{d^2\mathrm{R}}{d\tau^2}=\frac{d}{d\tau}(\mathrm{B}\circ\overline{\mathrm{B}})=\frac{d\mathrm{B}}{d\tau}\circ\overline{\mathrm{B}}+\mathrm{B}\circ\frac{d\overline{\mathrm{B}}}{d\tau}=\mathrm{B}\circ\mathbf{a}\circ\overline{\mathrm{B}}$$

равный соответствующим образом преобразованному вектору кажущегося ускорения, называют 4-мерным ускорением (4-ускорением).

Полученную систему уравнений инерциальной навигации можно записать в виде одного уравнения в обобщенных кватернионах, определяющего изменение со временем преобразования Λ_{IE}. Обозначим символом Λ следующее выражение:

$$\Lambda=e^{\frac{1}{2}\varepsilon i(t+\mathbf{r})}\circ e^{\frac{1}{2}\psi}\circ e^{\frac{1}{2}i\vartheta}=e^{\frac{1}{2}\varepsilon i\mathrm{R}}\circ\mathrm{B}=\mathrm{B}+\tfrac{1}{2}\varepsilon i\mathrm{R}\circ\mathrm{B}$$

Имеем, учитывая выписанные ранее уравнения для R и B

$$\frac{d\Lambda}{d\tau}=\frac{d}{d\tau}\left(\mathrm{B}+\varepsilon i\frac{\mathrm{R}}{2}\circ\mathrm{B}\right)=\frac{d\mathrm{B}}{d\tau}+\frac{\varepsilon i}{2}\frac{d\mathrm{R}}{d\tau}\circ\mathrm{B}+\varepsilon i\frac{R}{2}\circ\frac{d\mathrm{B}}{d\tau}=$$

$$=\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\circ(\mathbf{a}+i\boldsymbol{\omega})+\tfrac{1}{2}\varepsilon i\mathrm{B}\circ\overline{\mathrm{B}}\circ\mathrm{B}+\tfrac{1}{2}\varepsilon i\mathrm{R}\circ\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\circ(\mathbf{a}+i\boldsymbol{\omega})=\tfrac{1}{2}(\Lambda\circ(\mathbf{a}+i\boldsymbol{\omega})+\varepsilon i\mathrm{B}\circ\overline{\mathrm{B}}\circ\mathrm{B})$$

и поскольку $\varepsilon\mathrm{B}\circ\overline{\mathrm{B}}\circ\mathrm{B}=\varepsilon\Lambda\circ\overline{\Lambda}\circ\Lambda$, получаем окончательно:

$$d\Lambda/d\tau=\tfrac{1}{2}\Lambda\circ(\mathbf{a}+i\boldsymbol{\omega}+\varepsilon i\overline{\Lambda}\circ\Lambda)$$

---

[17] Полученные ранее Л.И. Седовым [22] релятивистские (в рамках СТО) уравнения инерциальной навигации соответствуют случаю $\vartheta=0$, но не случаю платформы, реализованной только "*при помощи трех идеальных малых гироскопов*" [22, с. 1313] (случай $\omega=0$), так как свободный гироскоп не сохраняет неизменной ориентацию в пространстве (с учетом релятивистских эффектов – так называемая прецессия Томаса) [23, с. 46, 97], [24, с. 222–223], см. также: *Бурланков Д.Е., Малыкин Г.Б.* Релятивистское сложение вращений и прецессия Томаса. Препринт № 51. Нижний Новгород: Институт прикладной физики РАН, 2001. 28 с.

Заметим, что решая данное уравнение с начальным условием

$$\Lambda(\tau_0)=e^{\frac{1}{2}\varepsilon i(t_0+\mathbf{r}_0)}\circ e^{\frac{1}{2}\psi_0}\circ e^{\frac{1}{2}i\vartheta_0}$$

получим, что для любого момента времени τ

$$\Lambda(\tau)=e^{\frac{1}{2}\varepsilon i(t(\tau)+\mathbf{r}(\tau))}\circ e^{\frac{1}{2}\psi(\tau)}\circ e^{\frac{1}{2}i\vartheta(\tau)}$$

Выражения типа $\exp(\varepsilon\varphi/2)$ не появляются. Это следует из эквивалентности (для рассматриваемых начальных условий) уравнения в обобщенных кватернионах выписанной ранее системе уравнений для B и R.

