МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2002

УДК 531.36

© 2002 г. К.С. МАТВИЙЧУК

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ УПРУГИХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Работа посвящена исследованию технической устойчивости [1–14] динамических состояний удлиненных упругих летательных аппаратов типа ракеты при их продольном вертикальном движении. Летательные аппараты указанного типа имеют форму тонких удлиненных тел с переменным поперечным сечением и во время полета испытывают большие поперечные деформации и колебания. Такие динамические системы с увеличением размеров становятся относительно менее жесткими, влияние упругих и других колебаний на полет и управление полетом становится существенным. Взаимодействие деформации и угловых движений корпуса системы, внешних аэродинамических сил, внутренних гидродинамических возмущений от колеблющейся жидкости в баках аппарата может приводить к нежелательным эффектам и явлениям, таким как автоколебания, потеря устойчивости и др., и в результате летательная система не осуществит полет по заданной траектории. Для гашения отклонений от заданных угловых и других движений летательного аппарата служит управление и это управление может гасить или, наоборот, при неудачном законе управления раскачивать движение жидкости в баках и упругие колебания. При указанном в работе управлении процессом получены достаточные условия технической устойчивости заданной динамической системы на конечном и бесконечном интервале времени. Применяется метод сравнения на основе оптимизации распределенных процессов в комбинации с прямым методом Ляпунова. Исследования работы опираются на результаты, содержащиеся в [15–26].

1. Постановка задачи, формирование управления процесса. Пусть летательный аппарат представляет собой удлиненное упругое тело, например, тонкое тело вращения, или тело вращения с крыльями и оперением малого удлинения, которое совершает движение в вертикальной плоскости [16–18]. Условия полета требуют малости отклонений продольной оси летательного аппарата от заданного движения. Каждая точка продольной оси летательного аппарата должна двигаться по заданной траектории. Однако во время полета всегда имеют место отклонения от программного движения. Требуется управлять движением так, чтобы отклонение траектории от заданной, например, от прямолинейной, было мало и точность полета была наибольшей. Скорость полета системы считается постоянной. Колебания оси летательного аппарата, как балки переменного сечения, под действием сил упругости и веса, аэродинамических сил описываются уравнениями [12, 16–18, 22–24]:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=\varphi_2,\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}=L(\varphi)+\frac{\alpha}{m}u\quad (t\in T_1,\ \ x\in D) \tag{1.1}$$

$$L(\varphi)=-\frac{1}{m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right)-\frac{a_1}{m}\varphi_2-\frac{b_1}{m}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\frac{1}{m}\overline{Q}$$

$$x=\frac{\tilde{x}}{l},\quad \varphi_1=\frac{\tilde{\varphi}}{l},\quad \varphi_2=\frac{1}{\sqrt{gl}}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tau},\quad t=\sqrt{\frac{g}{l}}\tau,\quad EI=\frac{\tilde{E}\tilde{I}}{Gl^2}$$

$$a_1 = \frac{\tilde{a}l\sqrt{gl}}{G}, \quad b_1 = \tilde{b}\frac{l}{G}, \quad m = \tilde{m}\frac{gl}{G}, \quad (0 < \mu \le \mu_0 < 1), \quad T_1 = [t_0, \ \bar{L}\mu^{-1}]$$

$$D \equiv (0, 1), \quad t_0 = \text{const} \ge 0, \quad \bar{L} = \text{const} > 0, \quad T_1 \subset I_1 \equiv [t_0, \ +\infty)$$

Здесь $u = u(t, x)$ – управление, $\alpha = \alpha(s)$ – заданная функция, учитывающая место приложения управляющих усилий, например, если управление приложено только в отрезке $[a, 1]$ оси, то полагается: $\alpha(x) \equiv 0$ при $x \in [0, a)$ и $\alpha(x) = 1$ при $x \in [a, 1]$; G – вес; l – длина летательного аппарата; τ – время; t – безразмерное время; $\tilde{x}$ – координата текущего сечения; $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tau, \tilde{x})$ – отклонение оси от равновесного состояния; φ_1 – безразмерное отклонение оси; $\tilde{E}\tilde{I}$ – жесткость при изгибе; $\tilde{m}$ – погонная масса; $\tilde{a}, \tilde{b}$ – коэффициенты аэродинамических сил; g – ускорение силы тяжести; $\bar{Q}$ – приращение поперечной нагрузки от веса при искривлении продольной оси системы. При горизонтальном полете $\bar{Q} \equiv 0$ [16, 17, 22]. Отметим, что изменение поперечных сил за счет тяжести при малых отклонениях от состояния равновесия представляет собой величину второго порядка малости [22]. В случае полета, близкого к вертикальному, момент силы тяжести равен [18, 22]:

$$M_g = \int_0^{\tilde{x}} \tilde{m}g[\tilde{\varphi}(\tau, \tilde{x}) - \tilde{\varphi}(\tau, \xi)]d\xi$$

Отсюда для распределенной нагрузки находим

$$Q_0 = \frac{\partial^2 M_g}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\left(q_0 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}}\right), \quad q_0 = q_0(\tilde{x}) = \int_0^{\tilde{x}} g\tilde{m}(\xi)d\xi$$

В безразмерных величинах при вертикальном полете имеем [17]:

$$\bar{Q} = \frac{m}{\tilde{m}g} Q_0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(q_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right), \quad q = \frac{q_0}{G} = \int_0^x m dx \tag{1.2}$$

В уравнении (1.1) коэффициенты a_1, b_1 должны определяться из решений уравнений аэродинамики [20]. При полете со сверхзвуковой скоростью выполняется закон плоских сечений [12], и определение аэродинамических сил упрощается [20, 21]. Давление потока при поперечном обтекании тонких тел определяется местным углом атаки

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{v_\infty} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}}$$

где v_∞ – скорость набегающего потока.

