МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2002

УДК 624.07:534.1

© 2002 г. Ю.Г. БАЛАКИРЕВ

ОБ УЛУЧШЕНИИ СХОДИМОСТИ МОДАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ СИНТЕЗА ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Классические способы улучшения сходимости функциональных рядов и их применение при решении краевых задач рассмотрены в известных работах А.Н. Крылова, Л.В. Канторовича и В.И. Крылова, А.И. Лурье [1–3]. Новая волна исследований в этой области связана с работами [4,5], в которых предложено введение корректирующих функций в задачах о собственных колебаниях упругих конструкций, [6], где разработаны способы улучшения сходимости функций Грина в задачах о стационарных колебаниях балок, [7], где предложено многократное выделение квазистатических составляющих в задачах динамического нагружения упругих конструкций с учетом негладкости внешних нагрузок. Способы ускорения сходимости рядов при расчете составных конструкций методом синтеза рассмотрены в работах [8–11]. В данной работе проведен критический анализ различных способов построения корректирующих функций и их влияния на сходимость модальных разложений в задачах синтеза динамических характеристик составных конструкций методом сил.

1. Задача синтеза динамических характеристик конструкций, составленных из двух (для простоты рассуждений) соединенных между собой упругих модулей (подконструкций), сводится к решению следующей краевой задачи:

$$\begin{gathered} L(\mathbf{U}^{(i)}) = \omega^2 B(\mathbf{U}^{(i)}),\ \ \mathbf{U}^{(i)} = (\mathbf{u}^{(i)T},\ \mathbf{N}^{(i)T})^T \\ M_j(\mathbf{U}^{(i)}) = 0 \ \text{ при } \ x = x_k^{(i)} \\ \mathbf{u}^{(1)}(x_0) = \mathbf{u}^{(2)}(x_0),\ \ \mathbf{N}^{(1)}(x_0) = \mathbf{N}^{(2)}(x_0)\ \ (j = 1,2\ldots,n;\ i = 1,2) \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $L(\ldots)$ – самосопряженный оператор, определяемый упругими свойствами модулей, $B(\ldots)$ – симметричный оператор инерционных свойств конструкции, $\mathbf{u}^{(i)}$ – вектор кинематических параметров (обобщенных смещений), $\mathbf{N}^{(i)}$ – вектор внутренних усилий и моментов, ω – частота колебаний, x_0 – координата сечения стыковки подконструкций, $x_k^{(1)} = 0$, $x_k^{(2)} = l$ – продольные координаты внешних торцов модулей и конструкции в целом, верхний индекс (i) $(i = 1,2)$ указывает номер модуля, l – длина конструкции, $M_j(\ldots)$ $(j = 1,2,\ldots, n)$ – операторы граничных условий на внешних торцах модулей.

Размерность n векторов кинематических $\mathbf{u}^{(i)}$ и силовых $\mathbf{N}^{(i)}$ факторов равна единице, если модули (и вся конструкция) совершают крутильные или продольные колебания, равна двум при изгибных колебаниях балочных модулей, равна трем при осесимметричных колебаниях оболочечных подконструкций, равна четырем при неосесимметричных колебаниях оболочечных модулей и так далее (по мере усложнения типов колебаний и изменения свойств модулей).

С использованием метода сил воздействие модулей друг на друга заменяется системой пока неизвестных гармонических сил и моментов в сечении стыковки модулей, которая удовлетворяет силовым условиям стыковки в краевой задаче (1.1). Отклики модулей на приложенные нагрузки подставляются в кинематические условия стыковки модулей. Приравнивая нулю определитель этой системы однородных алгебраических уравнений, получим уравнение для определения частот колебаний составной конструкции. Отклики модулей на приложенную систему ненулевых внешних сил и моментов, найденных из решения этих уравнений для каждой собственной частоты конструкции с учетом нормировки, описывают форму колебаний всей конструкции на участке каждого модуля.

Отклик модуля на внешние гармонические силы и моменты определяется из решения следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} &L(\mathbf{U}^{(i)}) = \omega^2 B(\mathbf{U}^{(i)}) \\ &M_j(\mathbf{U}^{(i)}) = 0 \quad \text{при} \quad x = x_k^{(i)} \\ &\mathbf{N}^{(i)}(x_0) = \mathbf{P}_0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Точное решение краевой задачи (1.2) удается получить в ограниченном числе частных случаев. Характерные особенности отклика: обобщенные перемещения и условия в сечениях модуля являются функциями частоты внешних сил и пространственной координаты, при совпадении (резонансе) частоты внешних сил с частотой собственных колебаний модуля со свободным торцом $x = x_0$ перемещения и усилия обращаются в бесконечность, т.е. отклик модуля является разрывной функцией частоты.

Отклик модуля можно определить в виде разложения по координатным функциям, удовлетворяющим граничным условиям в сечении $x = x_k^{(i)}$ и условиям свободного торца $x = x_0$ (т.е. $\mathbf{N}^{(i)}(x_0) = 0$). Тогда

$$\mathbf{U}^{(i)}(x,\omega) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(i)} \\ \mathbf{N}^{(i)} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} q_j^{(i)} \mathbf{U}_j^{(i)}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j^{(i)} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_j^{(i)}(x) \\ \mathbf{N}_j^{(i)}(x) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

С использованием метода Бубнова–Галеркина для определения обобщенных координат получим:

$$\left\| A^{(i)} - \omega^{(i)2} C^{(i)} \right\| Q^{(i)} = F^{(i)} \tag{1.4}$$

где $A^{(i)}$ и $C^{(i)}$ являются квадратными матрицами жесткостей и масс модуля соответственно, $Q^{(i)} = \{q_1^{(i)}, q_2^{(i)} \ldots, q_N^{(i)}\}^T$ – искомый вектор обобщенных координат, $F^{(i)}$ – вектор обобщенных сил.

К решению системы вида (1.4) задача сводится также при использовании метода конечных элементов. В этом случае $Q^{(i)}$ является вектором обобщенных смещений и усилий в узловых точках конечно-элементной модели. Решение системы (1.4) имеет вид:

$$Q^{(i)} = \left\| A^{(i)} - \omega^{(i)2} C^{(i)} \right\|^{-1} F^{(i)} \tag{1.5}$$

Матрица $\left\| A^{(i)} - \omega^{(i)2} C^{(i)} \right\|$ становится вырожденной при резонансе частоты ω внешних сил с одной из собственных частот $\sigma_j^{(i)}$ ($j = 1,2,\ldots, N$) колебаний модуля, которые определяются из обобщенной задачи о собственных значениях, получающейся из (1.4) при $F^{(i)} = 0$:

$$\left\| A^{(i)} - \sigma^{(i)2} C^{(i)} \right\| Y^{(i)} = 0, \quad Y^{(i)} = (y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_N^{(i)})^T \tag{1.6}$$

Из уравнений (1.6) приближенно вычисляются N собственных частот и форм колебаний модуля со свободным торцом $x = x_0^{(i)}$, но количество тонов, рассчитанных с удовлетворительной точностью, существенно меньше N.