Полученные уравнения инерциальной навигации могут быть явно разрешены относительно производных от параметров t, $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\vartheta}$. Выпишем эти уравнения (не приводя громоздкого вывода двух последних уравнений):

$$dt/d\tau=\operatorname{ch}\psi,\qquad d\mathbf{r}/d\tau=\operatorname{sh}\boldsymbol{\psi}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{d\tau}=\mathrm{Q}\circ\mathbf{a}\circ\mathrm{Q}^{-1}+\frac{\boldsymbol{\psi}\times[\boldsymbol{\psi}\times(\mathrm{Q}\circ\mathbf{a}\circ\mathrm{Q}^{-1})]}{\psi^2}\left(1-\frac{\psi}{\operatorname{sh}\psi}\right)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\vartheta}}{d\tau}=\boldsymbol{\omega}'+\frac{\boldsymbol{\vartheta}\times\boldsymbol{\omega}'}{2}+\frac{\boldsymbol{\vartheta}\times[\boldsymbol{\vartheta}\times\boldsymbol{\omega}']}{\vartheta^2}\left(1-\frac{\vartheta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$\mathrm{Q}=e^{\frac{1}{2}i\vartheta},\qquad \boldsymbol{\omega}'=\boldsymbol{\omega}+\mathbf{a}\times[\mathrm{Q}^{-1}\circ\operatorname{th}(\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\psi})\circ\mathrm{Q}]$$

Видно, что в пределе $\psi\to 0$ эти уравнения с точностью до поправок более высокого порядка по малому параметру $\psi\approx v$ совпадают с известными нерелятивистскими уравнениями инерциальной навигации, выписанными в *п. 3.2.*

3.4. Решение для кватернионной группы. Воспользуемся представлением преобразования Λ_{IE} в обобщенных кватернионах:

$$T_{t+dt}R_{\mathbf{r}+d\mathbf{r}}\circ V_{\boldsymbol{\psi}+d\boldsymbol{\psi}}\circ\Theta_{\boldsymbol{\vartheta}+d\boldsymbol{\vartheta}}=\Lambda(\tau+d\tau)=e^{\frac{1}{2}\varepsilon i(t+dt+\mathbf{r}+d\mathbf{r})}\circ e^{\frac{1}{2}(\boldsymbol{\psi}+d\boldsymbol{\psi})}\circ e^{\frac{1}{2}i(\boldsymbol{\vartheta}+d\boldsymbol{\vartheta})}$$

$$T_tR_{\mathbf{r}}\circ V_{\boldsymbol{\psi}}\circ\Theta_{\boldsymbol{\vartheta}}=\Lambda(\tau)=e^{\frac{1}{2}\varepsilon i(t+\mathbf{r})}\circ e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}}\circ e^{\frac{1}{2}i\boldsymbol{\vartheta}}$$

$$T_{d\tau}V_{\mathbf{a}d\tau}\Theta_{\boldsymbol{\omega}d\tau}=\Lambda(d\tau)=e^{\frac{1}{2}\varepsilon id\tau}e^{\frac{1}{2}\mathbf{a}d\tau}e^{\frac{1}{2}i\boldsymbol{\omega}d\tau}\approx 1+\tfrac{1}{2}\mathbf{a}d\tau+\tfrac{1}{2}i\boldsymbol{\omega}d\tau+\tfrac{1}{2}\varepsilon id\tau$$

$$\Lambda(\tau+d\tau)=T_{t+dt}R_{\mathbf{r}+d\mathbf{r}}\circ V_{\boldsymbol{\psi}+d\boldsymbol{\psi}}\circ\Theta_{\boldsymbol{\vartheta}+d\boldsymbol{\vartheta}}=T_tR_{\mathbf{r}}\circ V_{\boldsymbol{\psi}}\circ\Theta_{\boldsymbol{\vartheta}}\circ T_{d\tau}V_{\mathbf{a}d\tau}\Theta_{\boldsymbol{\omega}d\tau}=\Lambda(\tau)\circ\Lambda(d\tau)$$

$$\frac{d\Lambda(\tau)}{d\tau}=\frac{\Lambda(\tau+d\tau)-\Lambda(\tau)}{d\tau}=\frac{\Lambda(\tau)\circ(\Lambda(d\tau)-1)}{d\tau}=\tfrac{1}{2}\Lambda(\tau)\circ(\mathbf{a}+i\boldsymbol{\omega}+\varepsilon i)$$