Пусть $c = c(\tilde{x})$ – размах тонкого крыла в сечении с координатой $\tilde{x}$. Нормальная составляющая аэродинамической силы в этом сечении

$$n(\tilde{x}, t) = -2\int_{-c(\tilde{x})/2}^{c(\tilde{x})/2} (p - p_\infty)dx = \frac{2\chi p_\infty v_\infty c(\tilde{x})}{a_\infty}\tilde{\alpha}, \quad \chi = \frac{c_p}{c_v}$$

где c_p, c_v – теплоемкости при постоянном давлении p и объеме v соответственно; p_∞, a_∞ – давление и скорость звука набегающего потока. Коэффициенты $\tilde{a}, \tilde{b}$ будут иметь вид

$$\tilde{a} = \frac{2\chi p_\infty c(\tilde{x})}{a_\infty}, \quad \tilde{b} = \frac{2\chi p_\infty v_\infty c(\tilde{x})}{a_\infty}$$

Для крыльев прямоугольной в плане формы $\tilde{a}, \tilde{b}$ постоянны. Нормальная составляющая аэродинамических сил при обтекании удлиненных тел вращения равна:

$$n(\tilde{x}, t) = \rho_\infty v_\infty^2 R \frac{dR}{d\tilde{x}} \tilde{\alpha}$$

где $R = R(\tilde{x})$ – радиус тела вращения, ρ_∞ – плотность набегающего потока. При этом

$$\tilde{a} = \rho_\infty v_\infty R \frac{dR}{d\tilde{x}}, \quad \tilde{b} = \rho_\infty v_\infty^2 R \frac{dR}{d\tilde{x}}$$

Если $R = R_0\sqrt{\tilde{x}}$, то коэффициенты $\tilde{a}, \tilde{b}$ от $\tilde{x}$ не зависят.

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда $\overline{Q}$ определяется выражением (1.2), т.е. полет близкий к вертикальному. Введем граничные условия функции $\varphi_1 = \varphi_1(t, x)$. У передней кромки тела ($x = 0$) отсутствует момент и сосредоточенная сила

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}\right)_{x=0} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}\right)\right]_{x=0} = 0 \tag{1.3}$$

У задней кромки ($x = 1$) отсутствует момент

$$(\partial^2 \varphi_1 / \partial x^2)_{x=1} = 0 \tag{1.4}$$

Управление движением летательного аппарата может производится, кроме u, управляющей силой u_s, приложенной в точке $x = 1$, т.е.

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}\right)\right]_{x=1} = u_s \tag{1.5}$$

Пусть заданы начальные распределения заданного процесса

$$\varphi_1(t, x)\Big|_{t=t_0} = \omega_0(x), \quad \varphi_2(t, x)\Big|_{t=t_0} = v_0(x), \ (t_0 \in T_1, \ x \in D)$$
$$\varphi_0(x) \equiv (\omega_0(x), \ v_0(x))^* \tag{1.6}$$

Управляемую краевую задачу (1.1)–(1.6) исследуем в предположении, что при заданных функциях $\omega_0(x)$, $v_0(x)$ удовлетворяющих необходимым условиям согласования на границе системы, краевая задача (1.1)–(1.6) имеет однозначное решение в классе непрерывных по t, x функций, имеющих непрерывные по t, x производные необходимых порядков. В качестве меры $\rho = \rho(\varphi)$, характеризующей отклонение функций $\varphi = (\varphi_1(t, x), \ \varphi_2(t, x))$, $\varphi_2(t, x) = \partial\varphi_1(t, x) / \partial t$, от значения $\varphi = 0$ невозмущенного процесса, выберем величину [3, 7, 9, 11]:

$$\rho(\varphi) = \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2\right] dx \tag{1.7}$$

Для (1.7) при нулевых граничных условиях имеем

$$\rho(\varphi) = (\varphi, \ \overline{M}\varphi), \quad \overline{M} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{1.8}$$

Пусть наперед заданы область возможных начальных состояний Ω_0 системы (1.1)–(1.6) формулой

$$\Omega_0 = \{\varphi: \ \rho \le \tilde{a}_1, \ \tilde{a}_1 > 0\} \tag{1.9}$$

и область допустимых текущих состояний $\Omega(t)$ системы (1.1)–(1.6) в форме

$$\Omega(t) = \{\varphi: \ \rho \le \eta(t), \quad 0 < \eta(t) \le \tilde{\eta}, \quad \tilde{\eta} = \text{const} > 0\} \tag{1.10}$$

где $\tilde{a}_1$, $\eta(t)$ – заданные число и ограниченная в области $T_1 \subset I_1$ функция соответственно, при этом справедливы условия

$$\tilde{a}_1 \le \eta(t_0), \quad \Omega_0 \subset \Omega(t_0) \tag{1.11}$$

Оптимальное управление, минимизирующее функционал

$$J_0 = \int_0^T W d\tau + W_0 \quad (T = \bar{L}\mu^{-1}) \tag{1.12}$$

$$W = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=1}^2 w_{ii}(x,\xi)\varphi_i(t,x)\varphi_i(t,\xi)dxd\xi + \int_0^1 \omega(x)u^2 dx + \omega_s u_s^2 \tag{1.13}$$

$$W_0 = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=1}^2 \omega_{ii}(x,\xi)\varphi_i(T,x)\varphi_i(T,\xi)dxd\xi \tag{1.14}$$

определяется на основе метода динамического программирования [16–18]. Здесь $w_{11} = w_{11}(x,\xi)$, $w_{22} = w_{22}(x,\xi)$, $\omega = \omega(x)$, $\omega_{11} = \omega_{11}(x,\xi)$, $\omega_{22} = \omega_{22}(x,\xi)$ – заданные весовые функции, при этом $\omega(1) = \omega_s$.