В отдельных случаях удается получить точное решение краевой задачи о свободных колебаниях модуля. Эта задача описывается уравнениями (1.2) при $\mathbf{P}_0 = 0$. Тогда известен весь спектр собственных частот $\sigma_j^{(i)}$ и форм $\mathbf{U}_{*j}^{(i)} = \{\mathbf{u}_{*j}^{(i)T}\mathbf{N}_{*j}^{(i)T}\}^T$ $(j = 1, 2, \ldots, \infty)$ колебаний модуля.

Если обозначить символами $s_j^{(i)}$ коэффициенты разложения отклика по собственным формам колебаний, с помощью метода Бубнова–Галеркина из (1.2) получим

$$a_{s_j}^{(i)}(\sigma_{s_j}^{(i)2} - \omega^2)s_j^{(i)} = \bar{f}_{s_j}^{(i)} \quad (j = 1, 2, \ldots) \tag{1.7}$$

$$a_{s_j}^{(i)} = (B^{(i)}(\mathbf{U}_{*j}^{(i)}),\ \mathbf{U}_{*j}^{(i)}),\quad \bar{f}_{s_j}^{(i)} = (\mathbf{u}_{*j}^{(i)}(x_0), \mathbf{P}_0) \tag{1.8}$$

Отклик модуля при этом представится в виде:

$$\mathbf{U}^{(i)}(x, \omega) = \sum_j s_j^{(i)}\mathbf{U}_{*j}^{(i)}(x) = \sum_j \frac{\bar{f}_{s_j}^{(i)}}{a_{s_j}^{(i)}(\sigma_j^{(i)2} - \omega^2)}\mathbf{U}_{*j}^{(i)}(x) \tag{1.9}$$

Если собственные частоты и формы определены из (1.6) с использованием метода конечных элементов, то из системы (1.4) получим

$$Q^{(i)} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\bar{f}_{*j}^{(i)}}{a_{s*_j}^{(i)}(\sigma_{*j}^{(i)2} - \omega^2)} Y_{*j}^{(i)} \tag{1.10}$$

$$a_{s*_j}^{(i)} = Y_{*j}^{(i)T} C^{(i)} Y_{*j}^{(i)},\quad \bar{f}_{*j}^{(i)} = Y_{*j}^{(i)T} F^{(i)} \tag{1.11}$$

где $Y_{*j}^{(i)}, a_{s*_j}^{(i)}, \sigma_{*j}^{(i)}$ – собственный вектор, обобщенная масса и собственная частота j-го тона колебаний модуля.

Частоты колебаний составной конструкции и вектор усилий $\mathbf{P}_0$ определяются из кинематических условий стыковки модулей

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{P}_0, \mathbf{u}_i^{(1)}(l_1))\mathbf{u}_i^{(1)}(l_1)}{a_i^{(1)}(\sigma_i^{(1)2} - \omega^2)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{P}_0, \mathbf{u}_i^{(2)}(l_2))\mathbf{u}_i^{(2)}(l_2)}{a_i^{(2)}(\sigma_i^{(2)2} - \omega^2)} = 0 \tag{1.12}$$

Если учитывается конечное число собственных форм колебаний модуля (1.10), то отклик можно рассчитывать в ограниченном частотном диапазоне $(0, \Omega)$, где $\Omega < \sigma_N$. Расчет же отклика при бо́льших значениях частоты ω, строго говоря, проводить нельзя. Но в практических приложениях встречаются задачи, в которых проводится стыковка подсистем с существенно различающимися собственными частотами. Например, при расчете поведения космического аппарата с солнечными батареями обычно удерживается конечное число форм колебаний самого аппарата (диапазон частот от одного до нескольких сотен герц) и солнечных батарей (диапазон частот от сотых до десятых долей герца). Оправданием для расчетчика в таких случаях служит экспериментальное подтверждение слабого влияния отброшенных тонов колебаний на поведение системы.

Идея метода сил может быть использована и при прямом расчете частот и форм колебаний закрепленной по торцам конструкции. Заменим воздействие одной из опор на конструкцию вектором гармонических сил и моментов $\mathbf{P}_0$ и определим отклик полученной консольно закрепленной конструкции на эту внешнюю нагрузку. Подставим выражение для отклика в исходные граничные условия задачи. При использовании модального разложения для расчета отклика соответствующие уравнения для вычисления собственных частот и неизвестных компонентов вектора $\mathbf{P}_0$ следуют из приведенных выше соотноошений (1.7)–(1.12), если опустить в них слагаемые, связанные с наличием второго модуля. В этом случае, как и при синтезе динамических характеристик, возникает проблема улучшения сходимости модальных разложений.

2. Рассмотрим теперь вопрос об улучшении сходимости модальных разложений при расчете гармонического отклика модуля. Следуя работе [10], представим решение исходной задачи (1.2) в виде (индекс модуля опущен):

$$\mathbf{U}(x,\omega)=\mathbf{F}+\sum_{j=1}^{\infty} q_j\begin{pmatrix}\mathbf{u}_j(x)\\ \mathbf{N}_j(x)\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_0+\omega^2\mathbf{F}_1+\ldots+\omega^{2n^*}\mathbf{F}_{n^*}=\sum_{n=0}^{n^*}\omega^{2n}\mathbf{F}_n \tag{2.2}$$

Как и вектор $\mathbf{U}$, векторы $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_n$ содержат кинематические и силовые компоненты, т.е. $\mathbf{F}=(\mathbf{F}_u^T,\ \mathbf{F}_N^T)^T$, $\mathbf{F}_n=(\mathbf{F}_{un}^T,\ \mathbf{F}_{Nn}^T)^T$. Функции $\mathbf{F}_0$, $\mathbf{F},\ldots,\ \mathbf{F}_{n^*}$ определяются из решения рекуррентной последовательности статических задач:

$$L(\mathbf{F}_0)=0,\ \ M_j(\mathbf{F}_0)=0 \ \text{ при } \ x=x_k \ \text{ и } \ \mathbf{F}_{N0}=\mathbf{P}_0 \ \text{ при } \ x=l \tag{2.3}$$

$$L(\mathbf{F}_k)=\mathbf{F}_{k-1},\ \ M_j(\mathbf{F}_k)=0 \ \text{ при } \ x=x_k \ \text{ и } \ \mathbf{F}_{Nk}=0 \ \text{ при } \ x=l \ \ (k=1,2,\ldots,n^*)$$

