МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2002

УДК 624.072.21

© 2002 г. Ю.И. НЯШИН, М.А. ОСИПЕНКО, Р.Н. РУДАКОВ

К ТЕОРИИ ИЗГИБА ЛИСТОВОЙ РЕССОРЫ

Рассматривается слабый совместный (контакт без трения и с возможным отставанием) изгиб пачки тонких балок прямоугольного сечения (листов); один конец каждого листа защемлен, другой свободен; ширины листов одинаковы, длины различны (убывают снизу вверх); к нижнему листу приложена заданная (направленная вверх) нагрузка. Такая конструкция моделирует листовую рессору.

Основная задача о нахождении форм изогнутых под нагрузкой листов сводится к задаче о нахождении плотности сил взаимодействия листов. Такая задача полностью решена для двух листов. Для произвольного числа листов рассмотрена нагрузка в виде сосредоточенной на свободном конце (нижнего листа) силы и получены условия справедливости гипотезы сосредоточенной нагрузки, утверждающей, что после приложения указанной силы взаимодействие каждой пары соседних листов происходит только на свободном конце более короткого листа. Приведены примеры как выполнения, так и невыполнения этих условий. Показано, что при выполнении условий можно построить "равнонапряженную" рессору.

1. Введение. Листовые рессоры широко применяются в автомобилестроении [1]. Известно также использование их в биомеханике – в ряде конструкций протеза стопы [2, 3]. При расчете рессор основная задача состоит в нахождении форм изогнутых под нагрузкой листов. Зная формы, можно найти напряжения в листах, а также провести оптимизацию конструкций рессор по различным критериям [1, 3].

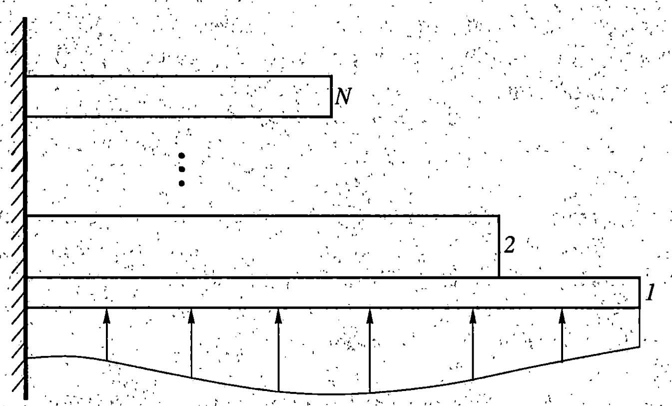
Для решения основной задачи, рессора в простейшем случае представляется в виде пачки тонких балок прямоугольного сечения (листов), плотно без трения прилегающих (в отсутствие нагрузки) друг к другу; один конец каждого листа защемлен, другой свободен (фиг. 1). Все листы имеют одинаковую ширину (в направлении, перпендикулярном плоскости, фиг. 1). К нижнему листу (перпендикулярно ему) приложена заданная нагрузка (фиг. 1; по ширине листа нагрузка распределена равномерно). Под действием этой нагрузки листы испытывают слабый совместный (контакт с возможным отставанием) изгиб.

При расчете изгиба обычно принимается гипотеза (менее точно – метод) сосредоточенной нагрузки [1]: если заданная нагрузка есть положительная (направленная вверх) сосредоточенная на свободном конце (нижнего листа) сила, то при изгибе взаимодействие каждой пары соседних листов происходит (с отличными от нуля силами) только на свободном конце более короткого листа.

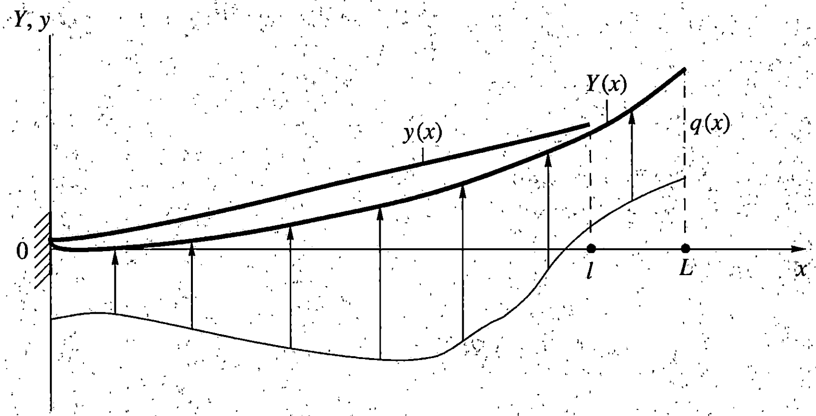
Однако характер взаимодействия должен определяться без этого специального предположения, из тех же уравнений, которые описывают изгиб листов (и для произвольной заданной нагрузки, а не только имеющей вид сосредоточенной силы). Решение этой задачи в некоторых частных случаях рассмотрено в данной статье.