Для отыскания оптимального функционала V_0 основного уравнения динамического программирования в следующем виде:

$$V_0 = \int_0^1\int_0^1 \sum_{i,j=1}^2 v_{ij}(t,x,\xi)\varphi_i(t,x)\varphi_j(t,\xi)dxd\xi \tag{1.15}$$

имеем выражение [18, 22]:

$$K = \frac{dV_0}{dt} + W = \int_0^1\int_0^1 \left\{\left[\frac{\partial v_{11}}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2(v_{21}/m)}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(q\frac{\partial(v_{21}/m)}{\partial x}\right) + \frac{\partial(b_1 v_{21}/m)}{\partial x} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(EI\frac{\partial^2(v_{12}/m)}{\partial \xi^2}\right) - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(q\frac{\partial(v_{12}/m)}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial(b_1 v_{12}/m)}{\partial \xi} + \omega_{11}\right]\varphi_1(t,x)\varphi_1(t,\xi) +$$

$$+\left[\frac{\partial v_{12}}{\partial t} + v_{11}(t,x,\xi) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2(v_{22}/m)}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(q\frac{\partial(v_{22}/m)}{\partial x}\right) + \frac{\partial(b_1 v_{22}/m)}{\partial x} - \frac{a_1(\xi)}{m(\xi)}v_{12}\right]\times$$

$$\times\varphi_1(t,x)\varphi_2(t,\xi) + \left[\frac{\partial v_{21}}{\partial t} + v_{11}(t,x,\xi) - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(EI\frac{\partial^2(v_{22}/m)}{\partial \xi^2}\right) - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(q\frac{\partial(v_{22}/m)}{\partial \xi}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial(b_1 v_{22}/m)}{\partial \xi} - \frac{a_1(x)}{m(x)}v_{21}(t,x,\xi)\right]\varphi_2(t,x)\varphi_1(t,\xi) +$$

$$\left. + \left[\frac{\partial v_{22}}{\partial t} + v_{12}(t,x,\xi) + v_{21}(t,x,\xi) - v_{22}(t,x,\xi)\left(\frac{a_1(x)}{m(x)} + \frac{a_1(\xi)}{m(\xi)}\right) + w_{22}\right]\varphi_2(t,x)\varphi_2(t,\xi)\right\}\times$$

$$\times dxd\xi-\int_0^1\left\{\left[EI(\xi)\frac{\partial^2(\upsilon_{12}/m)}{\partial\xi^2}+\frac{\upsilon_{12}(t,x,\xi)q(\xi)}{m(\xi)}\right]\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}+\left[-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(EI\frac{\partial^2(\upsilon_{12}/m)}{\partial\xi^2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{b_1(\xi)}{m(\xi)}\upsilon_{12}(t,x,\xi)-q(\xi)\frac{\partial(\upsilon_{12}/m)}{\partial\xi}\right]\varphi_1(t,\xi)\right\}_{\xi=0}^{\xi=1}\varphi_1(t,x)dx-\int_0^1\left\{\left[EI(\xi)\frac{\partial^2(\upsilon_{22}/m)}{\partial\xi^2}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\upsilon_{22}(t,x,\xi)q(\xi)}{m(\xi)}\right]\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}+\left[-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(EI\frac{\partial^2(\upsilon_{22}/m)}{\partial\xi^2}\right)+\frac{b_1(\xi)}{m(\xi)}\upsilon_{22}(t,x,\xi)-q(\xi)\frac{\partial(\upsilon_{22}/m)}{\partial\xi}\right]\times$$

$$\left.\times\ \varphi_1(t,\xi)\right\}_{\xi=0}^{\xi=1}\varphi_2(t,x)dx-\int_0^1\left\{\left[EI(x)\frac{\partial^2(\upsilon_{21}/m)}{\partial x^2}+\frac{\upsilon_{21}(t,x,\xi)q(x)}{m(x)}\right]\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2(\upsilon_{21}/m)}{\partial x^2}\right)+\frac{b_1(x)}{m(x)}\upsilon_{21}(t,x,\xi)-q(x)\frac{\partial(\upsilon_{12}/m)}{\partial x}\right]\varphi_1(t,x)\right\}_{x=0}^{x=1}\varphi_1(t,\xi)d\xi-$$

$$-\int_0^1\left\{\left[EI(x)\frac{\partial^2(\upsilon_{22}/m)}{\partial x^2}+\frac{\upsilon_{22}(t,x,\xi)q(x)}{m(x)}\right]\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2(\upsilon_{22}/m)}{\partial x^2}\right)+\frac{b_1(x)}{m(x)}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\upsilon_{22}(t,x,\xi)-q(x)\frac{\partial(\upsilon_{22}/m)}{\partial x}\right]\varphi_1(t,x)\right\}_{x=0}^{x=1}\varphi_2(t,\xi)d\xi+\int_0^1\omega(x)u^2(t,x)dx+$$

$$+\int_0^1\frac{\alpha(x)u(t,x)}{m(x)}\left\{\int_0^1[\upsilon_{12}(t,\xi,x)+\upsilon_{21}(t,x,\xi)]\varphi_1(t,\xi)dx+\int_0^1[\upsilon_{22}(t,x,\xi)+\upsilon_{22}(t,\xi,x)]\times\right.$$

$$\left.\times\varphi_2(t,\xi)d\xi\right\}dx$$

Функции $\upsilon_{ij}=\upsilon_{ij}(t,x,\xi)$ должны удовлетворять конечным при $t=T$ условиям:

$$\upsilon_{ij}(T,x,\xi)=0\ \ (i\neq j),\quad \upsilon_{ii}(T,x,\xi)=\omega_{ii}(x,\xi)\ \ (i=1,2) \tag{1.16}$$

и граничным условиям:

$$\left[EI(\xi)\frac{\partial^2(\upsilon_{12}/m)}{\partial\xi^2}+\frac{q(\xi)\upsilon_{12}(t,x,\xi)}{m(\xi)}\right]_{\xi=0,\,\xi=1}=0$$

$$\left[-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(EI\frac{\partial^2(\upsilon_{12}/m)}{\partial\xi^2}\right)-q(\xi)\frac{\partial(\upsilon_{12}/m)}{\partial\xi}+\frac{b_1(\xi)\upsilon_{12}(t,x,\xi)}{m(\xi)}\right]_{\xi=0,\,\xi=1}=0$$

$$\left[EI(x)\frac{\partial^2(\upsilon_{21}/m)}{\partial x^2}+\frac{q(x)\upsilon_{12}(t,x,\xi)}{m(x)}\right]_{x=0,\,x=1}=0$$