Коэффициенты разложений q_j вычисляются по формулам:

$$q_j=\frac{((-L(\mathbf{F})+\omega^2B\mathbf{F}),\mathbf{U}_j)}{a_j(\sigma_j^2-\omega^2)}=\frac{\omega^{2n^*+2}}{\sigma_j^{2n^*+2}}\frac{(\mathbf{P}_0,\mathbf{u}_j(l))}{a_j(\sigma_j^2-\omega^2)} \tag{2.4}$$

Отметим, что разложение корректирующей функции по собственным формам колебаний имеет вид:

$$\mathbf{F}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n^*}\frac{\omega^{2k}}{\sigma_j^{2k+2}}\frac{(\mathbf{P}_0,\mathbf{u}_j(l))}{a_j}\mathbf{U}_j(x) \tag{2.5}$$

Частоты колебаний составной конструкции и вектор обобщенных усилий $\mathbf{P}_0$ определим, подставив найденные отклики в кинематические условия стыковки модулей

$$\sum_{n=0}^{n_1^*}\omega^{2n}\mathbf{F}_{un}^{(1)}+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\omega}{\sigma_i^{(1)}}\right)^{2n_1^*+2}\frac{(\mathbf{P}_0,\mathbf{u}_i^{(1)}(l_1))\mathbf{u}_i^{(1)}(l_1)}{a_i^{(1)}(\sigma_i^{(1)2}-\omega^2)}-$$

$$-\sum_{n=0}^{n_2^*}\omega^{2n}\mathbf{F}_{un}^{(2)}+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\omega}{\sigma_i^{(2)}}\right)^{2n_2^*+2}\frac{(\mathbf{P}_0,\mathbf{u}_i^{(2)}(l_2))\mathbf{u}_i^{(2)}(l_2)}{a_i^{(2)}(\sigma_i^{(2)2}-\omega^2)}=0 \tag{2.6}$$

В приведенных формулах предполагалось, что среди собственных частот σ_j каждого модуля нет нулевых и кратных частот и что в рассматриваемой конструкции вектор усилий $\mathbf{N}(x_0)$ не обращается в нуль ни для одной из форм колебаний. Появление в формулах (2.4), (2.6) множителя $\omega^{2n^*+2}/\sigma_j^{2n^*+2}$ принималось за свидетельство улучшения сходимости модального разложения. Анализ сходимости ряда (2.2) не проводился, так как сразу предполагалось, что корректирующий ряд будет содержать несколько первых членов. Поэтому математически введение корректирующей функции не нарушает строгости решения задачи. Однако практические расчеты показали, что при введении корректирующих рядов в решении появляются близкие разности больших чисел, а в ряде случаев происходит развал решения [11, 12]. Рассмотрим причину этого явления.

Из формул (1.7) имеем ($b_{s_j} = a_{s_j}^{-1} \bar{f}_{s_j}$):

$$s_j = \frac{b_{s_j}}{\sigma_j^2 - \omega^2} = b_{s_j} \times \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\omega^{2k}}{\sigma_j^{2k+2}} \text{ при } \omega < \sigma_j \\ -\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\sigma_i^{2k}}{\omega^{2k+2}} \text{ при } \omega > \sigma_j \end{cases} \tag{2.7}$$

Продолжим преобразование сумм в уравнениях (2.7):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^{2k}}{\sigma_j^{2k+2}} = \sum_{k=0}^{n^*} \frac{\omega^{2k}}{\sigma_j^{2k+2}} + \frac{\omega^{2n^*+2}}{\sigma_j^{2n^*+2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^{2k}}{\sigma_j^{2k+2}} = \underline{\sum_{k=0}^{n^*} \frac{\omega^{2k}}{\sigma_j^{2k+2}} + \frac{\omega^{2n^*+2}}{\sigma_j^{2n^*+2}} \frac{1}{\sigma_j^2 - \omega^2}}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_j^{2k}}{\omega^{2k+2}} = -\sum_{k=0}^{n^*} \frac{\sigma_j^{2k}}{\omega^{2k^*+2}} - \frac{\sigma_j^{2n^*+2}}{\omega^{2n^*+2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_j^{2k}}{\omega^{2k+2}} = \underline{-\sum_{k=0}^{n^*} \frac{\sigma_j^{2k}}{\omega^{2k+2}} + \frac{\sigma_j^{2n^*+2}}{\omega^{2n^*+2}} \frac{1}{\sigma_j^2 - \omega^2}} \tag{2.8}$$

Левые части двух формул (2.8) не совпадают между собой, каждая из них равна своей правой части только в соответствующем частотном диапазоне. В то же время при любых конечных значениях n^* (в каждой из формул они могут отличаться) правые части этих уравнений совпадают между собой во всем частотном диапазоне.

В оговоренных в (2.7) частотных диапазонах первые слагаемые в подчеркнутых правых частях формул (2.8) дают приближенное значение искомой величины, которое лишь подправляется вторым слагаемым. При достаточно больших значениях n^* второе слагаемое становится пренебрежимо малым, а в пределе при $n^* \to \infty$ в соответствии с формулой (2.7) оно вообще исчезает. При $\omega < \sigma_j$ в первой и при $\omega < \sigma_j$ во второй формуле (2.8) первые слагаемые дают заведомо ложные (не совпадающие с истинными по знаку) величины, так как в этих условиях они являются суммой конечного числа членов расходящегося ряда. Ни при каких n^* вторым слагаемым уже пренебрегать нельзя, так как только в нем содержится правильный результат и компенсация неверного первого слагаемого. С ростом n^* и с удалением ω внутрь области расходимости рядов (2.7) первое слагаемое растет по величине, а потому искомый результат становится малой разностью больших очень близких величин. Именно это и приводит к потере точности вычислений s_j и отклика подконструкции. Из формул (2.7), (2.8) очевидно, что для парциальных тонов колебаний подконструкции, обязательно учтенных в расчете, не нужно ничего улучшать, а величины s_j следует определять из формул (1.7).

В том случае, когда частота ω вынуждающих сил меньше частоты σ_1 основного тона колебаний модуля, подставим выражение (2.7) в соотношение (1.9) и получим с учетом формул (2.4), (2.5)

$$\mathbf{U}(x,\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n^*} \frac{\omega^{2k} b_{s_j}}{\sigma_j^{2k+2}} \mathbf{U}_j(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\omega^{2n^*+2}}{\sigma_j^{2n^*+2}} \frac{b_{s_j}}{\sigma_j^2 - \omega^2} \mathbf{U}_j(x) = \mathbf{F}(x,\omega) + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \mathbf{U}_j(x) \tag{2.9}$$

Как следует из формул (2.7), (2.8), при $n^* = -1$ решение (2.9) переходит в обычное разложение по собственным формам колебаний (при этом корректирующая функция $\mathbf{F}(x, \omega)$ равна нулю). Если же $n^* \to \infty$, то второе слагаемое в (2.9) стремится к нулю, т.е. корректирующая функция позволяет вычислить отклик с любой степенью точности без использования форм колебаний. Увеличение числа членов в корректирующем ряде улучшает сходимость модального разложения. Увеличение числа учитываемых форм колебаний также приводит к уточнению решения. Иными словами, в оговоренном частотном диапазоне в формуле (2.9) соединены два вида решения исходной задачи: корректирующий ряд представляет отклик модуля в виде степенного ряда по частоте, а модальный ряд – в виде ряда по пространственной координате.