В итоге получим следующее уравнение

$$d\Lambda/d\tau=\tfrac{1}{2}\Lambda\circ(\mathbf{a}+i\boldsymbol{\omega}+\varepsilon i),\qquad \Lambda=e^{\frac{1}{2}\varepsilon i(t+\mathbf{r})}\circ e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}}\circ e^{\frac{1}{2}i\boldsymbol{\vartheta}}$$

Выделив главную и моментную части у Λ и ее производной

$$\Lambda=\mathrm{B}+\varepsilon\left[i\frac{\mathrm{R}}{2}\circ\mathrm{B}\right],\qquad \frac{d\Lambda}{d\tau}=\frac{d\mathrm{B}}{d\tau}+\varepsilon\left[i\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{R}}{d\tau}\circ\mathrm{B}+i\frac{\mathrm{R}}{2}\circ\frac{d\mathrm{B}}{d\tau}\right]$$

найдем главную и моментную части уравнения инерциальной навигации, соответствующего кватернионной группе. В результате придем к следующей системе уравнений:

$$d\mathrm{R}/d\tau=1,\qquad d\mathrm{B}/d\tau=\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\circ(\mathbf{a}+i\boldsymbol{\omega})$$

$$\mathrm{R}=t+\mathbf{r},\qquad \mathrm{B}=e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}}\circ e^{\frac{1}{2}i\boldsymbol{\vartheta}}$$

Видно, что уравнение для B совпадает с соответствующим уравнением из *п. 3.3*, полученным в рамках СТО, а уравнение для R отличается. Соответственно, из четырех уравнений для параметров t, $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\vartheta}$ два отличаются, а два совпадают с уравнениями, полученными при использовании группы Пуанкаре. Выпишем отличающиеся уравнения: $dt/d\tau = 1$, $d\mathbf{r}/d\tau = 0$. Первое из этих уравнений совпадает с соответствующим уравнением, полученным для группы Галилея, а второе – существенно отличается.

Согласно уравнению $d\mathbf{r}/d\tau = 0$ бесплатформенная инерциальная навигационная система, построенная на уравнениях инерциальной навигации, полученных в рамках "кватернионной теории пространства – времени", будет утверждать, что объект не двигается с места независимо от начальной скорости и показаний акселерометров. Полученный результат явно противоречит опыту.

Сравнивая определяющие соотношения для кватернионной группы с определяющими соотношениями для группы Пуанкаре можно выделить две области явлений, где расчеты согласно кватернионной теории должны совпадать с расчетами, выполненными в рамках специальной теории относительности (если считать, что СТО адекватно описывает структуру пространства – времени, то эти области определяют "область применимости" кватернионной теории как физической теории): явления, для описания которых существенны переносы в пространстве – времени и пространственные повороты[18], но несущественны бусты – сюда входит, в частности, область применимости евклидовой геометрии, рассматриваемой как физическая теория, описывающая движения в пространстве (конечные перемещения твердых тел [25]); явления, для описания которых существенны повороты в пространстве – времени[19], но несущественны переносы. Задача инерциальной навигации не относится к указанным областям, так как для ее решения существенны как переносы, так и повороты пространства – времени. Для опровержения "кватернионной теории пространства – времени" достаточно было рассмотреть элементарный частный случай задачи инерциальной навигации – инерциальное движение ($\mathbf{a} = 0$, $\boldsymbol{\omega} = 0$) с ненулевой начальной скоростью[20].

В заключение отметим, что область применения кольца обобщенных кватернионов[21] как простейшего алгебраического объекта, тесно связанного со структурой пространства – времени, не следует ограничивать только инерциальной навигацией [30–53][22].

Автор признателен Ю.Н. Челнокову за внимание к работе, ценные замечания и библиографические ссылки.

[18] 7-параметрическая "группа Аристотеля" [16, с. 98] с определяющими соотношениями (2.1) – (2.9) из *п. 2.5*.

[19] 6-параметрическая группа Лоренца с определяющими соотношениями (2.9), (2.21) – (2.23).