$$\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2(\upsilon_{21}/m)}{\partial x^2}\right)-q(x)\frac{\partial(\upsilon_{21}/m)}{\partial x}+\frac{b_1(x)\upsilon_{21}(t,x,\xi)}{m(x)}\right]_{x=0,\,x=1}=0$$

$$\left[EI(\xi)\frac{\partial^2(\upsilon_{22}/m)}{\partial\xi^2}+\frac{q(\xi)\upsilon_{22}(t,x,\xi)}{m(\xi)}\right]_{\xi=0,\,\xi=1}=0 \tag{1.17}$$

$$\left[-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(EI\frac{\partial^2(\upsilon_{22}/m)}{\partial\xi^2}\right)-q(\xi)\frac{\partial(\upsilon_{22}/m)}{\partial\xi}+\frac{b_1(\xi)\upsilon_{22}(t,x,\xi)}{m(\xi)}\right]_{\xi=0,\,\xi=1}=0$$

$$\left[EI(x)\frac{\partial^2(v_{22}/m)}{\partial x^2}+\frac{q(x)v_{22}(t,x,\xi)}{m(x)}\right]_{x=0,\,x=1}=0$$

$$\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2(v_{22}/m)}{\partial x^2}\right)-q(x)\frac{\partial(v_{22}/m)}{\partial x}+\frac{b_1(x)v_{22}(t,x,\xi)}{m(x)}\right]_{x=0,\,x=1}=0$$

Из условия $\min\limits_u(K)$ получается оптимальное управление

$$u=-\frac{\alpha(x)}{2\omega(x)m(x)}\int_0^1\sum_{i=1}^{2}[v_{i2}(t,\xi,x)+v_{2i}(t,x,\xi)]\varphi_i(t,\xi)d\xi \tag{1.18}$$

$$u_s=-\frac{1}{2\omega_s m(1)}\int_0^1\sum_{i=1}^{2}[v_{i2}(t,\xi,1)+v_{2i}(t,1,\xi)]\varphi_i(t,\xi)d\xi \tag{1.19}$$

Здесь множители при функциях $\varphi_1(t,\xi)$, $\varphi_2(t,\xi)$ выступают как коэффициенты усиления обратной связи. Эти коэффициенты усиления являются функциями координат точек оси летательного аппарата. Отклонение разных точек оси вносят различный вклад в величину управления в зависимости от того, где расположена эта точка оси [18].

Выражения (1.18), (1.19) являются уравнениями регулятора, которые замыкают систему. Они представляют собой линейный оператор на множестве форм отклонений оси от прямолинейной формы и их скоростей. Для их реализации требуется знать и измерить значения $\varphi_1(t,\xi)$, $\varphi_2(t,\xi)$ в каждой точке оси и в каждый момент времени. В случае измерения значений $\varphi_1(t,\xi)$, $\varphi_2(t,\xi)$ в дискретных точках ξ_0, $\xi_1,\ldots,\xi_N$, по правилу трапеции из (1.18), (1.19) получим [16–18]:

$$u=-\frac{\alpha(x)}{2\omega(x)m(x)N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{2}d_j[v_{i2}(t,\xi_j,x)+v_{2i}(t,x,\xi_j)]\varphi_i(t,\xi_j) \tag{1.20}$$

$$u_s=-\frac{1}{2\omega_s m(1)N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{2}d_j[v_{i2}(t,\xi_j,1)+v_{2i}(t,1,\xi_j)]\varphi_i(t,\xi_j),\quad d_0=d_N=\tfrac{1}{2},$$

$$d_i=1\ (j\neq 0,N) \tag{1.21}$$

Управляющие усилия являются пропорциональными отклонениям $\varphi_1(t,\xi_j)$ и $\varphi_2(t,\xi_j)$ ($j=0,1,2,\ldots,N$).

Регулятор (1.18), (1.19) обладает переменным не только по оси x, но и по времени коэффициентом усиления. Значение уравнений (1.18), (1.19) заключается не только в том, что они определяют оптимальные уравнения регулятора, но и в том, что они дают структуру регулятора, показывают, как следует образовать, формировать управляющее воздействие по распределенным значениям отклонений $\varphi_1(t,x)$ и их скоростей $\varphi_2(t,x)$ в заданный момент времени.

Если закон распределения управления вдоль оси летательного аппарата задан, а требуется определить оптимальную зависимость от времени, то управление (1.18) следует заменить на [16–18]

$$u=-\frac{1}{2\omega_0}\int_0^1\sum_{i=1}^{2}\varphi_i(t,\xi)\int_0^1\frac{\alpha(x)}{m}[v_{i2}(t,\xi,x)+v_{2i}(t,x,\xi)]dxd\xi,$$

$$\omega_0=\int_0^1\omega(x)dx>0 \tag{1.22}$$

При этом закон распределения управляющих усилий вдоль оси, согласно (1.1), имеет вид $\alpha(x)u(t)/m(x)$. Если, например, $\alpha = 0$ при $x \in [0, a)$, $\alpha/m = 1$ при $x \in [a, 1)$, то управление $u(t)$ равномерно распределено по части $x \in [a, 1]$ оси летательного аппарата. Вне этой части управляющее усилие отсутствует.

Симметричные функции $v_{ij} = v_{ij}(t, x, \xi)$, входящие в управления (1.18), (1.20), (1.22), как следует из условия $K = 0$, должны удовлетворять следующей системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений [16–18] при конечных и граничных условиях (1.16), (1.17):