В случае системы с конечным числом степеней свободы получим из (1.10):

$$\mathbf{Q}=\sum_{k=0}^{n^*}\omega^{2k}\mathbf{F}_k+\sum_{j=1}^{N}\frac{\omega^{2n^*+2}}{\sigma_{*j}^{2n^*+2}}\frac{f_{*j}}{a_{s*_j}(\sigma_{*j}^2-\omega^2)}\mathbf{Y}_{*j} \tag{2.10}$$

$$A\mathbf{F}_0=\mathbf{F};\ A\mathbf{F}_k=B\mathbf{F}_{k-1}\ (k=1,2,\ldots,n^*) \tag{2.11}$$

Для системы с конечным числом степеней свободы с помощью соотношения (2.8) можно получить формулу для случая, когда частота вынуждающих сил ω превышает значение частоты σ_N высшего тона колебаний системы [13]:

$$\mathbf{Q}=\sum_{k=0}^{n^*}\frac{\mathbf{\Psi}_k}{\omega^{2k+2}}+\sum_{j=1}^{N}\frac{\sigma_j^{2n^*+2}}{\omega^{2n^*+2}}\frac{(\mathbf{Q}_j^T,\mathbf{F})}{a_j(\sigma_j^2-\omega^2)}\mathbf{Q}_j \tag{2.12}$$

$$-B\mathbf{\Psi}_0=\mathbf{F},\ -B\mathbf{\Psi}_k+A\mathbf{\Psi}_{k-1}=0\ (k=1,2,\ldots,n^*) \tag{2.13}$$

В формуле (2.12), как и в формулах (2.9), (2.10), можно положить $n^*=-1$ или $N=0$, т.е. опустить одно из слагаемых. Оставшаяся сумма позволяет вычислить отклик модуля при любом значении частоты колебаний $\omega>\sigma_N$. Если известны все N собственных частот системы, то использование корректирующих функций становится излишним. Если же сохранить только первое слагаемое в (2.12), то оно сходится к точному решению при $n^*\to\infty$, причем, собственные частоты системы знать не нужно, но условие $\omega>\sigma_N$ должно быть обеспечено. Для системы с бесконечным частотным спектром аналоги формул (2.12), (2.13) отсутствуют.

Когда частота ω вынуждающих сил лежит в диапазоне (σ_r,σ_{r+1}), отклик модуля с учетом формул (2.7), (2.8) можно вычислить по формуле:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(x,\omega)=&-\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{n_1^*}\frac{\sigma_j^{2k}b_{s_j}}{\omega^{2k+2}}\mathbf{U}_j(x)+\sum_{j=1}^{r}\frac{\sigma_j^{2n_1^*+2}}{\omega^{2n_1^*+2}}\frac{b_{s_j}}{\sigma_j^2-\omega^2}\mathbf{U}_j(x)+\\&+\sum_{j=r+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n_2^*}\frac{\omega^{2k}b_{s_j}}{\sigma_j^{2k+2}}\mathbf{U}_j(x)+\sum_{j=r+1}^{\infty}\frac{\omega^{2n_2^*+2}}{\sigma_j^{2n_2^*+2}}\frac{b_{s_j}}{\sigma_j^2-\omega^2}\mathbf{U}_j(x)\end{aligned} \tag{2.14}$$

Если в соотношении (2.14) положить $n_1^*=n_2^*=-1$, то оно примет вид обычного модального разложения. В случае системы с конечным числом степеней свободы вместо (2.14) получим

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(x,\omega)=&-\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{n_1^*}\frac{\sigma_j^{2k}b_{s_j}}{\omega^{2k+2}}\mathbf{U}_j(x)+\sum_{j=1}^{r}\frac{\sigma_j^{2n_1^*+2}}{\omega^{2n_1^*+2}}\frac{b_{s_j}}{\sigma_j^2-\omega^2}\mathbf{U}_j(x)+\\&+\sum_{j=r+1}^{N}\sum_{k=0}^{n_2^*}\frac{\omega^{2k}b_{s_j}}{\sigma_j^{2k+2}}\mathbf{U}_j(x)+\sum_{j=r+1}^{N}\frac{\omega^{2n_2^*+2}}{\sigma_j^{2n_2^*+2}}\frac{b_{s_j}}{\sigma_j^2-\omega^2}\mathbf{U}_j(x)\end{aligned} \tag{2.15}$$

Очевидна аналогия первой и второй пары слагаемых с правыми частями формул (2.12) и (2.10). В рассматриваемом случае заданное значение частоты ω делит множество координатных функций на две части. Первые r функций соответствуют собственным частотам модуля, меньшим ω, и корректирующий ряд для них имеет вид, похожий на первое слагаемое формулы (2.12). Частоты последующих тонов колебаний превышают ω, а потому корректирующий ряд для этой части отклика имеет вид, похожий на первое слагаемое формулы (2.10). Итак, единой корректирующей функции, улучшающей сходимость модального разложения при произвольном значении частоты ω, не существует.

Улучшение сходимости ряда из r первых координатных функций (особенно при малых значениях r) представляется излишним. Если же опустить второе слагаемое, то вряд ли замена конечной модальной суммы на корректирующий ряд приведет к сокращению времени расчета (но для системы с конечным числом степеней свободы при оговоренных ограничениях на частоту ω в этом случае не требуется вычисление первых низших тонов колебаний). Поэтому обычно следует полагать $n_1^* = -1$. Формула (2.14) в этом случае примет вид

$$\mathbf{U}(x,\omega) = \sum_{j=1}^{r} \frac{b_{s_j}\mathbf{U}_j(x)}{\sigma_j^2 - \omega^2} + \sum_{j=r+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n_2^*} \frac{\omega^{2k} b_{s_j}}{\sigma_j^{2k+2}}\mathbf{U}_j(x) + \sum_{j=r+1}^{\infty} \frac{\omega^{2n_2^*+2}}{\sigma_j^{2n_2^*+2}} \frac{b_{s_j}\mathbf{U}_j(x)}{\sigma_j^2 - \omega^2} \tag{2.16}$$