2. Постановка задачи о совместном изгибе двух листов. Рассмотрим два листа; их формы описываются функциями $Y(x)(0 \le x \le L)$, $y(x)\,(0 \le x \le l)$, где $L \ge l > 0$ – в приближении слабого изгиба равны заданным длинам листов (фиг. 2). Плотность $q(x)$ заданной нагрузки (фиг. 2) будем считать имеющей вид

$$u(x)+\sum_{\alpha} U_\alpha \delta(x-x_\alpha), \quad x_\alpha > 0, \quad U_\alpha \ge 0 \tag{2.1}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где $u(x) \geq 0$ – кусочно-непрерывная функция, непрерывная справа при $x = 0$ и непрерывная слева при $x > 0$; индекс α пробегает конечное множество значений. Требуется найти $Y(x)$, $y(x)$ (без специальных предположений о характере взаимодействия листов). Для решения этой задачи удобно переформулировать ее и рассматривать в качестве искомой функции плотность $f(x)$ сил взаимодействия листов. Функции $Y(x)$, $y(x)$ выражаются через $f(x)$ следующим образом:

$$Y(x) = A\int_0^L G(x,s)q(s)ds - A\int_0^l G(x,s)f(s)ds \tag{2.2}$$

$$y(x) = a\int_0^l G(x,s)f(s)ds, \quad A = \frac{12}{EwH^3} > 0, \quad a = \frac{12}{Ewh^3} > 0 \tag{2.3}$$

$$G(x,s) = \begin{cases} s^2(3x-s)/6 & (s \leq x) \\ x^2(3s-x)/6 & (s \geq x) \end{cases} \tag{2.4}$$

где G – функция Грина, A, a – податливости листов на изгиб; E – модуль Юнга, w – ширина листов, H, h – толщины нижнего и верхнего листов соответственно. Интеграл вида $\int \varphi(s)\delta(s-s_*)ds$ $(b \leq s \leq c)$ считается равным $\varphi(s_*)$ также и в случаях $s_* = b$ или $s_* = c$. Формулы (2.2), (2.3) принимаются в качестве исходной математической модели слабого совместного изгиба листов (можно получить (2.2), (2.3) из приближенной теории изгиба балок [4] и третьего закона Ньютона). Заметим, что $G(x,s) \geq 0$, а также справедливо представление

$$G(x,s) = \int_0^{\min(x,s)} (x-t)(s-t)dt \tag{2.5}$$

Функцию $f(x)$ будем искать в виде (2.1). Это есть предположение о характере взаимодействия листов, но существенно менее специальное, чем гипотеза сосредоточенной нагрузки. Обозначим $r(x) = y(x) - Y(x)$. Из (2.2), (2.3) найдем

$$r(x) = (A+a)\int_0^l G(x,s)f(s)ds - A\int_0^L G(x,s)q(s)ds \tag{2.6}$$

Примем, подобно (2.2), (2.3), в качестве части исходной математической модели, что $r(x) \geq 0$, причем, если $f(x) > 0$, то $r(x) = 0$. Тогда, используя (2.6), приходим окончательно к следующей задаче.

Задача 1. Найти $f(x)$, определенную при $0 \leq x \leq l$, имеющую вид (2.1) и такую, что при $0 \leq x \leq l$:

$$r(x)\begin{cases} = 0 & (f(x) > 0) \\ \geq 0 & (f(x) = 0) \end{cases} \tag{2.7}$$

где $r(x)$ выражается формулой (2.6).