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial v_{11}}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2(v_{21}/m)}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(q\frac{\partial(v_{21}/m)}{\partial x}\right) + \frac{\partial(b_1 v_{21}/m)}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(EI\frac{\partial^2(v_{21}/m)}{\partial \xi^2}\right) - \\
-\frac{\partial}{\partial \xi}\left(q\frac{\partial(b_1 v_{12}/m)}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial(b_1 v_{12}/m)}{\partial \xi} + w_{11} - R_{11} - \overline{R}_{11} = 0 \\
\frac{\partial v_{12}}{\partial t} + v_{11} - \frac{a_1(\xi)}{m(\xi)}v_{12} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2(v_{22}/m)}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(q\frac{\partial(v_{22}/m)}{\partial x}\right) + \\
+\frac{\partial(b_1 v_{22}/m)}{\partial x} - R_{12} - \overline{R}_{12} = 0 \\
\frac{\partial v_{21}}{\partial t} + v_{11} - \frac{a_1(x)}{m(x)}v_{21} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(EI\frac{\partial^2(v_{22}/m)}{\partial \xi^2}\right) - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(q\frac{\partial(v_{22}/m)}{\partial \xi}\right) + \\
+\frac{\partial(b_1 v_{22}/m)}{\partial \xi} - R_{21} - \overline{R}_{21} = 0 \\
\frac{\partial v_{22}}{\partial t} + v_{12} + v_{21} - \left[\frac{a_1(x)}{m(x)} + \frac{a_1(\xi)}{m(\xi)}\right]v_{22} + w_{22} - R_{22} - \overline{R}_{22} = 0 \qquad (1.23)
\end{gathered}
$$

Здесь R_{ij} в случае управления (1.18) будет иметь представление

$$
R_{ij} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\alpha^2(\eta) r_{ij}(t, \xi, \eta, x, y)}{\omega(\eta) m^2(\eta)} d\eta
$$

а в случае управления (1.22) имеем

$$
R_{ij} = \frac{1}{4\omega_0^2}\int_0^1\int_0^1 \frac{\alpha(y)\alpha(\eta)}{m(y)m(\eta)} r_{ij}(t, \xi, \eta, x, y)\,dy\,d\eta, \qquad \overline{R}_{ij} = -\frac{1}{4\omega_s m^2(1)} r_{ij}(t, \xi, 1, x, 1)
$$

$$
\begin{gathered}
r_{11}(t, \xi, \eta, x, y) = [v_{12}(t, \xi, \eta) + v_{21}(t, \eta, \xi)][v_{12}(t, x, y) + v_{21}(t, y, x)] \\
r_{21}(t, \xi, \eta, x, y) = [v_{12}(t, \xi, \eta) + v_{21}(t, \eta, \xi)][v_{22}(t, x, y) + v_{22}(t, y, x)] \qquad (1.24) \\
r_{12}(t, \xi, \eta, x, y) = [v_{22}(t, \xi, \eta) + v_{22}(t, \eta, \xi)][v_{12}(t, x, y) + v_{21}(t, y, x)] \\
r_{22}(t, \xi, \eta, x, y) = [v_{22}(t, \xi, \eta) + v_{22}(t, \eta, \xi)][v_{22}(t, x, y) + v_{22}(t, y, x)]
\end{gathered}
$$

Отыскание точного решения для системы уравнений (1.23) является проблематичным в силу ее нелинейности и переменности ее коэффициентов. Поэтому для решения сформулированной основной задачи применим метод сравнения.

2. Условия технической устойчивости динамических состояний летательного аппарата. Для исследования свойств технической устойчивости рассматриваемого процесса зададим функционал

$$V[\varphi,t]=\int_0^1\left[\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right)^2-P\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right)^2\right]dx, \qquad (2.1)$$

$$P=\overline{Q}_1+a_1^0+b_1^0,\quad \overline{Q}_1=\sup_{t,x}(\overline{Q}),\quad a_1^0=\sup_x(a_1),\quad b_1^0=\sup_x(b_1).$$

Ставится задача: при заданном оптимальном управлении u (1.18), u_s (1.19), удовлетворяющем соотношениям (1.16), (1.17) и уравнениям (1.23), определить условия, обеспечивающие относительно меры $\rho=\rho(\varphi)$ (1.7) выполнение свойства

$$\varphi(t,x)\in\Omega(t),\qquad t\in T_1,\qquad x\in D \qquad (2.2)$$

для решений $\varphi(t,x)$ задачи (1.1)–(1.6), (1.18), (1.19) при заданных начальных значениях:

$$\varphi_0(x)\in\Omega_0,\quad t_0\in T_1,\quad \forall x\in D \qquad (2.3)$$

Для V (2.1) имеем следующую оценку снизу:

$$3V[\varphi,t]\geqslant\pi^2\int_0^1 dx\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2-P\int_0^1 dx\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+2\int_0^1 dx\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right)^2- \qquad (2.4)$$

$$-\frac{2}{\pi^2}P\int_0^1 dx\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right)^2+(1-P)\int_0^1 dx\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right)^2\geqslant(1-P)\left[\sup_x(\varphi_1)^2+\sup_x\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)\right]+$$

$$+\int_0^1 dx\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right)^2-\frac{1}{\pi^2}P\int_0^1 dx\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right)^2+(1-P)\int_0^1 dx\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right)^2\geqslant$$

$$\geqslant(1-P)\left[\sup_x(\varphi_1)^2+\sup_x\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\int_0^1 dx\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right)^2+\int_0^1 dx\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right)^2\right]\geqslant(1-P)\rho(\varphi)$$

Следовательно, имеем неравенство

$$V[\varphi,t]\geqslant(1-P)\rho(\varphi) \qquad (2.5)$$

Функционал $V[\varphi,t]$ согласно (2.5) положительно определен при условии $0<1-P\leqslant1$. Исходя из содержания рассматриваемого динамического процесса, будем рассматривать случай

$$0<1-P<1 \qquad (2.6)$$

Величина $\mu=1-P$ имеет смысл малого положительного параметра: $\mu\in(0,1)$. Условие (2.6) будет справедливым при выполнении неравенства [16–18]:

$$l(\tilde{Q}+\tilde{a}\sqrt{gl}+\tilde{b})<G,\quad \forall x\in D \qquad (2.7)$$

При (2.5)–(2.7) с помощью параметра μ зададим конечный промежуток времени T_1, на котором, согласно (1.1), рассматриваем динамическое поведение системы $T_1=[t_0,\overline{L}\mu^{-1}]$, $t_0\geqslant0$, $\overline{L}=\text{const}>0$ – величина, характеризующая надежность системы.