Два последних слагаемых в формулах (2.14), (2.16) перепишем в виде:

$$\Delta\mathbf{U} = \sum_{k=0}^{n_2^*} \omega^{2k}\mathbf{F}_k^* + \sum_{j=r+1}^{\infty} \frac{\omega^{2n_2^*+2}}{\sigma_j^{2n_2^*+2}} \frac{b_{s_j}\mathbf{U}_j(x)}{\sigma_j^2 - \omega^2} = \mathbf{F}^* + \sum_{j=r+1}^{\infty} \frac{\omega^{2n_2^*+2}}{\sigma_j^{2n_2^*+2}} \frac{b_{s_j}\mathbf{U}_j(x)}{\sigma_j^2 - \omega^2} \tag{2.17}$$

Корректирующая функция $\mathbf{F}^*(x, \omega)$ в выражении (2.17) связана с корректирующей функцией $\mathbf{F}(x, \omega)$ в выражении (2.1) соотношением

$$\mathbf{F}^*(x,\omega) = \mathbf{F}(x,\omega) - \sum_{j=1}^{r} A_j U_j = \sum_{k=0}^{n_2^*} \omega^{2k}\mathbf{F}_k - \sum_{k=0}^{n_2^*}\sum_{j=1}^{r} b_{s_j} \frac{\omega^{2k}}{\sigma_j^{2k+2}}\mathbf{U}_j \tag{2.18}$$

Таким образом, корректирующая функция $\mathbf{F}^*(x, \omega)$ должна быть ортогональна по кинетической энергии к r первым собственным формам колебаний, частоты которых ниже частоты вынуждающих сил. В соответствии с формулами (2.6), (2.7) любым из слагаемых в (2.17) можно пренебречь, добиваясь необходимой точности за счет увеличения числа членов оставшегося ряда.

В работах [11, 12] предлагается учитывать в расчете необходимое число r собственных форм колебаний данного модуля, добавлять к ним корректирующую функцию, ортогональную по кинетической энергии к учтенным в расчете собственным формам колебаний, и вычислять отклик модуля по формуле

$$\mathbf{U}(x,\omega) = \sum_{j=1}^{r} \frac{b_{s_j}\mathbf{U}_j(x)}{\sigma_j^2 - \omega^2} + \sum_{k=0}^{n_2^*} \omega^{2k}\mathbf{F}_k^* = \sum_{j=1}^{r} \frac{b_{s_j}\mathbf{U}_j(x)}{\sigma_j^2 - \omega^2} + \sum_{k=0}^{n_2^*} \omega^{2k}\mathbf{F}_k - \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{n_2^*} \frac{\omega^{2k} b_{s_j}}{\sigma_j^{2k+2}}\mathbf{U}_j(x) \tag{2.19}$$

Необходимое число парциальных тонов колебаний модуля при синтезе динамических характеристик составной конструкции следует определять из условия $\sigma_K > \Omega$, где Ω – верхняя граница интересующих нас собственных частот составной конструкции. Применение формулы (2.19) в отличие от формулы (2.16) позволяет не вычислять собственные формы колебаний модуля с номерами выше r, но следует помнить, что формула (2.19) справедлива лишь в ограниченном частотном диапазоне $(0, \sigma_{r+1})$. Эта формула справедлива и для систем с конечным числом степеней свободы с учетом оговоренных выше особенностей вычисления величин b_{s_j}, σ_j и корректирующей функции $\mathbf{F}^*(x, \omega)$.

Для каждого из модулей можно предложить ввести корректирующий ряд, вид которого меняется при переходе из одного в другой частотный диапазон $(0, \sigma_1)$, (σ_1, σ_2), ..., (σ_N, σ_{N+1}), где $\sigma_{N+1} > \Omega$, σ_j – парциальные частоты колебаний рассматриваемого модуля. Отклик модуля можно вычислять по формуле:

$$\mathbf{U}(x,\omega)=\sum_{j=1}^{r}\frac{b_{s_j}\mathbf{U}_j(x)}{\sigma_j^2-\omega^2}+\mathbf{F}^*(x,\omega)+\sum_{j=r+1}^{\infty}\frac{\omega^{2n^*+2}}{\sigma_j^{2n^*+2}}\frac{b_{s_j}\mathbf{U}_j(x)}{\sigma_j^2-\omega^2} \tag{2.20}$$

но при этом значение r и корректирующий ряд изменять при переходе частоты ω из одного частотного диапазона для данного модуля в другой.

В качестве исходной информации нужно оговорить частотный диапазон $(0, \Omega)$, в котором необходимо вычислить частоты и формы составной конструкции. Для каждого модуля (как минимум) необходимо рассчитать все парциальные частоты и формы колебаний, которые лежат внутри оговоренного частотного диапазона. На первом участке $(0, \sigma_1)$ следует положить $r = 0$ и корректирующий ряд $\mathbf{F}^*(x, \omega)$ выбрать в виде степенного ряда по частоте (см. формулу (2.1)). В диапазоне (σ_1, σ_2) надо положить $r = 1$ и корректирующий ряд выбрать в виде $\mathbf{F}^*(x, \omega) = \mathbf{F}(x, \omega) - A_1\mathbf{U}_1(x)$, где величина A_1 задана из условия ортогональности $\mathbf{F}^*(x, \omega)$ и U_1 по кинетической энергии.

И далее в диапазоне (σ_j, σ_{j+1}) нужно положить $r = j$ и $\mathbf{F}^*(x, \omega) = \mathbf{F}(x, \omega) - \sum\limits_{i=1}^{j} A_i\mathbf{U}_i(x)$, где величины A_i определены из условия ортогональности $\mathbf{F}^*(x, \omega)$ и функций $\mathbf{U}_i$ по кинетической энергии. Такой подход не вносит сколько-нибудь значительного увеличения количества операций по сравнению с предложенным в работах [11, 12] способом выбора корректирующего ряда, так как при одновременном введении ортогональности корректирующей функции ко всем учтенным в расчете $\mathbf{U}_i$ или при постепенном введении ортогональности $\mathbf{F}^*(x, \omega)$ к каждой из них по мере перехода частоты через границу очередного интервала количество вычислений практически не изменяется. Однако и выгода от такой процедуры "постепенной ортогонализации", как показали приведенные ниже расчеты, не гарантирована.

3. В качестве примера рассмотрим задачу о расчете частот и форм продольных колебаний закрепленного по торцам стержня, имеющего постоянные по длине l инерционные (погонная масса m) и жесткостные (EF) характеристики.