3. Решение задачи 1. Обозначим

$$M = \int_l^L (s-l)q(s)ds \geq 0 \tag{3.1}$$

$$\Phi(\Lambda) = M - \frac{1}{(l-\Lambda)^2}\int_\Lambda^l (s-\Lambda)(l-s)(2l-\Lambda-s)q(s)ds \tag{3.2}$$

$$0 \leq \Lambda < l$$

Теорема 1. Решение $f(x)$ задачи 1 единственно, причем

(*a*) если $M = 0$, то

$$f(x) = \frac{A}{A+a}q(x) \tag{3.3}$$

(*b*) если $\Phi(0) \geq 0$, то

$$f(x) = F\delta(x-l) \tag{3.4}$$

$$F = \frac{A}{(A+a)G(l,l)}\int_0^L G(l,s)q(s)ds \tag{3.5}$$

(*c*) если $\Phi(0) < 0$ и $M > 0$, то

$$f(x) = F\delta(x-l) + P\delta(x-\lambda) + \begin{cases} \dfrac{A}{A+a}q(x) & (0 \leq x \leq \lambda) \\ 0 & (x > \lambda) \end{cases} \tag{3.6}$$

$$0 < \lambda < l \text{ – корень уравнения } \Phi(\Lambda) = 0 \tag{3.7}$$

$$F = \frac{A}{(A+a)(l-\lambda)}\int_\lambda^L (s-\lambda)q(s)ds \tag{3.8}$$

$$P = \frac{A}{(A+a)(l-\lambda)}\int_{\lambda+0}^L (l-s)q(s)ds \tag{3.9}$$

Запись вида $b \pm 0$ означает односторонний предел. Заметим, что если в (3.6) $q(x)$ содержит слагаемое $F_0\delta(x-\lambda)$, то это слагаемое в $f(x)$ содержится (в соответствии с нестрогим неравенством $x \le \lambda$ в (3.6)).

Доказательство. Сначала установим единственность решения. Пусть $f(x)$, $f_*(x)$ – два решения задачи 1. Обозначим $\rho(x) = f(x) - f_*(x)$, тогда из (2.6), (2.7) найдем

$$\int_0^l \rho(x)\left[\int_0^l G(x,s)\rho(s)ds\right]dx \le 0 \tag{3.10}$$

(так как при каждом x либо один из сомножителей в интеграле по x равен нулю, либо эти сомножители имеют разные знаки). Используя (2.5), можно преобразовать интеграл (3.10) к виду

$$\int_0^l I^2(x)dx \ge 0 \tag{3.11}$$

$$I(x) = \int_x^l (t-x)\rho(t)dt \tag{3.12}$$

Из (3.10), (3.11) следует, что в (3.11) имеет место равенство. Далее, можно доказать непрерывность $I(x)$ (простые доказательства утверждений о свойствах интегралов, содержащих функции вида (2.1), не приводятся) и из (3.11) (со знаком равенства) следует, что $I(x) = 0$ при $0 \le x \le l$. Используя (3.12), можно тогда доказать, что $\rho(x) = 0$ при $0 \le x \le l$. Следовательно, $f(x) = f_*(x)$ при $0 \le x \le l$ и решение задачи *1* единственно.

Теперь установим, что (3.3), (3.4), (3.6) дают решение задачи *1* при соответствующих условиях:

(*a*) Так как $q(x)$ имеет вид (2.1), то $f(x)$ также имеет вид (2.1). Докажем справедливость (2.7). Подставляя (3.3) в (2.6), получим, что если $L = l$, то $r(x) = 0$ при $0 \le x \le l = L$, а если $L > l$, то

$$r(x) = -A\int_{l+0}^L G(x,s)q(s)ds \tag{3.13}$$

В последнем случае, используя (3.1) и условие $M = 0$, можно доказать, что $q(x) = 0$ при $l < x \le L$, следовательно, из (3.13) найдем, что и в этом случае $r(x) = 0$ при $0 \le x \le l$. Поэтому в обоих случаях (2.7) выполнено.

