

УДК 539.3:534.1

© 2002 г. Ю.Э. СЕНИЦКИЙ

ДИНАМИКА НЕОДНОРОДНОЙ НЕПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

На основе соотношений уточненной теории, учитывающей деформации сдвига и инерцию вращения поперечных сечений [1], формулируется осесимметричная начально-краевая задача для упруго закрепленной неоднородной сферической оболочки. Изменение физико-механических характеристик материала по толщине конструкции является следствием действия на одну из ее поверхностей радиации, температурных и химических полей, так называемых факторов наведенной неоднородности [2]. В расчетной схеме это изменение учитывается путем введения двух произвольных безразмерных положительно определенных функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, (z – толщинная координата).

Новое, точное в рамках сформулированной модели, решение получено методом разложения по собственным вектор-функциям в форме конечных интегральных преобразований [3, 4]. Существенным представляется учет в соответствующей спектральной задаче и формулах обращения кратных собственных значений (внутренних резонансов) [5–7], оказывающих влияние на динамическую реакцию непологих оболочек. В процессе решения вводятся также силы внутреннего трения в соответствии со скорректированной частотно-независимой моделью Фойхта [8, 9]. В такой постановке рассматриваемая задача ранее не исследовалась.

Проблема интегрируемости в неоднородной теории упругости изучена достаточно полно только при статическом нагружении [10]. Значительно меньше внимания уделялось задачам динамики непрерывно-неоднородных оболочек. Действительно, замкнутые для сформулированных математических моделей решения динамических задач построены лишь для пологих сферических оболочек [11, 12]. Эти результаты получены без учета сил упруговязкого сопротивления и внутренних резонансов, которые не являются характерными для таких оболочек. Вместе с тем, как показано в [5, 6] на основе асимптотического анализа уравнений движения, резонансное взаимодействие изгибных и тангенциальных форм колебаний в непологих оболочках не является исключительным, и должно учитываться при определении их частотного спектра. Однако этот вопрос остается открытым при исследовании динамической реакции даже однородных оболочек.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать в сферических координатах (φ , θ) оболочку толщиной $h = h_1 + h_2$ и радиуса кривизны нейтральной поверхности $R = \text{const}$, нагруженную распределенной нормальной $q_z^*(\theta, t)$, тангенциальной $q_\theta^*(\theta, t)$ и моментной $M^*(\theta, t)$ осесимметричной нагрузкой. Исследуется наиболее общий для осесимметричной деформации случай опирания оболочки на контур с тремя упругими характеристиками, коэффициенты жесткости которого относительно тангенциальных, нормальных перемещений и углов поворота соответственно r_{11}^* , r_{22}^* , r_{33}^* . Полагаем, что модуль упругости $E(z)$ и плотность материала $\rho(z)$ изменяются произвольным образом по толщине конструкции

$$E(z) = E_0 f_1(z), \quad \rho(z) = \rho_0 f_2(z), \quad \nu = \text{const} \quad (1.1)$$

где E_0 , ρ_0 – характеристики однородной оболочки; ν – коэффициент Пуассона.

Вводя обозначения $U^*(\theta, t)$, $W^*(\theta, t)$, $\Psi(\theta, t)$ для тангенциальной, нормальной компонент вектора перемещений нейтральной поверхности и угла поворота в меридиональной плоскости, геометрические уравнения для сферической оболочки с конечной сдвиговой жесткостью в случае ее осесимметричной деформации записываются следующим образом [1]:

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^0 + z\chi_\theta, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi^0 + z\chi_\varphi, \quad \gamma_{\theta z} = \gamma_{\theta z}^0 - z\chi_{\theta z} \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_\theta^0 = R^{-1} \left(\frac{\partial U^*}{\partial \theta} + W^* \right), \quad \varepsilon_\varphi^0 = R^{-1} (U^* \operatorname{ctg} \theta + W^*), \quad \gamma_{\theta z}^0 = R^{-1} \left(\frac{\partial W^*}{\partial \theta} - U^* \right) + \Psi$$

$$\chi_\theta = R^{-1} \partial \Psi / \partial \theta, \quad \chi_\varphi = R^{-1} \Psi \operatorname{ctg} \theta, \quad \chi_{\theta z} = R^{-1} \Psi$$

Здесь ε_θ , ε_φ , $\gamma_{\theta z}$, χ_θ , χ_φ , $\chi_{\theta z}$ — соответствующие компоненты линейных и угловой деформаций, а также кривизны изгиба и кручения, причем нулевой индекс относится к нейтральной поверхности оболочки. Если определить положение нейтральной поверхности из условия

$$\int_{-h_1}^{h-h_1} f_1(z) z dz = 0 \quad (1.3)$$

то физические уравнения, связывающие погонные усилия и деформации, записываются так же, как и для однородных оболочек. При наличии (1.2) имеем

$$\begin{aligned} N_\theta^* &= CR^{-1} \left[\frac{\partial U^*}{\partial \theta} + \nu U^* \operatorname{ctg} \theta + (1 + \nu) W^* \right] = CN_\theta, \quad N_\varphi^* = \\ &= CR^{-1} \left[\nu \frac{\partial U^*}{\partial \theta} + U^* \operatorname{ctg} \theta + (1 + \nu) W^* \right] = CN_\varphi, \quad M_\theta^* = \\ &= DR^{-1} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \nu \Psi \operatorname{ctg} \theta \right] = DR^{-1} M_\theta \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$M_\varphi^* = DR^{-1} \left[\nu \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \Psi \operatorname{ctg} \theta \right] = DR^{-1} M_\varphi, \quad Q_\theta^* = Ck^2 \left[R^{-1} \left(\frac{\partial W^*}{\partial \theta} - U^* \right) + \Psi \right] = CQ_\theta$$

$$C = E_0 h (1 - \nu^2)^{-1} n_1, \quad D = E_0 h^3 [12(1 - \nu^2)]^{-1} n_2 \quad (1.5)$$

$$n_1 = h^{-1} \int_{-h_1}^{h_2} f_1(z) dz, \quad n_2 = h^{-3} \int_{-h_1}^{h_2} f_1(z) z^2 dz, \quad k^2 = \frac{1}{2} k_1 (1 - \nu) \quad (1.6)$$

где N_θ^* , N_φ^* , M_θ^* , M_φ^* , Q_θ^* — нормальные усилия, изгибающие моменты и поперечная сила; C и D — соответствующие жесткости оболочки; n_1 , n_2 — безразмерные коэффициенты неоднородности упругих свойств оболочки; k_1 — коэффициент поперечного сдвига [1] (без звездочек обозначены соответствующие безразмерные погонные усилия).