Пусть заданы функции $A(t)$, $\eta(t)$ вида

$$A(t)=\frac{M}{2}\exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right]\left\{\exp\left[\frac{2}{\mu+t_0}\right]-\exp\left[\frac{2}{\mu+t}\right]\right\}+b\exp\left[-\frac{1}{\mu+t}\right]\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right]$$

$$\eta(t)=\frac{M}{2}\left\{\exp\left[\frac{2}{\mu+t_0}\right]-\exp\left[\frac{2}{\mu+t}\right]\right\}+b\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right]\leqslant\tilde{\eta}$$

$$M,\tilde{\eta}=\text{const}>0 \tag{2.8}$$

при условиях

$$0<y_0\leqslant b,\qquad b=\text{const}>0,\qquad y_0=\text{const}>0 \tag{2.9}$$

Определим с помощью V (2.1) множество $C_{y_0}=\{\varphi:\ V[\varphi,t]\leqslant y_0,\ \ \forall t\in T_1,\ \ \forall x\in D\}$, которое по предположению удовлетворяет условию

$$\Omega_0\subset C_{y_0}\quad \text{при}\quad t=t_0 \tag{2.10}$$

Вычислим полную производную по t от функционала V (2.1) вдоль решений краевой задачи (1.1)–(1.6) при управлении (1.18), (1.19):

$$\frac{dV[\varphi(t,x),t]}{dt}=\frac{m(1)+EI(1)}{EI(1)m^2(1)}\varphi_2(t,1)\frac{1}{\omega_s}\int_0^1\sum_{i=1}^{2}[v_{i2}(t,\xi,1)+v_{2i}(t,\xi,1)]\varphi_i(t,\xi)d\xi+$$

$$+2\int_0^1 dx\left[\left(\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial x}\left(EI(x)\frac{\partial^2\varphi_1}{dx^2}\right)-P\frac{\partial\varphi_1(t,x)}{dx}\right)\frac{\partial\varphi_2(t,x)}{\partial x}+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial^4\varphi_1(t,x)}{\partial x^4}-\frac{a_1(x)}{m(x)}\varphi_2(t,x)-\frac{b_1(x)}{m(x)}\frac{\partial\varphi_1(t,x)}{\partial x}-\frac{1}{m(x)}\overline{Q}(x)\right)\varphi_2(t,x)-$$

$$\left.-\frac{\alpha^2(x)}{2\omega(x)m^2(x)}\varphi_2(t,x)\int_0^1\sum_{i=1}^{2}[v_{i2}(t,\xi,x)+v_{2i}(t,x,\xi)]\varphi_i(t,\xi)d\xi\right] \tag{2.11}$$

Рассмотрим систему (1.1)–(1.6), (1.20), (1.21) в заданной области

$$\overline{\Omega}=\left\{t,\,x,\,\varphi_i,\,\frac{\partial\varphi_i}{\partial t},\,\frac{\partial^k\varphi_1}{\partial x^k},\,\frac{\partial^i\varphi_2}{\partial x^i},\,m(x),\,\overline{Q}(x),\,P,\,a_1,\,b_1,\,\omega,v_{ij},\,EI(x),\,\frac{\partial(EI)}{\partial x}:\right.$$

$$(t\in T_1,\,x\in D),\ |\varphi_i|\leqslant n_i,\ \left|\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\right|\leqslant l_i,\ \left|\frac{\partial^k\varphi_1}{\partial x^k}\right|\leqslant c_k,\ \left|\frac{\partial^i\varphi_2}{\partial x^i}\right|\leqslant\gamma_i,\ \ m_{\min}\leqslant m(x)\leqslant m_{\max},$$

$$0\leqslant\overline{Q}(x)\leqslant\overline{Q}_{\max},\ \ 0\leqslant P<1,\ \ a_{1\min}\leqslant a_1\leqslant a_{1\max},\ \ b_{1\min}\leqslant b_1\leqslant b_{1\max},\ \ 0<\omega_{\min}\leqslant\omega\leqslant\omega_{\max},$$

$$|v_{ij}|\leqslant\theta_{ij},\quad 0<EI\leqslant K_1\equiv\max_x(EI),\ \ \left|\frac{\partial(EI)}{\partial x}\right|\leqslant K_2;\quad c_k,\gamma_i,m_{\min},m_{\max},b_{1\min},b_{1\max},$$

$$\left.\overline{Q}_{\max},\ \omega_{\min},\ \omega_{\max},\ K_1,\ K_2=\text{const}>0\ \ (i=1,2;\ \ j=1,2;\ k=1,\ldots,4)\right\}$$

Выражение справа в (2.11) обозначим $M(t)$. Рассмотрим функцию

$$\overline{\Phi}(t)=M(t)-\frac{\mu}{3(\mu+t)^2}\rho(\varphi(t,x)) \tag{2.12}$$

Пусть функция $\overline{\Phi}(t)$ (2.12) удовлетворяет условию

$$|\overline{\Phi}(t)|\leqslant\Phi(t)\equiv M\frac{1}{(\mu+t)^2}\exp\left[\frac{1}{\mu+t}\right] \tag{2.13}$$

где $M = \text{const} > 0$ – заданная величина, в частности, так

$$|M(t)| \leqslant M, \quad M \equiv \frac{m(1)+EI(1)}{EI(1)m^2(1)} n_2 \frac{1}{\omega_s} \sum_{i=1}^{2} [\theta_{i2} + \theta_{2i}] n_i +$$

$$+2\left[\left(\frac{1}{m_{\min}} K_2 c_2 + \frac{1}{m_{\min}} K_1 c_3 + c_1\right)\gamma_1 + \right.$$

$$\left. + \left(c_4 + \frac{a_{1\max}}{m_{\min}} n_2 + \frac{b_{1\max}}{m_{\min}} c_1 + \frac{\overline{Q}_{\max}}{m_{\min}}\right) n_2 + \frac{1}{2\omega_{\min} m_{\min}^2} c_2 \sum_{i=1}^{2} [\theta_{i2} + \theta_{2i}] n_i \right]$$