(*b*) Так как $F \ge 0$, то $f(x)$ имеет вид (2.1). Докажем справедливость (2.7). Подставляя (3.4), (3.5) в (2.6), получим

$$r(x) = \frac{A}{G(l,l)}\int_0^L R(l,x,s)q(s)ds \tag{3.14}$$

$$R(l,x,s) = G(x,l)G(l,s) - G(l,l)G(x,s) \tag{3.15}$$

Неравенство $f(x) > 0$ может выполняться, согласно (3.4), только при $x = l$. Из (3.14), (3.15) следует, что $r(l) = 0$, поэтому для доказательства (2.7) остается установить, что $r(x) \ge 0$ при $0 \le x < l$. Разобьем интеграл (3.14) на два: по множествам $0 \le s \le l$ и $l \le s \le L$ (так как $R(l, x, l) = 0$, то точку $s = l$ можно включить в оба множества). Из (3.15), (2.4) находим, что во втором интеграле $R(l, x, s) = l^2x^2(l-x)(s-l)/12$. Тогда из условия $\Phi(0) \ge 0$ и (3.2), (3.1) следует, что

$$\int_l^L R(l,x,s)q(s)ds \ge \int_0^l R_*(l,x,s)q(s)ds \tag{3.16}$$

$$R_*(l,x,s) = x^2(l-x)s(l-s)(2l-s)/12$$

Поэтому из (3.14), (3.16) получим

$$r(x) \geq \frac{A}{G(l, l)} \int_0^l [R(l, x, s) + R_*(l, x, s)] q(s) ds \tag{3.17}$$

Используя (3.15), (2.4), можно найти явные выражения для $R(l, x, s)$ при $s \leq x \leq l$ и $x \leq s \leq l$ и убедиться, что в обоих случаях $R(l, x, s) + R_*(l, x, s) \geq 0$. Тогда из (3.17) следует, что $r(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq l$ и (2.7) выполнено.

(*c*) Докажем сначала, что величина λ задана корректно – существует единственный корень (3.7). Используя (3.2), можно доказать, что справедливо представление

$$\Phi(\Lambda) = M - \int_\Lambda^{l-0} \Psi(s) ds \tag{3.18}$$

$$\Psi(s) = \frac{2}{(l-s)^3} \int_s^l (l-t)^3 q(t) dt \geq 0 \tag{3.19}$$

где $\Psi(s)$ – ограничена и кусочно-непрерывна при $0 \leq s < l$. Тогда из (3.18) следует, что $\Phi(\Lambda)$ непрерывна и $\lim\limits_{\Lambda \to l} \Phi(\Lambda) = M$. Так как $\Phi(0) < 0$, $M > 0$, то доказано существование корня $0 < \lambda < l$. Предположим, что (3.7) имеет различные корни

$$\lambda < \lambda_* \tag{3.20}$$

Тогда из (3.18) найдем

$$\int_\lambda^{\lambda_*} \Psi(s) ds = 0 \tag{3.21}$$

Используя (3.21), (3.20), (3.19), можно доказать, что $\Psi(s) = 0$ при $\lambda < s < l$ и из (3.18) получим $\Phi(\lambda) = M > 0$, что противоречит (3.7). Поэтому предположение неверно и (3.7) имеет единственный корень.

Докажем, что $f(x)$ имеет вид (2.1). Непрерывность слева при $x > 0$ части $f(x)$, не содержащей δ-функций, обеспечивается нестрогим неравенством $x \leq \lambda$ в (3.6). Далее $F \geq 0$. Установим, что $P \geq 0$. Разобьем интеграл (3.9) на два: по множествам $\lambda < s \leq l$ и $l \leq s \leq L$. Преобразуем второй интеграл с учетом (3.1), (3.2), (3.7) и, используя (3.19), найдем

$$P = \frac{A}{2(A+a)} \Psi(\lambda + 0) \geq 0 \tag{3.22}$$

Тем самым доказано, что $f(x)$ имеет вид (2.1).

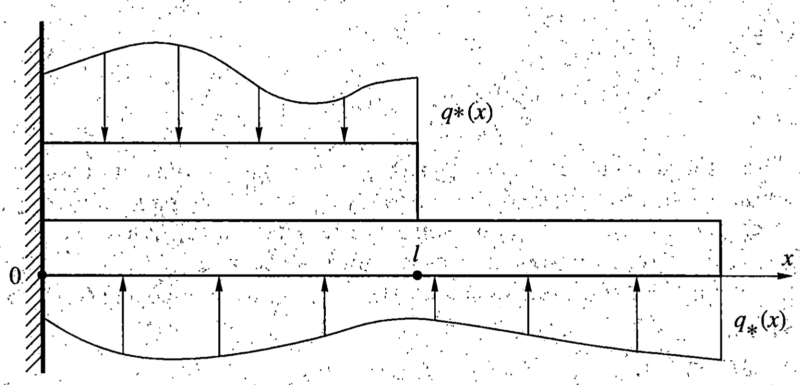
Докажем справедливость (2.7). Подставляя (3.6), (3.8), (3.9) в (2.6), получим

$$r(x) = \frac{A}{l - \lambda} \int_\lambda^L Q(l, \lambda, x, s) q(s) ds \tag{3.23}$$

$$Q(l, \lambda, x, s) = (s - \lambda) G(x, l) + (l - s) G(x, \lambda) - (l - \lambda) G(x, s) \tag{3.24}$$