Составляя выражения для кинетической и потенциальной энергии деформации T и Π , работы внешних сил Π_1 и реактивных усилий Π_2 на контуре $\Gamma(\theta = \theta_0)$, а затем, применяя вариационный принцип Гамильтона — Остроградского [13]:

$$\delta \int_0^t (T - \Pi + \Pi_1 + \Pi_2) dt = 0$$

получаем следующую систему дифференциальных уравнений осесимметричного дви-

жения оболочки и граничные условия в усилиях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\theta}^*}{\partial \theta} + (N_{\theta}^* - N_{\varphi}^*) \operatorname{ctg} \theta + Q_{\theta}^* - \rho_0 h R \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right] m_1 \frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} &= q_{\theta}^* R \\ \frac{\partial Q_{\theta}^*}{\partial \theta} + Q_{\theta}^* \operatorname{ctg} \theta - (N_{\theta}^* + N_{\varphi}^*) - \rho_0 h R \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right] m_1 \frac{\partial^2 W^*}{\partial t^2} &= q_z^* R \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{\theta}^*}{\partial \theta} + (M_{\theta}^* - M_{\varphi}^*) \operatorname{ctg} \theta - Q_{\theta}^* R - \frac{\rho_0 h^3}{12} R \left[1 + \frac{3}{20} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right] m_2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= M^* R \\ N_{\theta}^* - r_{11} U^* = 0, \quad Q_{\theta}^* - r_{22} W^* = 0, \quad M_{\theta}^* - r_{33} \Psi = 0 \quad (\theta \in \Gamma, \theta = \theta_0) \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} m_1 &= h^{-1} \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right]^{-1} \int_{-h_1}^{h_2} f_2(z) \left(1 + \frac{z}{R} \right)^2 dz \\ m_2 &= 12h^{-3} \left[1 + \frac{3}{20} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right]^{-1} \int_{-h_1}^{h_2} f_2(z) z^2 \left(1 + \frac{z}{R} \right)^2 dz \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь m_1, m_2 – безразмерные коэффициенты неоднородности инерционных характеристик оболочки.

При составлении равенств (1.7), (1.8) в выражении функционала энергии варьировались перемещения. Если подставить теперь формулу (1.4) в уравнения (1.7), (1.8), а затем ввести безразмерные величины

$$\begin{aligned} U &= R^{-1} U^*, \quad W = R^{-1} W^*, \quad t = t^* R^{-1} \{E_0 [\rho_0 (1 - \nu^2)]^{-1}\}^{1/2} \\ q_{\theta} &= C^{-1} R q_{\theta}^*, \quad q_z = C^{-1} R q_z^*, \quad M = D^{-1} R^2 M^* \end{aligned} \quad (1.10)$$

то в результате получаем дифференциальные уравнения, начальные и граничные условия динамической задачи, представленные в матричной форме

$$L[\bar{U}(\theta, t)] - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{U}(\theta, t) = \bar{q}(\theta, t) \quad (1.11)$$

$$\bar{U}(\theta, 0) = \bar{U}_0(\theta), \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} \bar{U}(\theta, 0) \right|_{t=0} = \dot{\bar{U}}_0(\theta) \quad (t=0) \quad (1.12)$$

$$\mathbf{B}[\bar{U}(\theta, t)]_{\theta=\theta_0} = \left[\mathbf{b} \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{U}(\theta, t) + \mathbf{c} \bar{U}(\theta, t) \right]_{\theta=\theta_0} = 0 \quad (\theta = \theta_0) \quad (1.13)$$

$$\bar{U}(0, t) < \infty \quad (\theta = 0) \quad (1.14)$$

$$L[\bar{U}(\theta, t)] = \sum_{l=0}^2 \mathbf{a}_l(\theta) \frac{\partial^{2-l}}{\partial \theta^{2-l}} \bar{U}(\theta, t), \quad \bar{U}(\theta, t) = \operatorname{colon}[U(\theta, t), W(\theta, t), \Psi(\theta, t)]$$

$$\bar{q}(\theta, t) = \operatorname{colon}[s_1^{-1} q_{\theta}(\theta, t), s_1^{-1} q_z(\theta, t), s_2^{-1} M(\theta, t)]$$

$$\bar{U}_0(\theta) = \operatorname{colon}[U_0(\theta), W_0(\theta), \Psi_0(\theta)], \quad \dot{\bar{U}}_0(\theta) = \operatorname{colon}[\dot{U}_0(\theta), \dot{W}_0(\theta), \dot{\Psi}_0(\theta)]$$

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{H}^{-1} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{diag}(s_1, s_1, s_2), \quad \mathbf{b} = \operatorname{diag}(1, k^2, 1)$$

$$\mathbf{c} = \left\| \begin{array}{ccc} (\nu \operatorname{ctg} \theta - r_{11}) & (1 + \nu) & 0 \\ -k^2 & -r_{22} & k^2 \\ 0 & 0 & (\nu \operatorname{ctg} \theta - r_{33}) \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{a}_1(\theta) = \begin{vmatrix} s_1^{-1} \operatorname{ctg} \theta & s_1^{-1}(1+v+k^2) & 0 \\ -s_1^{-1}(1+v+k^2) & s_1^{-1}k^2 \operatorname{ctg} \theta & -s_1^{-1}k^2 \\ 0 & -s_1^{-1}k^2\alpha^{-2}\gamma_{12} & s_2^{-1} \operatorname{ctg} \theta \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2(\theta) = \begin{vmatrix} -s_1^{-1}(v+k^2-1+\sin^{-2}\theta) & 0 & s_1^{-1}k^2 \\ -s_1^{-1}(1+v+k^2)\operatorname{ctg} \theta & -2s_1^{-1}(1+v) & s_1^{-1}k^2 \operatorname{ctg} \theta \\ s_1^{-1}k^2\alpha^{-2}\gamma_{12} & 0 & -s_2^{-1}(v+k^2\alpha^{-2}\gamma_{12}-1+\sin^{-2}\theta) \end{vmatrix}$$

$$s_1 = (1+\alpha^2)\gamma_1, \quad s_2 = \left(1 + \frac{9}{5}\alpha^2\right)\gamma_2, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{12}} \frac{h}{R} \quad (1.15)$$

$$\gamma_1 = m_1 n_1^{-1}, \quad \gamma_2 = m_2 n_2^{-1}, \quad \gamma_{12} = n_1 n_2^{-1}, \quad r_{11} = C^{-1} R r_{11}^*, \quad r_{22} = C^{-1} R r_{22}^*, \quad r_{33} = D^{-1} R r_{33}^*$$

где $\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{q}}$ – соответственно векторы искомым перемещений и динамических нагрузок; $\bar{\mathbf{U}}_0, \bar{\mathbf{U}}_0$ – заданные во времени $t = 0$ векторы перемещений (начальных несовершенств) и их скоростей; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{12}$ – приведенные коэффициенты неоднородности, r_{11}, r_{22}, r_{33} – безразмерные коэффициенты жесткости опорного контура.

Соотношения (1.11)–(1.14) представляют математическую формулировку исследуемой начально-краевой задачи, причем неравенства (1.14) являются условиями регулярности решения в полусе оболочке ($\theta = 0$).