В области T_1 существует интеграл $\sigma(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(\tau) d\tau$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$. Рассмотрим функцию $z(t) = V[\varphi(t, x), t] - \sigma(t)$ вдоль решений задачи (1.1)–(1.6), (1.18), (1.19). Оценки для dV/dt при указанных выше условиях вдоль решений этой задачи приводят к неравенству [25, 26]:

$$\frac{dz(t)}{dt} \leqslant \frac{\mu}{(\mu + t)^2} [z(t) + \sigma(t)] \tag{2.14}$$

Из (2.14) следует задача Коши сравнения вида

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(\mu + t)^2} [y + \sigma(t)], \quad (t \in T_1) \tag{2.15}$$

$$y(t_0) = y_0 \geqslant V_0 \equiv V[\varphi_0(x), t_0] \quad (t_0 \in T_1, \ \forall x \in D) \tag{2.16}$$

Задача (2.15), (2.16) при указанных выше условиях имеет в области T_1 непрерывное решение:

$$y(t) = \frac{M}{2} \exp\left[-\frac{1}{\mu + t}\right] \left\{\exp\left[\frac{2}{\mu + t_0}\right] - \exp\left[\frac{2}{\mu + t}\right]\right\} +$$
$$+ y_0 \exp\left[\frac{1}{\mu + t_0}\right] \exp\left[-\frac{1}{\mu + t}\right] - \sigma(t) \tag{2.17}$$

Используя (2.17), по соответствующей теореме о дифференциальных неравенствах [25, 26] находим

$$z(t) \leqslant y(t) \quad (t \in T_1) \tag{2.18}$$

Из (2.18) вдоль решения задачи (1.1)–(1.6), (1.18), (1.19) при условиях (2.6), (2.7) имеем

$$V(t) \leqslant y(t) + \sigma(t) \quad (t \in T_1) \tag{2.19}$$

Используя (2.19), (2.9), получаем последовательность неравенств

$$V(t) \leqslant \frac{M}{2} \exp\left[-\frac{1}{\mu + t}\right] \left\{\exp\left[\frac{2}{\mu + t_0}\right] - \exp\left[\frac{2}{\mu + t}\right]\right\} +$$
$$+ y_0 \exp\left[\frac{1}{\mu + t_0}\right] \exp\left[-\frac{1}{\mu + t}\right] \leqslant A(t) \leqslant \eta(t) \tag{2.20}$$

где при $t \in T_1$ имеем

$$A(t) \leqslant \frac{M}{2}\exp\left[-\frac{1}{\mu+\bar{L}\mu^{-1}}\right]\left\{\exp\left[\frac{2}{\mu+t_0}\right]-\exp\left[\frac{2}{\mu+\bar{L}\mu^{-1}}\right]\right\}+ \\ + b\exp\left[-\frac{1}{\mu+\bar{L}\mu^{-1}}\right]\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right] \tag{2.21}$$

$$\eta(t) \leqslant \frac{M}{2}\left\{\exp\left[\frac{2}{\mu+t_0}\right]-1\right\}+b\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right] \leqslant \tilde{\eta}, \quad A(t_0) \equiv b, \quad V_0 \leqslant b$$

вдоль решения процесса (1.1)–(1.6), (1.18), (1.19) при условиях (2.6), (2.7).

Из неравенств (2.20), (2.21) получаем следующее свойство:

$$C_{A(t)} \subset \Omega(t), \quad C_{A(t)} = \{\varphi: \ V[\varphi, t] \leqslant A(t) \quad \forall t \in T_1, \quad \forall x \in D\} \tag{2.22}$$

Из полученного соотношения (2.22) и заданного условия (2.10) при (2.7), (2.9), (2.16) следует, что исходный процесс (1.1)–(1.6) при $\varphi_0 \in \Omega_0$, управлении (1.18), (1.19) и условиях (1.16), (1.17), (1.23) технически устойчив по мере ρ (1.7) на ограниченном интервале времени T_1.

При условии $t \to +\infty$ для (2.8) справедлива мажорация $A(t) \leqslant \eta(t)$. Оценка

$$A(t) \leqslant C, \quad C \equiv \frac{M}{2}\left\{\exp\left[\frac{2}{\mu+t_0}\right]-1\right\}+b\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right] \tag{2.23}$$

справедлива при любых $T_1 \subseteq I_1$, в чем убеждаемся из (2.20) при $t \to +\infty$. Следовательно, процесс (1.1)–(1.6), (1.18), (1.19) при $\varphi_0 \in \Omega_0$ технически устойчив на бесконечном интервале времени I_1 по мере ρ. При заданной мажоранте $\Phi(t)$ формы (2.13) условие асимптотической технической исходного процесса не имеет места.

Указанные здесь условия технической устойчивости исходного управляемого процесса (1.1)–(1.6), (1.18), (1.19) нарушаются, если параметры Q_0, $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ будут удовлетворять неравенству

$$P \geqslant 1 \tag{2.24}$$

которое, согласно (2.1), (2.7), равносильно неравенству

$$\frac{l}{G}(Q_0 + \tilde{a}\sqrt{gl} + \tilde{b}) \geqslant 1, \quad \forall x \in D \tag{2.25}$$

так как в этом случае условие положительной определенности (2.5) для функционала (2.1) не имеет места. Исходная система (1.1)–(1.6) при $\varphi_0 \in \Omega_0$, управлении (1.18), (1.19) и условиях (1.16), (1.17), (1.23) будет технически неустойчивой в T_1 или в I_1 по мере ρ, когда в этих областях функция $A(t)$ удовлетворяет условию

$$A(t) \to +\infty \quad \text{при} \quad t \in T_1, \quad \text{или} \quad t \in I_1 \tag{2.26}$$