Неравенство $f(x) > 0$ может выполняться, согласно (3.6), только при $0 \leq x \leq \lambda$ и при $x = l$. Из (3.24), (2.4) следует, что если $x \leq \lambda < l$ и $s \geq \lambda$, то $Q(l, \lambda, x, s) = 0$. Тогда из (3.23) найдем, что $r(x) = 0$ при $0 \leq x \leq \lambda$ и для доказательства (2.7) остается установить, что $r(l) = 0$ и $r(x) \geq 0$ при $\lambda < x < l$. Эти соотношения следуют из справедливого при $\lambda < x \leq l$ представления

$$r(x) = \frac{A(x-\lambda)^3}{2} \int_x^l \left[\frac{1}{(s-\lambda)^4} \int_\lambda^s (s-t)^2 (t-\lambda) q(t) dt \right] ds$$



Фиг. 3

которое можно доказать, используя (3.23), (3.24), (2.4), (3.2), (3.7). Тем самым (2.7) выполнено.

Замечание 1. Если $q(x) = F_0\delta(x - l)$, то условия (a) и (b) теоремы 1 выполняются одновременно.

Замечание 2. Если $q(x) = F_0\delta(x - L)$, $F_0 > 0$, то из теоремы 1 следует, что $f(x) = F\delta(x - l)$, $F > 0$, т.е. для двух листов гипотеза сосредоточенной нагрузки справедлива при любых L, l, A, a.

Замечание 3. При доказательстве пункта (c) теоремы 1 было установлено, что $P \geq 0$. Докажем, что справедливо строгое неравенство: $P > 0$. Предположим, что $P = 0$; из (3.22) следует, что $\Psi(\lambda + 0) = 0$. Тогда, используя (3.19), можно доказать, что $\Psi(s) = 0$ при $s < \lambda < l$ и из (3.18) получим $\Phi(\lambda) = M > 0$, что противоречит (3.7). Поэтому предположение неверно и $P > 0$.

Замечание 4. Утверждение пункта (b) теоремы 1 можно обратить: если $f(x) = F_0\delta(x - l)$ ($F_0 \geq 0$), то $\Phi(0) \geq 0$. Действительно, если $M = 0$, то из (3.3) находим $q(x) = ((A+a)/A)F_0\delta(x-l)$ и из (3.2) следует, что $\Phi(0) = 0$. Если $M > 0$, то предположим, что $\Phi(0) < 0$; тогда из (3.6) следует, что $f(x)$ содержит слагаемое $P\delta(x - \lambda)$, где $\lambda \neq l$ и $P > 0$ (см. замечание *3* к теореме *1*); это противоречит равенству $f(x) = F_0\delta(x - l)$. Поэтому предположение неверно и $\Phi(0) \geq 0$.

Замечание 5. Обозначим плотность заданной нагрузки, приложенной к нижнему листу, через $q_*(x)$ и пусть к верхнему листу также приложена заданная нагрузка с плотностью $q^*(x)$, имеющей вид (2.1) (фиг. 3; $q^*(x)$ считается положительной, если нагрузка направлена вниз). Тогда, проводя рассуждения, аналогичные приведшим к (2.6), (2.7), можно получить, что в данном случае $f(x)$ есть решение задачи 1, если в (2.6) положить

$$q(x) = q_*(x) + \begin{cases} (a/A)q^*(x) & (0 \leq x \leq l) \\ 0 & (x > l) \end{cases}$$

4. Условия справедливости гипотезы сосредоточенной нагрузки при совместном изгибе произвольного числа листов. Рассмотрим $N \geq 2$ листов с длинами $l_k > 0$ и толщинами $h_k > 0$; $1 \leq k \leq N$ (фиг. 1). Последовательность l_k считаем невозрастающей. Обозначим

$$a_k = 12/(Ewh_k^3) > 0 \qquad (4.1)$$

(податливости листов на изгиб).