В частном случае при $f_1(z) = f_2(z) = 1$ ($h_1 = h_2 = \frac{1}{2}h, n_1 = n_2 = m_1 = m_2 = 1, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{12} = 1$) из (1.11), (1.15) следуют известные дифференциальные уравнения движения однородных сферических оболочек [14].

2. Метод решения. Воспользуемся многокомпонентным векторным конечным интегральным преобразованием (КИП) [3, 4]. Для вектор-функций $\bar{\mathbf{U}}(\theta, t)$ с интегрируемым квадратом на отрезке $I \in [0, \theta_0]$ справедливо такое КИП с ядром $\bar{\mathbf{K}}(\lambda_i, \theta)$ из $\bar{\mathbf{L}}_2(I)$ и весовой матрицей $\boldsymbol{\mu}(\theta)$:

$$\varphi(\lambda_i, t) = \int_0^{\theta_0} \bar{\mathbf{K}}^T(\lambda_i, \theta) \boldsymbol{\mu}(\theta) \bar{\mathbf{U}}(\theta, t) d\theta \quad (2.1)$$

$$\bar{\mathbf{U}}(\theta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, t) \bar{\mathbf{K}}(\lambda_i, \theta) \|K_i\|^{-2} \quad (2.2)$$

$$\|K_i\| = \sqrt{\int_0^{\theta_0} \bar{\mathbf{K}}^T(\lambda_i, \theta) \boldsymbol{\mu}(\theta) \bar{\mathbf{K}}(\lambda_i, \theta) d\theta} \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\mu}(\theta) = \operatorname{diag}[d_1 \rho(\theta), d_2 \rho(\theta), d_3 \rho(\theta)] \quad (2.4)$$

$$\bar{\mathbf{K}}(\lambda_i, \theta) = \operatorname{colon}[K_1(\lambda_i, \theta), K_2(\lambda_i, \theta), K_3(\lambda_i, \theta)] \quad (2.5)$$

Здесь $\varphi(\lambda_i, t)$ – выражение трансформанты, а разложение (2.2) по полной системе линейно независимых собственных вектор-функций $\bar{\mathbf{K}}(\lambda_i, \theta)$ является формулой обращения, для которой в [4] при условии ограниченности изображений $\varphi(\lambda_i, t)$ доказаны единственность представления (2.2) и его сходимости в $\bar{\mathbf{L}}_2$; $\|K_i\|$ – норма в $\bar{\mathbf{L}}_2$ с метрикой, определяемой матрицей весовых функций $\boldsymbol{\mu}(\theta)$; d_1, d_2, d_3 – постоянные весовые коэффициенты; λ_i – безразмерные параметры, образующие счетное множество, $i = \overline{1, \infty}$ (собственные значения спектральной задачи); T – знак транспонирования.

Замечание 1. В случае, когда $\lambda_i = \lambda_k$ ($i = k$) является двукратным (вырожденным)

собственным значением, то в формуле обращения его следует повторить дважды, поставив в соответствие линейно-независимые векторы $\bar{\mathbf{K}}(\lambda_i, \theta)$ и $\bar{\mathbf{K}}^*(\lambda_i, \theta)$ спектральной задачи, формирующейся в процессе решения. Разложение (2.2) удобнее теперь представить в виде

$$\bar{\mathbf{U}}(\theta, t) = \sum_{i \neq k=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, t) \bar{\mathbf{K}}(\lambda_i, \theta) \|K_i\|^{-2} + \sum_{i=k=1}^r \varphi(\lambda_i, t) \bar{\mathbf{K}}^*(\lambda_i, \theta) \|K_i\|^{-2} \quad (2.6)$$

Здесь r – число двукратных собственных значений.

Весовую функцию $p(\theta)$ матрицы (2.4) определяем с точностью до несущественной константы по коэффициентам исходной системы уравнений (1.10) путем вычисления одной квадратуры [15]:

$$p(\theta) = \exp[(a_0^{kk})^{-1} \int a_1^{kk}(\theta) d\theta] = \exp(\int \operatorname{ctg} \theta d\theta) = \sin \theta \quad (2.7)$$

где a_0^{kk}, a_1^{kk} ($k = 1, 2, 3$) – соответствующие элементы матрицы \mathbf{a}_0 и \mathbf{a}_1 (1.15).

Применяем к системе уравнений (1.11) и начальным условиям (1.12) КИП (2.1), т.е. умножаем все члены слева на матрицы $\bar{\mathbf{K}}^T \boldsymbol{\mu}$ и интегрируем по θ в интервале $[0, \theta_0]$. При этом имеем в виду (2.4), (2.7), а также $d_1 = d_2 = s_1$, $d_3 = s_2$. В соответствии с процедурой структурного алгоритма этого метода [3]¹ выполняем квадратуры по частям, и в результате получаем

$$\Omega[\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{K}}]_{\theta=0}^{\theta=\theta_0} + \int_0^{\theta_0} \mathbf{L}^*[\bar{\mathbf{K}}] \bar{\mathbf{U}}(\theta, t) d\theta - \frac{d^2}{dt^2} \varphi(\lambda_i, t) = F(\lambda_i, t) \quad (2.8)$$

$$\varphi(\lambda_i, 0) = \varphi_0(\lambda_i), \quad \left. \frac{d}{dt} \varphi(\lambda_i, t) \right|_{t=0} = \dot{\varphi}_0(\lambda_i) \quad (2.9)$$

$$[F(\lambda_i, t), \varphi_0(\lambda_i), \dot{\varphi}_0(\lambda_i)] = \int_0^{\theta_0} \bar{\mathbf{K}}^T(\lambda_i, \theta) \boldsymbol{\mu}(\theta) [\bar{\mathbf{q}}(\theta, t), \bar{\mathbf{U}}_0(\theta), \dot{\bar{\mathbf{U}}}_0(\theta)] d\theta \quad (2.10)$$

$$\mathbf{L}^*[\bar{\mathbf{K}}] = (\bar{\mathbf{K}}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{a}_0)' - (\bar{\mathbf{K}}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{a}_1)' + \bar{\mathbf{K}}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{a}_2 \quad (2.11)$$

$$\Omega[\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{K}}] = \bar{\mathbf{K}}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{a}_0 \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{\mathbf{U}} - [\bar{\mathbf{K}}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{a}_0]' \bar{\mathbf{U}} + \bar{\mathbf{K}}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{a}_1 \bar{\mathbf{U}} \quad (2.12)$$

Здесь $F(\lambda_i, t)$, $\varphi_0(\lambda_i)$, $\dot{\varphi}_0(\lambda_i)$ – трансформанты нагрузки, начальных перемещений и их скоростей; \mathbf{L}^* , Ω – сопряженный \mathbf{L} оператор и билинейная форма относительно $\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{K}}$; штрих означает дифференцирование по θ .