Точное решение этой задачи известно. Частотное уравнение, выражения для частот, форм и приведенных масс колебаний (u – продольное смещение, N – продольное усилие) имеют вид:

$$\sin\lambda l = 0$$

$$\lambda_i=\frac{i\pi}{l},\quad \begin{pmatrix}u_i\\ N_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\lambda_i x\\ \lambda_i EF\cos\lambda_i x\end{pmatrix},\quad a_i=0.5l\quad (\lambda^2=m\omega^2(EF)^{-1})\quad (i=1,2,\ldots,\infty)$$

Стержень разделим сечением $x = l_1$ на два модуля. Рассмотрим задачу определения динамических характеристик полученной составной конструкции методом синтеза. Для каждого из модулей введем свою систему координат. Начало каждой из систем координат расположим в центре закрепленного торца модуля, а продольная ось $O_j x$ ($j = 1, 2$) направим от заделки к сечению стыковки.

Краевую задачу (1.1) запишем в виде

$$\begin{Vmatrix}0 & -\dfrac{d}{dx}\\ -\dfrac{d}{dx} & \dfrac{1}{EF}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}u^{(i)}\\ N^{(i)}\end{Vmatrix}+\lambda^2\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}u^{(i)}\\ N^{(i)}\end{Vmatrix}=0$$

$$u^{(1)}(0)=0,\quad u^{(2)}(0)=0,\quad \lambda^2=m\omega^2(EF)^{-1} \tag{3.1}$$

$$u^{(1)}(l_1)=-u^{(2)}(l_2),\quad N^{(1)}(l_1)=N^{(2)}(l_2)\quad (l_2=l-l_1)$$

При определении отклика каждого из выделенных модулей граничное условие на свободных торцах зададим так, чтобы силовое условие стыковки модулей в (3.1) при этом автоматически выполнялось

$$N^{(1)}(l_1)=P,\quad N^{(2)}(l_2)=P \tag{3.2}$$

Аналитические выражения для отклика модулей имеют вид

$$\begin{pmatrix} u^{(1)}(\lambda,x) \\ N^{(1)}(\lambda,x)\end{pmatrix}=\frac{1}{\lambda\cos\lambda l_1}\begin{pmatrix}\overline{P}\sin\lambda x \\ P\lambda\cos\lambda x\end{pmatrix}\quad (x\in(0,l_1)) \tag{3.3}$$

$$\begin{pmatrix} u^{(2)}(\lambda,x) \\ N^{(2)}(\lambda,x)\end{pmatrix}=\frac{1}{\lambda\cos\lambda l_2}\begin{pmatrix}\overline{P}\sin\lambda x \\ P\lambda\cos\lambda x\end{pmatrix}\quad (x\in(0,l_2))\quad \left(\overline{P}=\frac{P}{EF}\right)$$

Подставляя (3.3) в кинематическое условие стыковки в (3.1), получим частотное уравнение для составной конструкции

$$\frac{\sin\lambda l_1}{\lambda\cos\lambda l_1}+\frac{\sin\lambda l_2}{\lambda\cos\lambda l_2}=\frac{\sin\lambda(l_1+l_2)}{\lambda\cos\lambda l_1\cos\lambda l_2}=\frac{\sin\lambda l}{\lambda\cos\lambda l_1\cos\lambda l_2}=0 \tag{3.4}$$

Из уравнения (3.4) получаем точное решение для собственных частот колебаний. При этом формы колебаний конструкций на участке каждого модуля будут определяться выражениями (3.3) после подстановки в них $\lambda=\lambda_i$ и задания параметра $\overline{P}$ для выполнения того или иного условия нормировки.

Теперь выполним синтез динамических характеристик конструкции с использованием частот и форм колебаний каждого из модулей как консольно закрепленных стержней, которые определяются из краевой задачи (3.1) при граничных условиях $N^{(1)}(l_1)=N^{(2)}(l_2)=0$: частотное уравнение, частоты, формы и приведенные массы колебаний (u – продольное смещение, N – продольное усилие) имеют вид

$$\cos\lambda l_j=0,\quad \lambda_i^{(j)}=(2i-1)\pi/(2l_j)\quad (i=1,2,...,\infty)$$

$$\begin{pmatrix} u_i^{(j)} \\ N_i^{(j)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\lambda_i^{(j)}x \\ \lambda_i^{(j)}EF\cos\lambda_i^{(j)}x\end{pmatrix},\quad a_i^{(j)}=0.5l_j$$

Выпишем значения частотных параметров низших тонов колебаний для конструкции в целом и для каждого модуля:

конструкция в целом

$$\lambda_1=\frac{\pi}{l},\quad \lambda_2=\frac{2\pi}{l},\quad ...,\quad \lambda_k=\frac{k\pi}{l}$$

модуль i = 1

$$\lambda_1^{(1)}=\frac{\pi}{2l_1},\quad \lambda_2^{(1)}=\frac{3\pi}{2l_1},\quad ...,\quad \lambda_k^{(1)}=\frac{(2k-1)\pi}{2l_1}$$

модуль i = 2

$$\lambda_1^{(2)}=\frac{\pi}{2l_2},\quad \lambda_2^{(2)}=\frac{3\pi}{2l_2},\quad ...,\quad \lambda_k^{(2)}=\frac{(2k-1)\pi}{2l_2}$$

Вместо (3.3) для отклика модулей получим:

$$u^{(1)}(\lambda,x)=\sum_i\frac{\overline{P}\sin\lambda_i^{(1)}l_1\sin\lambda_i^{(1)}x}{a_i^{(1)}(\lambda_i^{(1)2}-\lambda^2)}$$

$$N^{(1)}(\lambda, x) = \sum_i \frac{P\lambda_i^{(1)} \sin\lambda_i^{(1)} l_1 \cos\lambda_i^{(1)} x}{a_i^{(1)}(\lambda_i^{(1)2} - \lambda^2)} \quad x \in (0, l_1)$$

$$u^{(2)}(\lambda, x) = \sum_i \frac{\overline{P} \sin\lambda_i^{(2)} l_2 \sin\lambda_i^{(2)} x}{a_i^{(2)}(\lambda_i^{(2)2} - \lambda^2)} \tag{3.5}$$

$$N^{(2)}(\lambda, x) = \sum_i \frac{P\lambda_i^{(2)} \sin\lambda_i^{(2)} l_2 \sin\lambda_i^{(2)} x}{a_i^{(2)}(\lambda_i^{(2)2} - \lambda^2)} \quad x \in (0, l_2)$$

Частотное уравнение для конструкции в целом будет иметь вид

$$\sum_i \frac{\sin\lambda_i^{(1)} l_1 \sin\lambda_i^{(1)} l_1}{a_i^{(1)}(\lambda_i^{(1)2} - \lambda^2)} + \sum_i \frac{\sin\lambda_i^{(2)} l_2 \sin\lambda_i^{(2)} l_2}{a_i^{(2)}(\lambda_i^{(2)2} - \lambda^2)} = 0 \tag{3.6}$$

После подстановки значений $\lambda_i^{(j)}$, $a_i^{(j)}$ и несложных преобразований частотное уравнение (3.6) примет вид с учетом известных формул сумм:

$$\frac{2l_1}{\pi} \sum_i \frac{1}{(2i-1)^2 - 4\lambda^2 l_1^2 \pi^{-2}} + \frac{2l_2}{\pi} \sum_i \frac{1}{(2i-1)^2 - 4\lambda^2 l_1^2 \pi^{-2}} = \tag{3.7}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg} \lambda l_1 + \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg} \lambda l_2 = \frac{\sin\lambda(l_1 + l_2)}{\lambda \cos\lambda l_1 \cos\lambda l_2} = 0$$

Итак, уравнение (3.6) при $i \to \infty$ переходит в уравнение (3.4), т.е. собственные частоты всей конструкции, найденные с использованием разложения по выбранным формам колебаний парциальных подсистем и с помощью стыковки точных аналитических решений для каждого модуля, совпадают.