Функции $y_k(x)$, описывающие формы листов, выражаются через плотности $f_k(x)$ $(1 \leq k \leq N-1)$ сил взаимодействия листов с номерами k, $k+1$ по формуле, аналогичной (2.2):

$$y_k(x) = a_k \int\limits_0^{l_k} G(x, s) f_{k-1}(s) ds - a_k \int\limits_0^{l_{k+1}} G(x, s) f_k(s) ds$$

где $1 \le k \le N$ и следует считать, что $l_{N+1} = 0, f_N(x) = 0, f_0(x) = q(x)$ (плотность заданной нагрузки, приложенной к листу номер 1 снизу). Далее в выражениях, содержащих индекс k, предполагается (если диапазон изменения k не указан), что $1 \le k \le N-1$. Задача о нахождении $f_k(x)$ формулируется аналогично задаче *1*.

Задача 2. Найти $f_k(x)$, определенные при $0 \le x \le l_{k+1}$, имеющие вид (2.1) и такие, что при $0 \le x \le l_{k+1}$:

$$r_k(x) \begin{cases} = 0 & (f_k(x) > 0) \\ \ge 0 & (f_k(x) = 0) \end{cases} \tag{4.2}$$

$$r_k(x) = -a_k \int\limits_0^{l_k} G(x, s) f_{k-1}(s) ds + (a_k + a_{k+1}) \int\limits_0^{l_{k+1}} G(x, s) f_k(s) ds -$$

$$-a_{k+1} \int\limits_0^{l_{k+2}} G(x, s) f_{k+1}(s) ds \tag{4.3}$$

Можно доказать единственность решения задачи *2* (по той же схеме, что и для задачи *1*). Рассматривая два листа с номерами k, $k + 1$, можно из замечания 5 к теореме 1 вывести следующую лемму.

Лемма. Функции $f_k(x)$ являются решением задачи *2*, если и только если $f_k(x)$ для каждого k есть решение задачи *1* при подстановках

$$L = l_k, \quad l = l_{k+1}, \quad A = a_k, \quad a = a_{k+1} \tag{4.4}$$

$$q(x) = f_{k-1}(x) + \begin{cases} (a_{k+1} / a_k) f_{k+1}(x) & (0 \le x \le l_{k+1}) \\ 0 & (x > l_{k+1}) \end{cases} \tag{4.5}$$

Общее решение задачи *2* в данной статье не строится. В п. 4 рассмотрим только частный случай

$$f_0(x) = F_0 \delta(x - l_1), \quad F_0 > 0 \tag{4.6}$$

и в этом случае только установим условия справедливости гипотезы сосредоточенной нагрузки. В п. 5 приведены численные примеры решений задачи 2 в некоторых других случаях.

Теорема 2. Гипотеза сосредоточенной нагрузки при совместном изгибе $N \ge 2$ листов справедлива, если и только если

$$z_k a_k [l_k (l_{k+1} - l_{k+2})(2l_{k+1} - l_{k+2}) + l_{k+1}^2 (l_k - l_{k+1})] \ge$$

$$\ge (a_k + a_{k+1}) l_{k+1} (l_{k+1} - l_{k+2})(2l_{k+1} - l_{k+2}) \tag{4.7}$$

где величины z_k заданы рекуррентно

$$z_k = [(a_k + a_{k+1}) G_{k+1,\,k+1} - a_{k+1} G_{k+1,\,k+2} / z_{k+1}] / a_k G_{k,\,k+1} \tag{4.8}$$

и обозначено $G_{\alpha,\beta} = G(l_\alpha, \ l_\beta)$ (значение формально введенного $z_N \ne 0$ несущественно, так как $G_{N,\,N+1} = 0$).

Доказательство. Сначала установим, что величины z_k заданы корректно. Используя (4.8), можно по индукции доказать, что $z_k > G_{k+1,\,k+1} / G_{k,\,k+1}$, откуда

$$z_k > 0 \tag{4.9}$$

Поэтому знаменатель в (4.8) не обращается в нуль и величины z_k заданы корректно.