Воспользуемся операционным свойством структурного алгоритма КИП

$$\int_0^{\theta_0} \mathbf{L}^*[\bar{\mathbf{K}}] \bar{\mathbf{U}}(\theta, t) d\theta = -\lambda_i^2 \int_0^{\theta_0} \bar{\mathbf{K}}^T \boldsymbol{\mu} \bar{\mathbf{U}}(\theta, t) d\theta \quad (2.13)$$

Поскольку тождественно удовлетворяются матричные равенства [16]:

$$\boldsymbol{\mu} \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0^T \boldsymbol{\mu}, \quad 2(\boldsymbol{\mu} \mathbf{a}_0)' = \boldsymbol{\mu} \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1^T \boldsymbol{\mu}, \quad (\mathbf{a}_1^T \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu} \mathbf{a}_1)' = 2(\mathbf{a}_2^T \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu} \mathbf{a}_2)$$

а при инвариантных (1.13) краевых условиях для ядра преобразования

$$\mathbf{B}[\bar{\mathbf{K}}(\lambda_i, \theta)]_{\theta=\theta_0} = \left[\mathbf{b} \frac{\partial}{\partial \theta} \bar{\mathbf{K}}(\lambda_i, \theta) + \mathbf{c} \bar{\mathbf{K}}(\lambda_i, \theta) \right]_{\theta=\theta_0} = 0 \quad (\theta = \theta_0) \quad (2.14)$$

$$\bar{\mathbf{K}}(\lambda_i, 0) < \infty \quad (\theta = 0) \quad (2.15)$$

выполняется соотношение (билинейная форма (2.12) обращается в нуль):

¹ См.: Сеницкий Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Саратов: Изд-во СГУ, 1985. 176 с.

$$[M^T(\mu a_0)'M + M^T\mu(a_0 + a_1) - \mu a_0 M]_{\theta=\theta_0} = 0, \quad M = -c^{-1} \times b$$

то оператор L – самосопряженный [16], т.е.

$$L^* = \mu L \quad (2.16)$$

Учитывая (2.16), из операторного равенства (2.13) следует такая система дифференциальных уравнений относительно $\overline{K}(\lambda_i, \theta)$:

$$\sum_{l=0}^2 a_l(\theta) \frac{\partial^{2-l}}{\partial \theta^{2-l}} \overline{K}(\lambda_i, \theta) + \lambda_i^2 \overline{K}(\lambda_i, \theta) = 0 \quad (2.17)$$

Если теперь принять во внимание равенство нулю $\Omega(\overline{U}, \overline{K})$ на концах интервала $[0, \theta_0]$, и операционное свойство (2.13), то (2.8) становится уравнением для трансформанты $\phi(\lambda_i, t)$. В соответствии с методом квазинормальных координат [9], вводим в это уравнение силы упруговязкого сопротивления (внутреннего трения). Такой прием основан на экспериментально подтвержденном факте о том, что силы вязкого сопротивления практически не оказывают влияния на формы колебаний конструкции $\overline{K}(\lambda_i, \theta)$, и их следует вводить в математическую модель после отделения пространственной переменной θ . Обозначив через γ_i^* коэффициент потерь для каждой моды колебаний i , силу внутреннего трения, следуя скорректированной частотно-независимой гипотезе Фойхта, можно представить в виде [9] $T(\lambda_i, t) = \gamma_i^* \lambda_i \dot{\phi}(\lambda_i, t)$. Здесь и ниже точка означает дифференцирование по t . Учитывая это, уравнение (2.8) записывается так

$$\ddot{\phi}(\lambda_i, t) + \gamma_i^* \lambda_i \dot{\phi}(\lambda_i, t) + \lambda_i^2 \phi(\lambda_i, t) = -F(\lambda_i, t) \quad (i = \overline{1, \infty}) \quad (2.18)$$

где параметры λ_i – безразмерные частоты собственных колебаний оболочки, связанные с круговыми частотами ω_i зависимостью (1.10), т.е.

$$\omega_i = \lambda_i R^{-1} \sqrt{E_0 [\rho_0 (1 - \nu^2)]^{-1}} \quad (2.19)$$

Таким образом, исходная начально-краевая задача (1.11)–(1.14) распалась на счетное множество задач Коши (2.9), (2.18) для трансформанты $\phi(\lambda_i, t)$, и обобщенную краевую задачу типа Штурма – Лиувилля (2.14), (2.15), (2.17) относительно вектор-функции ядра преобразования $\overline{K}(\lambda_i, \theta)$. Интегрируемость последней и определяет возможность построения замкнутого решения для оболочки. Общее решение дифференциального уравнения (2.18) при начальных условиях (2.9) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \phi(\lambda_i, t) = \exp\left(-\frac{\gamma_i^*}{2} \lambda_i t\right) & \left[\phi_0(\lambda_i) \cos \lambda_i \varepsilon_i t + \dot{\phi}_0(\lambda_i) \lambda_i^{-1} \sin \lambda_i \varepsilon_i t - (\lambda_i \varepsilon_i)^{-1} \int_0^t F(\lambda_i, \tau) \times \right. \\ & \left. \times \exp\left(\frac{\gamma_i^*}{2} \lambda_i \tau\right) \sin \lambda_i \varepsilon_i (t - \tau) d\tau \right], \quad \varepsilon_i = \left[1 - \frac{(\gamma_i^*)^2}{4}\right]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Рассмотрим подробнее однородную краевую задачу (2.14), (2.15), (2.17). Вводим потенциалы смещений и усилий $\Phi(\lambda_i, \theta)$ и $V(\lambda_i, \theta)$ по формулам

$$K_1(\lambda_i, \theta) = \Phi'(\lambda_i, \theta), \quad K_2'(\lambda_i, \theta) - \Phi'(\lambda_i, \theta) + K_3'(\lambda_i, \theta) = (k^2 n)^{-1} V(\lambda_i, \theta) \quad (2.21)$$

После подстановки равенств в систему (2.17) и последующего интегрирования первого

и третьего уравнений, преобразуем ее к виду

$$\begin{aligned} G[\Phi] + g_{1i}\Phi + g_2K_2 + g_3V &= 0 \\ G[\Phi] + g_4G[V] + g_{5i}K_2 &= 0 \\ G[\Phi] + g_6G[V] - G[K_2] + g_{7i}V + g_{8i}(\Phi - K_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} G &= \frac{d^2}{d\theta^2}(\dots) + \text{ctg } \theta \frac{d}{d\theta}(\dots), \quad g_{1i} = 1 - \nu + \lambda_i^2 s_1, \quad g_2 = 1 + \nu, \quad g_3 = n_1^{-1} \\ g_4 &= -g_3 g_2^{-1}, \quad g_{5i} = 2 - g_2^{-1} \lambda_i^2 s_1, \quad g_6 = k^{-2} g_3 \\ g_{7i} &= g_6 (g_{8i} - k^2 \alpha^{-2} \gamma_{12}), \quad g_{8i} = 1 - \nu + \lambda_i^2 s_2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Исключая из (2.22) K_2 , а затем Φ , получаем окончательно разрешающее дифференциальное уравнение шестого порядка относительно V :