[20] Задание групп определяющими соотношениями для конечных преобразований открывает широкие возможности для построения новых "теорий пространства – времени", опровергнуть которые будет не так легко. Но путь искусственного подбора определяющих соотношений представляется бесперспективным.

[21] Ю.Н. Челноков обратил внимание автора на то, что обобщенные кватернионы подпадают под общее определение бикватернионов, данное А.П. Котельниковым [26, с. 310]. Автор считает нецелесообразным сохранять название "бикватернион" для кватерниона с четырехкомпонентными коэффициентами. В то же время и термин "обобщенный кватернион" нельзя признать удачным и окончательным – в алгебре уже есть другие объекты с этим названием (см., например, [27, с. 480], [28, с. 125–126] и [29]).

[22] *Челноков Ю.Н.* О кватернионных и бикватернионных уравнениях движения свободного твердого тела и их применениях в инерциальной навигации. М., 1989, 15 с. – Деп. в ВИНИТИ. № 1070–В89; *Козиоров Ю.Н.* Ассоциативные гиперкомплексные системы 3-го ранга. Череповец: 1995. 8 с. – Деп. в ВИНИТИ. № 2067–В95.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кантор И.Л., Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144 с.
2. Математическая энциклопедия. Т. 1. М.: Сов. энциклопедия, 1977. 1152 с.
3. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
4. *Балк М.Б., Балк Г.Д., Полухин А.А.* Реальные применения мнимых чисел. Киев: Радянська школа, 1988. 256 с.
5. *Григорьян А.Т., Розенфельд Б.А.* История неевклидовой механики // Исследования по истории физики и механики. 1988. М.: Наука, 1988. С. 161–178.
6. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ. М.: Наука, 1987. 432 с.
7. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. Т. 3. М.: Мир, 1977. 512 с.
8. *Диментберг Ф.М.* Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978. 328 с.
9. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
10. *Путята Т.В., Лаптев Б.Л., Розенфельд Б.А., Фрадлин Б.Н.* Александр Петрович Котельников (1865–1944). М.: Наука, 1968. 124 с.
11. *Лебедев П.А.* Кинематика пространственных механизмов. М.; Л.: Машиностроение, 1966. 280 с.
12. Физический энциклопедический словарь. Т. 3. М.: Сов. энциклопедия, 1963. 624 с.
13. *Логунов А.А.* Лекции по теории относительности и гравитации: Современный анализ проблемы. М.: Наука, 1987. 272 с.
14. *Васильев А.В.* Математика за последние пятьдесят лет // Математическое образование. 1928. № 1. С. 3–9; № 2. С. 49–58. (См. также № 3 за 1997 год.)
15. *Логунов А.А.* К работам Анри Пуанкаре "О динамике электрона". М.: ИЯИ АН СССР, 1984. 96 с.
16. *Визгин В.П.* "Эрлангенская программа" и физика. М.: Наука, 1975. 112 с.
17. *Зайцев Г.А.* О связи теории относительности с теорией групп // Тоннела М.-А. Основы электромагнетизма и теории относительности. М.: ИЛ, 1962. С. 447–475.
18. *Новожилов Ю.В.* Введение в теорию элементарных частиц. М.: Наука, 1972. 472 с.
19. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Наука, 1997. 320 с.
20. *Зеленков С.В., Михалев И.А., Сайдов П.И., Сенилов Г.Н.* 18 января – 30 лет со дня доклада Л.И. Ткачева "К теории пространственной ориентировки в слепом полете при помощи маятниково-гироскопных систем" (1943 г.) // Из истории авиации и космонавтики. Вып. 19. (Знаменательные даты на 1973 г.) М., 1973. С. 8–14.
21. *Панов А.П.* Математические основы теории инерциальной ориентации. Киев: Наук. думка, 1995. 280 с.
22. *Седов Л.И.* Об уравнениях инерциальной навигации с учетом релятивистских эффектов // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 6. С. 1311–1314[23].
23. *Мёллер К.* Теория относительности. М.: Атомиздат, 1975. 400 с.
24. *Тейлор Э.Ф., Уилер Дж.А.* Физика пространства-времени. М.: Мир, 1969. 256 с.
25. *Крылов А.Н.* О перемещениях твердого тела // Собрание сочинений академика А.Н. Крылова. Т. VIII. Механика. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 333–350.
26. *Котельников А.П.* Проективная теория векторов // Изв. физ.-мат. Об-ва при Императорском Казан. Ун-те. 1899. Т. 9. № 3. Приложение. С. 241–317.
27. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. М.: Наука, 1977. 496 с.
28. *Шафаревич И.Р.* Основные понятия алгебры. Ижевск: Ижевск. респ. типография, 1999. 348 с.
29. *Белова Н.Н., Данилов А.Н.* Алгебра и арифметика кватернионов. Череповец: Изд-во ЧГПИ, 1995. 88 с.
30. *Онищенко С.М.* Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы. Киев: Наук. думка, 1983. 208 с.
31. *Петров Б.Н., Гольденблат И.И., Уланов Г.М., Ульянов С.В.* Проблемы управления ре-