Далее, докажем необходимость (4.7). Пусть гипотеза сосредоточенной нагрузки справедлива, т.е. выполнено (4.6) и

$$f_k(x) = F_k\delta(x - l_{k+1}), \quad F_k > 0 \tag{4.10}$$

Тогда $f_k(l_{k+1}) > 0$ и из (4.2) следует, что

$$r_k(l_{k+1}) = 0 \tag{4.11}$$

Подставляя (4.6), (4.10), (4.11) в (4.3), найдем

$$-a_k G_{k,\,k+1}F_{k-1} + (a_k + a_{k+1})G_{k+1,\,k+1}F_k - a_{k+1}G_{k+1,\,k+2}F_{k+1} = 0 \tag{4.12}$$

(следует считать, что $F_N = 0$). Рассматривая (4.12) как систему линейных алгебраических уравнений (с трехдиагональной матрицей) относительно F_k (при известной F_0), можно доказать, что в силу (4.9) эта система имеет единственное решение

$$F_k = F_0 \,/ \prod_{m=1}^{k} z_m > 0 \tag{4.13}$$

Заметим, что при доказательстве необходимости (4.7) существование $F_k > 0$, удовлетворяющих (4.12), предполагается заранее в (4.10), поэтому в данной части доказательства используется только единственность решения (4.12) и представление его в виде (4.13); неравенство в (4.13) показывает только, что предположение $F_k > 0$ в (4.10) не приводит здесь к противоречию. Согласно лемме, (4.10) есть решение задачи *1* при подстановках (4.4), (4.5). Тогда из замечания *4* к теореме *1* следует, что

$$\Phi(0) \ge 0 \tag{4.14}$$

Подставляя (4.10), (4.6) в (4.5) и затем (4.4), (4.5) в (3.1), (3.2), получим из (3.2) и (4.14):

$$a_k l_{k+1}^2 (l_k - l_{k+1}) F_{k-1} \ge a_{k+1} l_{k+2} (l_{k+1} - l_{k+2})(2l_{k+1} - l_{k+2}) F_{k+1} \tag{4.15}$$

Используя (4.13), (4.9), (4.8), (2.4), найдем, что из (4.15) следует (4.7). Тем самым, необходимость (4.7) доказана.

Теперь докажем достаточность (4.7). Пусть (4.6), (4.7) выполнены. Рассмотрим систему (4.12). Как было упомянуто выше, можно доказать, что она имеет единственное решение (4.13). Установим, что тогда (4.10) для каждого k есть решение задачи 1 при подстановках (4.4), (4.5).

В силу неравенств (4.13), (4.6), функция $q(x)$ в (4.5) имеет вид (2.1) и упомянутая задача 1 поставлена корректно. Определим знак $\Phi(0)$. Обращая проведенные выше рассуждения, приведшие от (4.14) к (4.7), найдем из (4.7), что $\Phi(0) \ge 0$. Тогда из пункта (*b*) теоремы 1 следует, что решение задачи 1 имеет вид

$$f(x) = F\delta(x - l_{k+1}) \tag{4.16}$$

где (с учетом (3.5), (4.4), (4.5), (4.6), (4.10)):

$$F = \frac{a_k G_{k,\,k+1}F_{k-1} + a_{k+1}G_{k+1,\,k+2}F_{k+1}}{(a_k + a_{k+1})G_{k+1,\,k+1}} \tag{4.17}$$

Из (4.17), (4.12) находим $F = F_k$ и из (4.16) получаем, что (4.10) для каждого k есть решение задачи 1.

Согласно лемме, функции (4.10) являются тогда решением задачи 2. Как упоминалось выше, это решение единственно, следовательно, гипотеза сосредоточенной нагрузки справедлива и достаточность (4.7) доказана.

Замечание 1. Пусть $l_k = \alpha\beta^k$, $a_k = \gamma$, где $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, $\gamma > 0$. Тогда (4.7) можно привести к виду

$$\varphi(\beta) \ge N - k \tag{4.18}$$

$$\varphi(\beta) = \operatorname{arth}\sqrt{1 - \beta/4} \,/\, \operatorname{arth}[(1-\beta)\sqrt{1 - \beta/4}]$$

Функция $\varphi(\beta)$ непрерывна и возрастает при $0 < \beta < 1$, причем $\lim\limits_{\beta\to 0}\varphi(\beta) = 1$, $\lim\limits_{\beta\to 1}\varphi(\beta) = \infty$. Поэтому существуют β, при которых $\varphi(\beta) \ge N-1$; тогда (4.18) выполнено (для всех $1 \le k \le N-1$) и, следовательно, при таких β справедлива гипотеза сосредоточенной нагрузки. Если $N \ge 3$ и $1 \le k_* < N-1$, то существуют β, при которых $k_* < \varphi(\beta) < k_* + 1$; тогда (4.18) выполнено для $N - k_* \le k \le N-1$ и не выполнено для $1 \le k < N - k_*$, следовательно, при этих β гипотеза сосредоточенной нагрузки несправедлива.