$$GGG[V] + g_{23i}GG[V] + g_{24i}G[V] + g_{25i}V = 0 \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} g_{25i} &= g_{20i}^{-1}(g_{16i}g_{22i} - g_{19i}), \quad g_{24i} = g_{20i}^{-1}(g_{22i} - g_{18i} + g_{16i}g_{21i}) \\ g_{23i} &= g_{20i}^{-1}(g_{21i} - g_{17i} + g_{16i}g_{20i}), \quad g_{22i} = (g_{9i} - g_{16i})^{-1}(g_{11i} - g_{19i}) \\ g_{21i} &= (g_{9i} - g_{16i})^{-1}(g_{10i} - g_{18i}), \quad g_{20i} = (g_{9i} - g_{16i})^{-1}g_{17i} \\ g_{19i} &= (g_{12i} - g_{9i})^{-1}g_{15i}, \quad g_{18i} = (g_{12i} - g_{9i})^{-1}(g_{14i} - g_{11i}) \\ g_{17i} &= (g_{12i} - g_{9i})^{-1}(g_{13i} - g_{10i}), \quad g_{16i} = (g_{12i} - g_{9i})^{-1}g_{13i}, \quad g_{15i} = g_{5i}g_{7i} \\ g_{14i} &= g_{5i}g_6 + g_4g_{8i}, \quad g_{13i} = g_{5i}g_{8i}, \quad g_{12i} = g_{5i} + g_{8i}, \quad g_{11i} = (g_{5i} + g_{8i})^{-1}g_3g_{5i} \\ g_{10i} &= -(g_{5i} - g_2)^{-1}g_2g_4, \quad g_{9i} = (g_{5i} - g_2)^{-1}g_{1i}g_{5i}, \quad g_{8i} = g_{8i}(\lambda_i) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Вводим порождающее дифференциальное уравнение

$$G[V(\lambda_i, \theta)] = -\xi_{in}^2 V(\lambda_i, \theta) \quad (2.26)$$

$$\xi_{in}^2 = c_{in}(c_{in} + 1) \quad (n = 1, 2, 3) \quad (2.27)$$

Подстановка (2.26) в (2.24) приводит к такому бикубическому уравнению для ξ_{in} :

$$\Delta(c_{in}, \lambda_i) = (\xi_{in}^2)^3 - g_{23i}(\lambda_i)\xi_{in}^2 + g_{24i}(\lambda_i)\xi_{in}^2 - g_{25i}(\lambda_i) = 0 \quad (2.28)$$

откуда определяются три корня ξ_{in} и соответствующие им (2.27) значения c_{in} .

Заменой независимой переменной $x = \cos \theta$, (2.26), (2.27) сводится к уравнению Лежандра. Учитывая линейность разрешающего уравнения (2.24) и теорему о суперпозиции, его общее решение может быть представлено в виде:

$$V(\lambda_i, \theta) = \sum_{n=1}^3 [A_{in}P_{c_{in}}(\cos \theta) + B_{in}Q_{c_{in}}(\cos \theta)] \quad (2.29)$$

Здесь $P_{c_{in}}, Q_{c_{in}}$ – функции Лежандра I-го и II-го рода степени c_{in} ; A_{in}, B_{in} – произвольные постоянные интегрирования.

Поскольку из условий ограниченности (2.15) следует, что $V(\lambda_i, 0) < \infty$, $\Pi(\lambda_i, 0) < \infty$ ($\theta = 0$), то в представлении (2.29) необходимо принять

$$B_{in} = 0 \quad (i = \overline{1, \infty}; \quad n = 1, 2, 3) \quad (2.30)$$

После исключения K_2 из системы (2.22) находится функция Φ , а затем из второго уравнения (2.22) и сама компонента K_2 . С учетом равенств (2.26), (2.29), (2.30) окон-

чительно имеем

$$\Phi(\lambda_i, \theta) = -[g_{20i}GG(V) + g_{21i}G(V) + g_{22i}V] = -\sum_{n=1}^3 E_{in}A_{in}P_{c_{in}}^1(\cos \theta)$$

$$K_2(\lambda_i, \theta) = -\sum_{n=1}^3 H_{in}A_{in}P_{c_{in}}^1(\cos \theta) \quad (2.31)$$

$$E_{in} = g_{20i}\xi_{in}^4 - g_{21i}\xi_{in}^2 + g_{22i}; \quad H_{in} = g_{5i}^{-1}[g_{20i}\xi_{in}^6 - g_{21i}\xi_{in}^4 + (g_{22i} - g_4)\xi_{in}^2] \quad (2.32)$$

Воспользовавшись теперь соотношениями (2.21), определяем остальные компоненты вектор-функции ядра преобразования

$$K_1(\lambda_i, \theta) = -\sum_{n=1}^3 E_{in}A_{in}P_{c_{in}}^1(\cos \theta), \quad K_3(\lambda_i, \theta) = \sum_{n=1}^3 N_{in}A_{in}P_{c_{in}}^1(\cos \theta) \quad (2.33)$$

$$N_{in} = (k^2n_1) + (g_{5i}^{-1}\xi_{in}^2 - 1)E_{in} - g_{5i}^{-1}g_4\xi_{in}^2 \quad (2.34)$$

где $P_{c_{in}}^1$ – присоединенная функция Лежандра первого порядка. В результате подстановки вектора (2.5), (2.31), (2.33) в граничные условия (2.14) формируется однородная система алгебраических уравнений относительно A_{in} :

$$\sum_{n=1}^3 \delta_{kn}A_{in} = 0 \quad (k = \overline{1,3}) \quad (2.35)$$

из условия нетривиальности решения которой следует трансцендентное уравнение для вычисления собственных значений λ_i , и находятся постоянные A_{in} :

$$\det\{\delta_{kn}\} = 0 \quad (k, n = \overline{1,3}) \quad (2.36)$$

$$A_{i1} = \delta_{12}\delta_{23} - \delta_{22}\delta_{13}, \quad A_{i2} = \delta_{21}\delta_{13} - \delta_{11}\delta_{23}, \quad A_{i3} = \delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21} \quad (2.37)$$

$$\delta_{1n} = E_{in} \left\{ \frac{c_{in} + 1}{\sin \theta_0} P_{c_{in}-1}^1(\cos \theta_0) + \left[(v - c_{in}) \operatorname{ctg} \theta_0 - \frac{r_{11}}{n_1} \right] P_{c_{in}}^1(\cos \theta_0) \right\}$$

$$\delta_{2n} = H_{in} \left[k^2 \frac{c_{in}}{\sin \theta_0} P_{c_{in}-1}^1(\cos \theta_0) + \left(\frac{r_{22}}{n_1} - k^2 c_{in} \operatorname{ctg} \theta_0 P_{c_{in}}^1(\cos \theta_0) \right) \right] +$$

$$+ k^2 (E_{in} + N_{in}) P_{c_{in}}^1(\cos \theta_0)$$

$$\delta_{3n} = N_{in} \left[\left(c_{in} + v \right) \operatorname{ctg} \theta_0 - \frac{r_{33}}{n_2} \right] P_{c_{in}}^1(\cos \theta_0) - \frac{c_{in} + 1}{\sin \theta_0} P_{c_{in}-1}^1(\cos \theta_0) \quad (2.38)$$