В частности, условие (2.26) имеет место при $t_0 = 0$ и произвольных $t \geqslant 0$, когда $\mu \to 0$, что, как следует из условий (2.6), (2.7), будет соответствовать резкому возрастанию параметров, которые характеризуют исходный управляемый процесс (1.1)–(1.6), (1.18), (1.19), например, при резком увеличении приращения поперечной нагрузки Q_0 от искривления продольной оси системы при вертикальном полете. В последнем случае критическое значение Q_{0*} приращения поперечной нагрузки при искривлении продольной оси системы определяется с помощью неравенства (2.25) и равна величине

$$Q_{0*}=\frac{G}{l}-\tilde{a}\sqrt{gl}-\tilde{b} \tag{2.27}$$

Из (2.27) следует явная зависимость приращения поперечной нагрузки на вертикально движущуюся систему от других ее основных параметров. При управлении u (1.18), u_s (1.19), условиях (1.16), (1.17), (1.23) рассмотрим функции следующего вида:

$$\Phi_1(t,u_s)=\frac{m(1)+EI(1)}{EI(1)m^2(1)}\varphi_2(t,1)\frac{1}{\omega_s}\int_0^1\sum_{i=1}^{2}[\upsilon_{i,2}(t,\xi,1)+\upsilon_{2i}(t,1,\xi)]\varphi_i(t,\xi)\,d\xi+$$

$$+2\int_0^1 dx\left[\left(\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial x}\left(EI(x)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\right)\right)\frac{\partial\varphi_2(t,x)}{\partial x}+\frac{\partial^4\varphi_1(t,x)}{\partial x^4}\varphi_2(t,x)\right] \tag{2.28}$$

$$\Phi_2(t,x,u)=2\int_0^1 dx\left[\frac{b_1(x)}{m(x)}\frac{\partial\varphi_1(t,x)}{\partial x}\varphi_2(t,x)+\frac{1}{m(x)}\overline{Q}(x)\varphi_2(t,x)+\right.$$

$$\left.+\frac{b_1(x)}{m(x)}\frac{\partial\varphi_1(t,x)}{\partial x}\varphi_2(t,x)+\frac{1}{m(x)}\overline{Q}(x)\varphi_2(t,x)\right]+$$

$$+\frac{\alpha^2(x)}{2\omega(x)m^2(x)}\varphi_2(t,x)\int_0^1\sum_{i=1}^{2}[\upsilon_{i,2}(t,\xi,x)+\upsilon_{2i}(t,x,\xi)]\varphi_i(t,\xi)d\xi \tag{2.29}$$

предполагая их существование в области I_1. Пусть для функций $\Phi_1(t,u_s)$, $\Phi_2(t,x,u)$ при управлении u (1.18), u_s (1.19) и справедливости свойств (1.16), (1.17), (1.23) выполняются условия

$$\Phi_1(t,u_s)\geqslant 0,\quad \Phi_2(t,x,u)\geqslant 0,\quad \Phi_1(t,u_s)\leqslant\Phi_2(t,x,u),\quad \forall t\in I_1 \tag{2.30}$$

Тогда, согласно (2.11), управляемый динамический процесс (1.1)–(1.6), (1.18), (1.19) устойчив по Ляпунову. Следовательно, выше сформулированные достаточные условия технической устойчивости исходного управляемого процесса (1.1)–(1.6), (1.18), (1.19) на неограниченном интервале времени включают, согласно (2.28)–(2.30), условия устойчивости заданного процесса в смысле Ляпунова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абгарян К.А.* Устойчивость движения на конечном интервале // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1976. Т. 3. С. 43–124.
2. *Байрамов Ф.Д.* О технической устойчивости систем с распределенными параметрами при постоянно действующих возмущениях // Изв. вузов. Авиац. техника. 1974. Вып. 2. С. 5–11.
3. *Байрамов Ф.Д.* Обеспечение технической устойчивости управляемых систем // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. Новосибирск: Наука, 1991. С. 134–139.
4. *Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф.* Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. Киев: Наук. думка, 1985. 304 с.
5. *Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф.* Исследование задач по практической устойчивости и стабилизации движения // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 6.
6. *Кунцевич В.М., Лычак М.М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. М.: Наука, 1977. 400 с.
7. *Сиразетдинов Т.К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука, 1987. 232 с.
8. *Матвийчук К.С.* О методе сравнения для дифференциальных уравнений, близких к гиперболическим // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 11. С. 2009–2011.

9. *Матвийчук К.С.* Техническая устойчивость параметрически возбуждаемых распределенных процессов // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 210–218.
10. *Матвийчук К.С.* О технической устойчивости движения панели в газовом потоке // ПМТФ. 1988. № 6. С. 93–99.
11. *Матвийчук К.С.* Техническая теория устойчивости параметрически возбужденных панелей в газовом потоке // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 4. С. 122–131.
12. *Матвийчук К.С.* Об условиях технической устойчивости решений нелинейной краевой задачи о динамическом поведении в сверхзвуковом газовом потоке // Прикл. механика. 1998. Т. 34. № 4. С. 101–106.
13. *Матвийчук К.С.* Условия технической устойчивости управляемых процессов с распределенными параметрами // Проблемы управления и информатики. 1998. № 2. С. 84–93.
14. *Матвийчук К.С.* Об условиях технической устойчивости решений нелинейной краевой задачи, характеризующей параметрически возбуждаемые процессы в гильбертовом пространстве // Укр. мат. ж. 1999. Т. 51. № 3. С. 349–363.
15. *Летов А.М.* Математическая теория процессов управления. М.: Наука, 1981. 255 с.
16. *Сиразетдинов Т.К.* Об оптимальном управлении упругими летательными аппаратами // Автоматика и телемеханика. 1966. № 7. С. 5–19.
17. *Сиразетдинов Т.К.* К задаче синтеза оптимального управления упругими летательными аппаратами // Изв. вузов. Авиац. техника. 1967. № 4. С. 30–40.
18. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 480 с.
19. *Лурье К.А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 478 с.
20. *Липман Г.В., Рошко А.* Элементы газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 518 с.
21. *Черный Г.Г.* Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
22. *Колесников К.С.* Жидкостная ракета как объект регулирования. М.: Машиностроение, 1969. 298 с.
23. *Румянцев В.В.* К теории движения твердых тел с полостями, наполненными жидкостью // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 51–66.
24. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971. 440 с.
25. *Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н.* Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980. 481 с.
26. *Szarski J.* Differential inequalities. Warshawa: PWN, 1967. 256 p.

Киев

Поступила в редакцию
13.03.2000