[23] Подробнее см.: *Седов Л.И., Цыпкин А.Г.* Основы макроскопических теорий гравитации и электромагнетизма. М.: Наука, 1989. 272 с.

лятивистскими и квантовыми динамическими системами (физические и информационные аспекты). М.: Наука, 1982. 524 с.
32. *Ткаченко А.И.* О релятивистских уравнениях инерциальной навигации // Космические исследования на Украине. Вып. 15. Киев, 1981. С. 93–97.
33. *Березин А.В., Курочкин Ю.А., Толкачев Е.А.* Кватернионы в релятивистской физике. Минск: Наука и техника, 1989. 200 с.
34. *Казанова Г.* Векторная алгебра. М.: Мир, 1979. 117 с.
35. *Ломсадзе Ю.М.* Теоретико-групповое введение в теорию элементарных частиц. М.: Высшая школа, 1962. 184 с.
36. *Hestenes D.* Space-Time Algebra. N.Y.: Gordon end Breach, 1966. 94 p.
37. *Медведев Б.В.* Начала теоретической физики. М.: Наука, 1977. 496 с.
38. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Физматгиз, 1961. 564 с.
39. *Лайтман А., Пресс В., Прайс Р., Тюкольски С.* Сборник задач по теории относительности и гравитации. М.: Мир, 1979. 536 с.
40. *Быстров К.Н., Захаров В.Д.* Гиперкомплексные структуры в пространствах общей теории относительности и теории поля // Итоги науки и техники. Сер. "Классическая теория поля и теория гравитации". Т. 1. Гравитация и космология. М.: ВИНИТИ, 1991. С. 111–158.
41. *Кассандров В.В.* Алгебраическая структура пространства – времени и алгебродинамика. М.: Изд-во РУДН, 1992. 149 с.
42. *Фридман В.Я.* Теория "кентавров" и структура реальности. М., 1996. 192 с.
43. *Смолин А.Л.* Гиперкомплексные преобразования Лоренца, эфир и остальная физика. М.: Диалог-МГУ, 1999. 105 с. (См. Библиографию на с. 93–104).
44. *Курдгелаидзе Д.Ф.* Введение в неассоциативную классическую теорию поля. Тбилиси: Мецниереба, 1987. 283 с.
45. *Лыхмус Я., Паал Э., Соргсепп Л.* Неассоциативность в математике и физике // Тр. ин-та физики АН Эстонии. Т. 66. Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике. Тарту, 1990. С. 8–22.
46. *Dixon G.* Algebraic unification // Phys. Rev. D. 1983. V. 28. N 4. P. 833–843.
47. *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство – время. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля. М.: Мир, 1987. 528 с.
48. *Яглом И.М.* Комплексные числа и их применение в геометрии. М.: Физматгиз, 1963. 192 с.
49. *Арнольд В.И.* Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. М.: Изд-во МЦНМО, 2002. 40 с.
50. *Розенфельд Б.А.* История неевклидовой геометрии. Развитие понятия о геометрическом пространстве. М.: Наука, 1976. 416 с.
51. *Синьков М.В., Губарени Н.М.* Непозиционные представления в многомерных числовых системах. Киев: Наук. думка, 1979. 147 с.
52. *Александрова Н.В.* Максвелл: векторы и кватернионы // Максвелл и развитие физики XIX–XX веков: Сб. статей / Отв. ред. Л.С. Полак. М.: Наука, 1985. С. 72–76.
53. *Гамильтон У.Р.* Избранные труды: Оптика. Динамика. Кватернионы. М.: Наука, 1994. 560 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.03.2001