Выражения (2.31), (2.33), (2.37) определяют ядро КИП $\mathbf{K}(\lambda_i, \theta)$, а его норма (2.3) вычисляется в замкнутой форме по матричному равенству [16]

$$\|K_i\|^2 = \left\{ \frac{\partial \overline{\mathbf{K}}(\lambda, \theta)}{\partial \lambda} \mathbf{D}_1 \frac{\partial \overline{\mathbf{K}}(\lambda, \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \overline{\mathbf{K}}^T(\lambda, \theta)}{\partial \lambda \partial \theta} \mathbf{Y} \overline{\mathbf{K}}(\lambda, \theta) \right\} \Big|_{\theta=\theta_0} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mu} \mathbf{a}_0 \Big|_{\theta=\theta_0}, \quad \mathbf{D}_1 = \left\{ \boldsymbol{\mu} \mathbf{a}_0 - \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\boldsymbol{\mu} \mathbf{a}_0) - \boldsymbol{\mu} \mathbf{a}_1 \right] \mathbf{I} \right\} \Big|_{\theta=\theta_0}, \quad \mathbf{I} = -\mathbf{c}^{-1} \mathbf{b} \Big|_{\theta=\theta_0}$$

Выражение (2.39) на нижнем пределе ($\theta = 0$) обращается в нуль, так как $\boldsymbol{\mu}(0) = 0$, и следовательно $\mathbf{Y} \Big|_{\theta=0} = \mathbf{D}_1 \Big|_{\theta=0} = 0$. Поскольку компоненты ядра КИП (2.31), (2.33)

содержат функции Лежандра, то производные $\overline{\partial K} / \partial \lambda$ следует определять по правилу дифференцирования сложных функций, например,

$$\frac{\partial P_c}{\partial \lambda} = \frac{\partial P_c}{\partial c} \frac{dc}{d\lambda} = -\frac{\partial P_c}{\partial c} \frac{\partial \Delta}{\partial c} / \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}$$

Замечание 2. Для определения кратных собственных значений однородной краевой задачи (2.14), (2.15), (2.17), наряду с (2.36) необходимо исследовать также трансцендентное уравнение, получающееся путем дифференцирования по λ левой части (2.36), т.е.

$$\frac{d}{d\lambda} \det\{\delta_{kn}\} = 0 \quad (2.40)$$

Корень λ_i уравнения (2.36) должен при этом удовлетворять одновременно и уравнению (2.40). Принимая во внимание, что дефект матрицы системы (2.35) теперь равен двум, A_{in} в отличие от предыдущего случая определяются с точностью до двух констант. Оставляя первое уравнение (2.35), получаем для линейно-независимых собственных векторов $\overline{K}(\lambda_i, \theta)$ и $\overline{K}^*(\lambda_i, \theta)$ соответственно:

$$A_{i1} = -\delta_{i2}, \quad A_{i2} = \delta_{i1}, \quad A_{i3} = 0; \quad A_{i1}^* = -\delta_{i3}, \quad A_{i2}^* = 0, \quad A_{i3}^* = \delta_{i1} \quad (2.41)$$

Формула обращения (2.6) при известных трансформанте (2.20), а также компонентах ядра преобразования (2.31), (2.33), (2.37), (2.41), является общим решением рассматриваемой нестационарной осесимметричной задачи (1.11)–(1.14) и представляет разложение по полной системе собственных вектор-функций. Оно справедливо при наличии кратного спектра и построено для наиболее общего случая закрепления оболочки на контуре (контур с тремя упругими характеристиками), произвольных законов неоднородности $f_1(z)$, $f_2(z)$ и динамических нагрузжений $\overline{q}(\theta, t)$. Имеется в виду лишь интегрируемость $\overline{q}(\theta, t)$, т.е. существование интегралов (2.10), (2.20).

Итерационный процесс решения трансцендентного уравнения (2.36) (определения параметров λ_i , ξ_i , c_{in}) осуществляется совместно с равенствами (2.27), (2.28). Располагая компонентами U , W , Ψ вектора перемещений (2.2), по формулам (1.4) могут быть найдены все внутренние усилия в оболочке M_θ , M_φ , N_θ , N_φ , Q_θ .

3. Частные случаи общего решения. Анализ результатов. Варьируя коэффициенты жесткости опорного контура r_{11} , r_{22} , r_{33} , можно исследовать различные частные случаи опирания оболочки. Действительно:

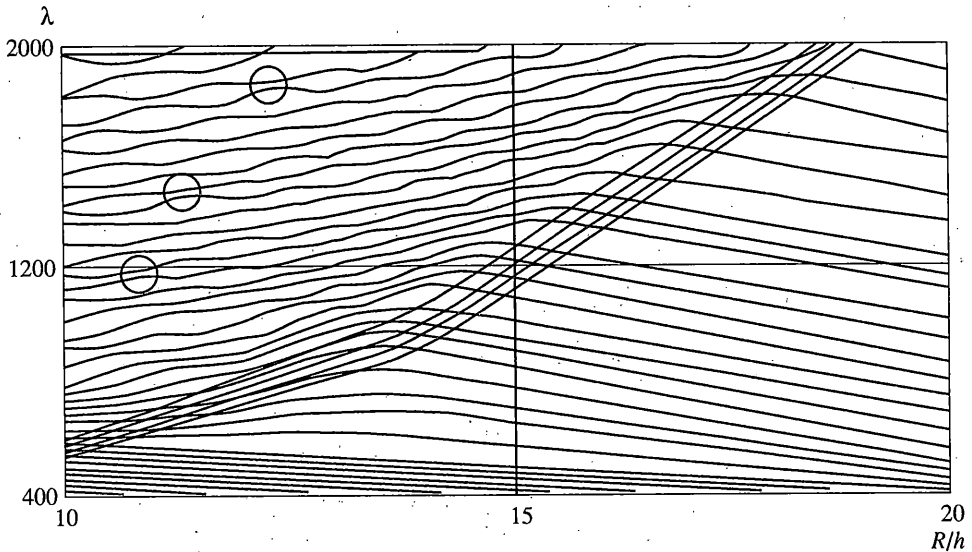
а) Если соответствующие члены (2.38) трансцендентного уравнения (2.36) и выражений (2.31), (2.33) разделить на r_{11} , r_{22} , а затем осуществить предельные переходы r_{11} , $r_{22} \rightarrow \infty$, то построенное решение (2.2), (2.20), (2.31), (2.33), (2.39) становится справедливым для упруго защемленной относительно углов поворота на контуре оболочки.

б) Повторяя описанную выше процедуру для всех коэффициентов жесткости r_{11} , r_{22} , r_{33} , получаем результаты для жестко защемленной оболочки.

с) В случае, когда $r_{33} = 0$, после проведения описанных в пункте а) операций из (2.2), (2.20), (2.31), (2.33), (2.36) следуют соотношения для шарнирно опертых оболочек.