Отметим наличие особенностей в частотном уравнении (3.4), зависящих от разбиения конструкции на модули. При выкладках предполагалось, что ни одна из частот системы не совпадает с парциальными частотами подсистем. При таком совпадении в сечении стыка реализуется значение $N_x^{(j)}(l_j) = 0$. Эти особые в методе сил случаи должны быть рассмотрены отдельно в каждом конкретном случае.

Если $l_1 = l_2 = 0.5l$, то при подстановке значений частотного параметра $\lambda = (2k - 1)\pi l^{-1}$ ($k = 1, 2, \ldots$) в нуль обращаются числитель и знаменатель формулы (3.4), а также знаменатели формулы (3.3). В этом частном случае частоты нечетных тонов колебаний закрепленного по торцам стержня совпадают с парциальными частотами консольно закрепленных модулей, а соответствующие им симметричные относительно среднего сечения стержня формы совпадают на общих участках с формами колебаний модулей (при согласованных нормировках).

Аналогичные особенности будут проявляться при $l_1 = Ml/N$ и $l_2 = (N - M)l/N$, где N, M ($N > M \geqslant 1$) – произвольные целые числа.

Применим теперь процедуру улучшения сходимости рядов с помощью корректирующих функций. Выражение для отклика модуля ищем в виде:

$$\begin{pmatrix} u_i^{(j)} \\ N_i^{(j)} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n^{(i)}} F_k^{(j)} \lambda^{2k} + \sum_{i=1}^{\infty} A_i^{(j)} \begin{pmatrix} \sin\lambda_i^{(j)} x \\ \lambda_i^{(j)} EF \cos\lambda_i^{(j)} x \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Корректирующие функции $F_k^{(j)}(x)$ являются решениями следующей рекуррентной последовательности статических задач:

$$\begin{Vmatrix} 0 & -\dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & \dfrac{1}{(EF)_j} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} F_{u0}^{(j)} \\ F_{N0}^{(j)} \end{Vmatrix} = 0, \quad F_{u0}^{(j)}(0) = 0, \quad F_{N0}^{(j)}(l_j) = P$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & -\dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & \dfrac{1}{(EF)_j} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} F_{uk}^{(j)} \\ F_{Nk}^{(j)} \end{Vmatrix} = F_{u,k-1}^{(j)}, \quad F_{uk}^{(j)}(0)=0, \quad F_{Nk}^{(j)}(l_j)=0 \quad (k=1,2,\dots,n^{(j)}) \tag{3.9}$$

Решения краевых задач (3.9) имеют вид

$$F_0^{(j)} = \begin{Vmatrix} \overline{P}x \\ P \end{Vmatrix}, \quad F_1^{(j)} = \frac{1}{6}\begin{Vmatrix} \overline{P}(3xl^2 - x^3) \\ 3P(l^2 - x^2) \end{Vmatrix}, \quad F_2^{(j)} = \frac{1}{120}\begin{Vmatrix} \overline{P}(x^5 - 10x^3l^2 + 25xl^4) \\ 5P(x^4 - 6x^2l^2 + 5l^4) \end{Vmatrix}, \dots \tag{3.10}$$

Частотное уравнение для конструкции примет форму

$$\sum_{k=0}^{n^{(1)}} F_{uk}^{(1)}(l_1)\lambda^{2k} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda_i^{(1)}}\right)^{2n^{(1)}+2} \frac{\sin^2 \lambda_i^{(1)} l_1}{a_i^{(1)}(\lambda_i^{(1)2} - \lambda^2)} +$$

$$+\sum_{k=0}^{n^{(2)}} F_{uk}^{(2)}(l_2)\lambda^{2k} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda_i^{(2)}}\right)^{2n^{(2)}+2} \frac{\sin^2 \lambda_i^{(2)} l_2}{a_i^{(2)}(\lambda_i^{(2)2} - \lambda^2)} = 0 \tag{3.11}$$

Пусть для определенности $l_1 = 0.97l$, $l_2 = 0.03l$. Из приведенного выше анализа частот колебаний модулей и всей конструкции следует, что при этих данных парциальные частоты с номерами $49N$ для первого модуля и $2N$ для второго модуля совпадают с собственными частотами с номерами $50N$ ($N = 1, 2, \dots$) всего стержня. Соответствующие формы колебаний стержня составляются из откликов модулей на соответствующих участках (например, при $P_0 = 1$, но значение продольного усилия в этом сечении стержня для этих форм колебаний равно нулю). Остальные частоты колебаний стержня определяются из частотного уравнения (3.11).

Низшая парциальная частота второго модуля лежит выше шестнадцатого тона колебаний конструкции, вторая парциальная частота совпадает с пятидесятой частотой стержня, а третья – выше частоты восемьдесят третьего тона стержня, т.е. $\sigma_1^{(2)} > \lambda_{16}$, $\sigma_2^{(2)} = \lambda_{50}$, $\sigma_3^{(2)} > \lambda_{83}$. Аналогичные сопоставления для первого модуля: $\sigma_1^{(1)} < \lambda_1$, $\sigma_2^{(1)} < \lambda_2$, ..., $\sigma_{49}^{(1)} = \lambda_{50}$, $\sigma_{50}^{(1)} < \lambda_{51}$ и т.д. Эти сопоставления показывают, что при расчете шестнадцати тонов конструкции отклик второго модуля можно с любой точностью приблизить корректирующим рядом. Для практических же расчетов трех–четырех тонов достаточно учесть в корректирующем ряде несколько первых членов. В отклике же первого модуля степенной корректирующий ряд искажает вклад первой парциальной координатной функции уже при расчете первого тона колебаний стержня и лучше использовать корректирующий ряд, ортогональный к первой парциальной форме колебаний первого модуля. При расчете второго тона колебаний корректирующий ряд нужно уже ортогонализировать и ко второй парциальной форме колебаний первого модуля и т.д. С учетом этого частотное уравнение (3.11) перепишем в виде:

$$\left(\sum_{k=0}^{n^{(1)}} F_{uk}^{(1)}(l_1)\lambda^{2k} - \sum_{n=1}^{r}\sum_{k=0}^{n^{(1)}} A_n u_n(l_1)\right) + \sum_{i=1}^{r} \frac{\overline{P}\sin^2 \lambda_i^{(1)} l_1}{a_i^{(1)}(\lambda_i^{(1)2} - \lambda^2)} + \tag{3.12}$$

$$+\sum_{i=r+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda_i^{(1)}}\right)^{2n^{(1)}+2} \frac{\overline{P}\sin^2 \lambda_i^{(1)} l_1}{a_i^{(1)}(\lambda_i^{(1)2} - \lambda^2)} + \sum_{k=0}^{n^{(2)}} F_{uk}^{(2)}(l_2)\lambda^{2k} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda_i^{(2)}}\right)^{2n^{(1)}+2} \frac{\overline{P}\sin^2 \lambda_i^{(2)} l_2}{a_i^{(2)}(\lambda_i^{(2)2} - \lambda^2)} = 0$$

В уравнении (3.12) $r = 1$ при поиске первой частоты конструкции, $r = 2$ при поиске второй частоты составной конструкции и т.д. Соответственно этому и выражение для формы $u_r(x)$ r-го тона колебаний конструкции на участке первого модуля должно

Таблица 1

n	2	10	100	100000
λ_{*1}	3.52015	3.20143	3.14792	3.14160
λ_{*2}	–	6.41237	6.29552	6.28320
λ_{*3}	–	9.61736	9.44251	9.42480

Таблица 2

k	0	1	2	3	5	10
λ_{*1}	4.85776	3.16286	3.14195	3.14162	3.14159	3.14159
λ_{*2}	8.09687	8.02467	6.33094	6.28651	6.28329	6.28319
λ_{*3}	11.335564	11.32927	10.79250	9.48191	9.42652	9.42480

меняться

$$u_r(x)=\left(\sum_{k=0}^{n^{(1)}} F_{uk}^{(1)}(x)\lambda_r^{2k}-\sum_{n=1}^{r}\sum_{k=0}^{n^{(1)}} A_n\sin\lambda_n^{(1)}x\right)+\sum_{i=1}^{r}\frac{\overline{P}\sin\lambda_i^{(1)}l_1\sin\lambda_i^{(1)}x}{a_i^{(1)}(\lambda_i^{(1)2}-\lambda_r^2)}+ \tag{3.13}$$

$$+\sum_{i=r+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_r}{\lambda_i^{(1)}}\right)^{2n^{(1)}+2}\frac{\overline{P}\sin\lambda_i^{(1)}l_1\sin\lambda_i^{(1)}x}{a_i^{(1)}(\lambda_i^{(1)2}-\lambda_r^2)}$$

Коэффициенты A_n в (3.12), (3.13) выбираются из условия ортогональности корректирующей функции к n-ой парциальной форме колебаний первого модуля. Параметр $\overline{P}$ в частотном уравнении сократится, а в выражениях для форм колебаний его значение следует задать в соответствии с выбранной нормировкой.

Результаты расчета собственных частот колебаний стержня с использованием стыковки аналитических выражений для отклика модулей (уравнение (3.4)) совпали с приведенным выше точным решением. В табл. 1 приведены три низшие собственные частоты колебаний стержня, полученные с использованием модальных разложений при расчете отклика каждого модуля (частотное уравнение (3.6)). Прочерк в таблице означает остутствие собственной частоты в рассмотренном частотном интервале, $\lambda_* = \lambda l$ – безразмерный частотный параметр.

В табл. 2 приведены собственные частоты трех низших тонов колебаний стержня, вычисленные с учетом корректирующих функций. Корректирующие функции двух модулей содержали по три члена степенного ряда по λ. Ортогонализация корректирующей функции второго модуля к его координатным функциям не проводилась. Число k в этой таблице указывает количество координатных функций, к которым проводилась ортогонализация корректирующей функции первого модуля. При отсутствии ортогонализации (колонка $k = 0$) результаты расчета оказываются ошибочными.

Проведенный численный анализ практически подтверждает бесперспективность постепенного наращивания числа k в процессе расчета. Вместе с тем уточним рекомендации работ [11, 13]. Для каждого модуля величина k должна быть такой, чтобы его парциальная частота ω_{k+1} была в два – три раза выше значения наибольшей из рассчитываемых частот колебаний составной конструкции. Естественно, что количество учитываемых в расчете координатных функций модуля должно быть не меньше k.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаменальных исследований (код проекта 99-01-00940).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Крылов А.Н.* Лекции о приближенных вычислениях. М.: Гостехтеоретиздат, 1954. 398 с.
2. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М. – Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. 695 с.
3. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
4. *Шмаков В.П.* Об одном приеме, упрощающем применение метода Бубнова – Галеркина к решению краевых задач // Инж. ж. МТТ. 1967. № 5. С. 129–136.
5. *Шмаков В.П.* Построение корректирующих функций в методе Бубнова – Галеркина // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 2. С. 80–92.
6. *Азаров В.Л., Лупичев Л.Н., Тавризов Г.А.* Математические методы исследования сложных физических систем. М.: Наука, 1975. 342 с.
7. *Лиходед А.И.* О сходимости метода разложения по собственным формам колебаний в задачах динамического нагружения // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 180–188.
8. *Craig R.R., Bampton C.C.* Coupling of substructures for dynamic analysis // AIAA J. 1968. V. 6. № 7. P. 1313–1319.
9. *Craig R.R., Chang C.-J.* Free-interface methods of substructure coupling for dynamic analysis // AIAA J. 1976. V. 14. № 11. P. 1633–1635.
10. *Шмаков В.П.* Метод синтеза динамических характеристик упругих модульных конструкций // Вест. МГТУ. Сер. Машиностроение. 1991. № 1. С. 4–10.
11. *Григорьев В.Г.* О вычислительных аспектах применения корректирующих рядов при синтезе подконструкций по методу свободных границ // Вестн. МГТУ. Сер. Машиностроение. 1998. № 4. С. 17–27.
12. *Шмаков В.П., Григорьев В.Г.* Синтез динамических характеристик аналитических и дискретных модулей подконструкций с использованием корректирующих рядов // Вестн. МГТУ. Сер. Машиностроение. 2000. № 2. С. 5–19.
13. *Шмаков В.П.* Аппроксимация гармонического отклика упругой конечномерной системы в зависимости от частотного диапазона внешнего воздействия // Вестн. МГТУ. Сер. Машиностроение. 1995. № 2. С. 96–110.

Королев

Поступила в редакцию
7.05.2001