д) Если принять $r_{11} = 0$, то уравнение (2.36) и компоненты вектор-функции ядра преобразования (2.31), (2.33) соответствуют упруго закрепленной оболочке, опирающейся на абсолютно гибкие в меридиональной плоскости диафрагмы.

е) Когда $r_{11} = r_{22} = r_{33} = 0$, то из (2.31), (2.33), (2.36), (2.38) следуют соответствующие результаты для свободной (незакрепленной) оболочки. В разложения (2.2) необходимо добавить слагаемые, определяющие движение оболочки без ее деформаций (как абсолютно твердого тела) и суммирование начинать с $i = 0$, а в формулах (2.23), (2.25) при этом считать $\lambda_0 = 0$ ($\omega_0 = 0$).



Фиг. 1

г) Если $f_1(z) = f_2(z) = 1$ ($n_1 = n_2 = m_1 = m_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$), то решение (2.2), (2.20), (2.31), (2.33), (2.36), (2.39), и приведенные выше частные случаи справедливы для однородных оболочек.

г) Наконец, когда $\gamma^* = 0$, то из (2.20) совместно с (2.2), (2.31), (2.33), (2.36), (2.39) следует общее решение и все его частные случаи для сферических оболочек при отсутствии сил вязкого сопротивления.

Рассмотрим частный случай загрузки оболочки распределенным по поверхности скачком давления интенсивностью $q_0^* = \text{const}$. Будем полагать, что в начальный момент времени $t = 0$ оболочка находилась в состоянии покоя, т.е.

$$\bar{U}_0(\theta) = \dot{\bar{U}}_0(\theta) = 0 \quad (t = 0) \quad (3.1)$$

Для принятого воздействия

$$q_z(\theta, t) = q_0 H(t), \quad q_\theta(\theta, t) = M(\theta, t) = 0 \quad (3.2)$$

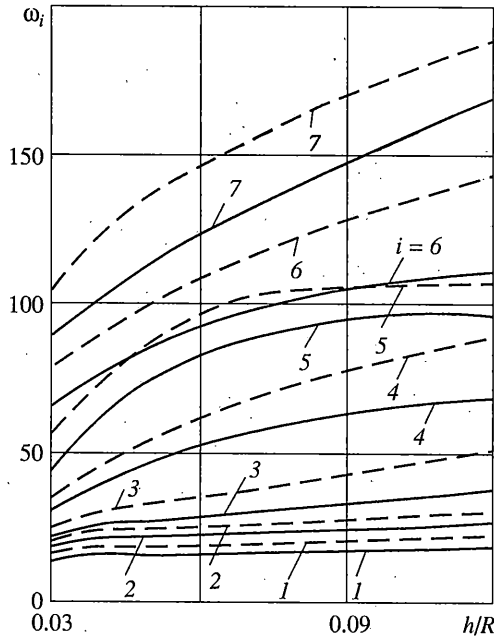
причем $H(t)$, q_0 — соответственно функция Хэвисайда и безразмерное (1.10) нормальное давление ($q_0 = C^{-1} R q_0^*$).

Вычисляя квадратуры (2.10), (2.20) с учетом равенств (3.1), (3.2), определяем трансформанту $\Phi(\lambda_i, t)$. Имеем

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_i, t) = & \Lambda_i \left[\Gamma^{-1} \left(\frac{c_{in} + 2}{2} \right) \Gamma^{-1} \left(\frac{2 - c_{in}}{2} \right) - \Gamma^{-1} \left(\frac{c_{in} + 3}{2} \right) \Gamma^{-1} \left(\frac{1 - c_{in}}{2} \right) \right] \times \\ & \times \left[\frac{2}{\gamma_i^* \lambda_i} \left(e^{\frac{\gamma_i^* \lambda_i t}{2}} - \cos \lambda_i \varepsilon_i t \right) - \sin \lambda_i \varepsilon_i t \right]; \quad \Lambda_i = 2\sqrt{\pi} \left\{ \gamma_i^* \varepsilon_i \lambda_i^2 \left[1 + 4 \left(\frac{\varepsilon_i}{\gamma_i^*} \right)^2 \right] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\Gamma(\dots)$ — гамма-функция.

На фиг. 1 представлены частотные кривые, определяющие характер изменения безразмерного спектрального параметра λ для упруго закрепленной ($r_{11} \rightarrow \infty$, $r_{22} \rightarrow \infty$, $r_{33} = 130$) однородной $f_1(z) = f_2(z) = 1$ сферической оболочки. Расчеты проводились при следующих данных: $h = 1.1$ м, $\nu = 0.2$, $k_1 = 0.86$. Варьировался радиус кри-



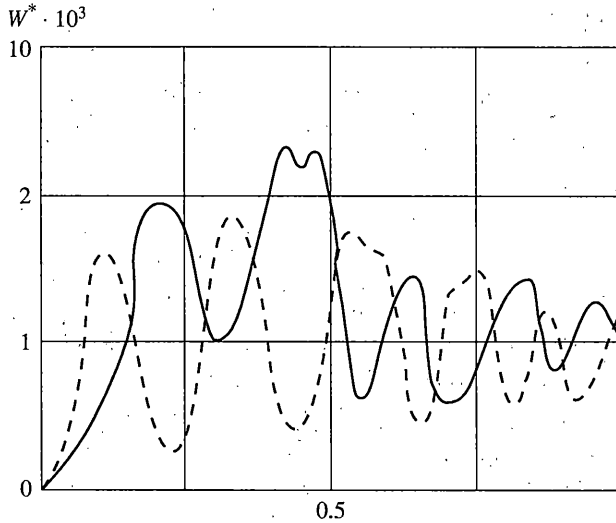
Фиг. 2

визны оболочки (отношение $R/h = 10 \div 20$) при фиксированном диаметре опорного контура 2а. На графике четко просматриваются две зоны спектра I и II с границей, представляющей область сгущения частот колебаний, причем формы кривых в них качественно различны. Действительно, в зоне II имеются горизонтальные участки (плато), расположенные в окрестностях частотных параметров, определяемых по безмоментной теории [7]. Светлыми точками на фиг. 1 выделены некоторые пересечения частотных кривых, соответствующие внутренним резонансам. При увеличении радиуса кривизны R кривые выполаживаются, причем для пологих оболочек в низкочастотной части спектра наблюдаются лишь квазирезонансы. Таким образом, кратные частоты могут оказать заметное влияние на динамическую реакцию только в непологих оболочках. Аналогичная качественная картина наблюдается и в неоднородных сферических оболочках. В таблице приведены значения безразмерных параметров λ_i и соответствующих им частот ω_i первых пяти тонов ($i = \overline{1,5}$) колебаний однородной (первые столбцы) и неоднородной упруго заземленных сферических оболочек $R = 35.5$ м, $h = 1.1$ м, $\theta_0 = 0.225\pi$, $E_0 = 4.1 \cdot 10^{10}$ Па, при частичной деградации материала на внутренней поверхности конструкции, описываемой такими соотношениями:

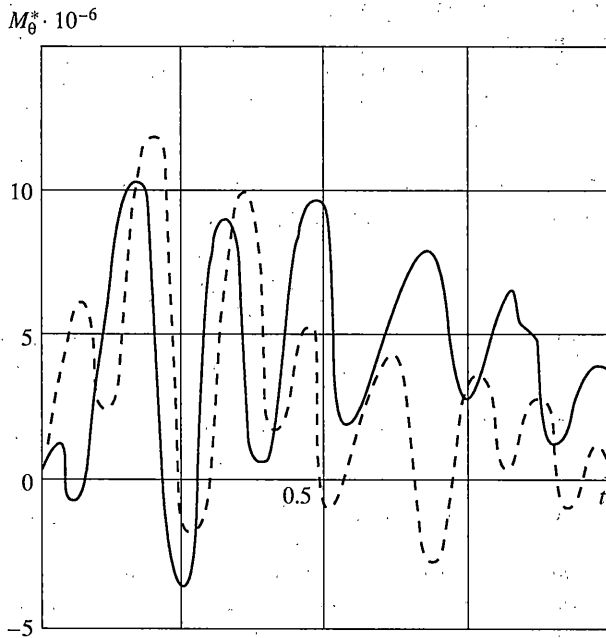
$$f_1(z) = 0.5 \frac{z}{h} + 0.778, \quad f_2(z) = 0.4 \frac{z}{h} + 0.65 \quad (3.4)$$

На внешней поверхности оболочки ($z = h_2$) в этом случае $E(z_2) = E_0$, $\rho(z_2) = \rho_0$. На фиг. 2 приведены графики, характеризующие изменение ω_i ($i = \overline{1,7}$) в зависимости от

i	λ_i	$\omega_i(\Gamma\text{ц})$	λ_i	$\omega_i(\Gamma\text{ц})$
1	1.157	19.97	1.010	17.44
2	1.466	25.31	1.283	22.16
3	1.521	26.26	1.377	23.78
4	2.072	35.78	1.674	28.90
5	3.260	56.30	2.559	44.20



Фиг. 3



Фиг. 4

относительной толщины h/R однородной (штриховые линии) и неоднородной (сплошные линии) сферических оболочек. Результаты получены для физико-механических и геометрических параметров, указанных выше. Цифры 1, 2, ..., 7, соответствуют номеру тона колебаний i . Вследствие деградации материала конструкции при наведенной неоднородности происходит одновременно уплотнение и заметное снижение всего частотного спектра в рассматриваемом диапазоне толщин оболочек.

Замечание 3. Поскольку рассматриваемая оболочка близка к пологой ($f/2a = 1/5.4$; f – стрела подъема), то наблюдались лишь квазирезонансы ω_i в высокочастотной части спектра ее колебаний.

Осциллограммы нормальных перемещений W^* и меридиональных изгибающих моментов M_θ^* в полюсе ($\theta = 0.0009\pi$) упруго защемленной железобетонной сферической оболочки с приведенными выше геометрическими и физико-механическими характеристиками представлены на фиг. 3, 4. На графиках прогибы указаны в метрах, моменты – в нм/м, а время – в секундах. Расчеты выполнялись для равномерно распределенного по поверхности оболочки скачка давления интенсивностью $q_0^* = 3 \cdot 10^4$ Па. При этом учитывались силы внутреннего трения в материале $\gamma^* = 0.05$ [9]. Следует отметить, что оболочка совершает затухающие колебания относительно положения статического равновесия, не совпадающего с ее первоначальным недеформированным состоянием (фиг. 3). При частичной деградации материала конструкции в соответствии с (3.4) (сплошные кривые) существенно возрастают (до 30%) максимальные перемещения по сравнению с W_{\max}^* в однородных оболочках, максимальные изгибающие моменты $M_{\theta \max}^*$ несколько уменьшаются. Вместе с тем, в результате деградации материалов под действием агрессивных сред одновременно происходит снижение их прочностных характеристик [2], что необходимо учитывать при проведении практических расчетов неоднородных оболочек.

4. Заключение. Построено новое замкнутое решение осесимметричной динамической задачи для неоднородной упруго закрепленной сферической оболочки с конечной сдвиговой жесткостью. В математической модели учтены силы внутреннего трения, а также изменение физико-механических характеристик материала по толщине конструкции. Результаты расчетов подтвердили наличие сложного спектра (внутренних резонансов) в непологих оболочках, и существенное влияние факторов наведенной неоднородности на их частотные характеристики и напряженно-деформированное состояние.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования РФ по фундаментальным исследованиям в области технических наук. ТОО-121-2109.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Механика деформируемых твердых тел. М.: ВИНТИ, 1973. Т. 5. 272 с.
2. Петров В.В., Овчинников И.Г., Шихов Ю.М. Расчет элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой. Саратов: Изд-во СГУ, 1987. 285 с.
3. Сеницкий Ю.Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики // Изв. вузов. Математика. 1991. № 4. С. 57–63.
4. Сеницкий Ю.Э. Сходимость и единственность представлений, определяемых формулой обращения многокомпонентного обобщенного конечного интегрального преобразования // Изв. вузов. Математика. 1991. № 9. С. 53–56.
5. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
6. Даин Е.А., Луковенко С.А., Харьковская Н.В. К проблеме внутренних резонансов в теории колебаний тонких оболочек // Препринт № 97. ИПМ АН СССР. М., 1977, 51 с.
7. Лизарев А.Д., Ростанина Н.Б. Колебания металлополимерных и однородных сферических оболочек. Минск: Наука и техника, 1984. 192 с.
8. Цейтлин А.И. О линейных моделях частотно-независимого внутреннего трения // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 18–28.
9. Цейтлин А.И., Кусаинов А.А. Методы учета внутреннего трения в динамических расчетах конструкций. Алма-Ата: Наука. Каз. ССР, 1987. 238 с.
10. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 367 с.
11. Сеницкий Ю.Э. Осесимметричная динамическая задача для неоднородной пологой сфе-

- рической оболочки с конечной сдвиговой жесткостью // Прикл. механика. 1994. Т. 30. № 9. С. 50–57.
12. *Сеницкий Ю.Э.* Об интегрируемости начально-краевой задачи динамики для неоднородной пологой сферической оболочки // Вест. Самар. ун-та. 1998. № 2 (8). С. 106–121.
 13. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука. 1983. 447 с.
 14. *Kalnins A.* Effect of bending on vibration of spherical shell // J. Acoust. soc. America. 1964. V. 36. № 1. P. 74–83.
 15. *Сеницкий Ю.Э.* О некоторых тождествах, используемых при решении краевых задач методом конечных интегральных преобразований // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 9. С. 1636–1638.
 16. *Сеницкий Ю.Э., Лычев С.А.* Определение нормы ядер конечных интегральных преобразований и их приложение // Изв. вузов. Математика. 1999. № 8. С. 60–69.

Самара

Поступила в редакцию
3.05.2000