Замечание 2. Пусть

$$l_k = \alpha \prod_{m=1}^{k-1} (1-\zeta_m), \quad a_k = \gamma/(l_k\zeta_k)^{3/2} \tag{4.19}$$

где $\alpha > 0, \gamma > 0$, $1 \le k \le N$; следует считать, что $l_1 = \alpha$; числа ζ_k заданы рекуррентно

$$\zeta_N = 1, \quad \zeta_k = 1/[1 + (1-\zeta_{k+1}^2/3)^2/\zeta_{k+1}] \tag{4.20}$$

Из (4.20) следует, что

$$0 < \zeta_k < 1 \tag{4.21}$$

поэтому формулы (4.19), (4.20) задают соответствующие последовательности корректно. Из (4.8), (4.19), (4.20) можно найти, что

$$z_k = 1 \tag{4.22}$$

а (4.7) сводится к неравенству $(1-\zeta_{k+1})(2+\zeta_{k+1}) \ge 0$, которое, согласно (4.20), (4.21), выполнено. Таким образом, для параметров (4.19) гипотеза сосредоточенной нагрузки справедлива. Эти параметры соответствуют "равнонапряженной" (для заданной нагрузки (4.6)) рессоре в следующем смысле.

Назовем напряжением в листе номер k величину (здесь и далее $1 \le k \le N$):

$$\sigma_k(x) = (3E^2/2w)^{1/3} a_k^{2/3} \left| \int_x^{l_k} (s-x)[f_{k-1}(s) - f_k(s)]ds \right| \tag{4.23}$$

(из приближенной теории изгиба балок [4] можно получить, что $\sigma_k(x)$ – максимальный по сечению (с координатой x) листа (номер k) модуль нормального напряжения). Учитывая установленную выше справедливость гипотезы сосредоточенной нагрузки для параметров (4.19), найдем из (4.23), (4.6), (4.10), (4.13), (4.22), (4.19):

$$\sigma_k(x) = \begin{cases} \sigma_* & (0 \le x \le l_{k+1}), \quad \sigma_* = (3\gamma^2E^2/(2w))^{1/3}F_0 \\ \sigma_* \dfrac{l_k - x}{l_k - l_{k+1}} & (x \ge l_{k+1}) \end{cases}$$

Тот факт, что $\sigma_k(x)$ не зависит от k и от x при $0 \le x \le l_{k+1}$, и означает "равнонапряженность" конструкции.

5. Численные примеры решений задачи 2. Для приведенных ниже примеров гипотеза сосредоточенной нагрузки либо несправедлива, либо ничего не утверждает. Примеры построены методом численно-аналитического подбора. Сам метод не рассматривается, так как он основан на эвристическом обобщении теоремы *1* на случай произвольного N, а такое обобщение в строгой форме должно составить предмет дальнейшего исследования. Однако после того, как дающие решение формулы выписаны, они могут быть строго доказаны с помощью теоремы *1* и леммы.

Пример 1. Пусть $N = 3$, $l_2 = 3l_1/4$, $l_3 = 3l_1/8$, $a_1 = a_2 = a_3$, $f_0(x) = F_0\delta(x - l_1)$, $F_0 > 0$. Тогда, как можно проверить, условие (4.7) не выполнено при $k = 1$ и, следовательно, гипотеза сосредоточенной нагрузки несправедлива. Можно доказать, что решение задачи 2 в данном случае имеет вид

$$f_1(x) = F_1\delta(x-l_2) + P\delta(x-\alpha l_3) \qquad (5.1)$$

$$f_2(x) = F_2\delta(x-l_3)$$

где $0 < \alpha < 1$ – корень уравнения $32 - 93\alpha + 60\alpha^2 - 11\alpha^3 = 0$:

$$F_1 = 3\alpha(128 - 160\alpha + 67\alpha^2 - 9\alpha^3)F_0 / \Delta$$

$$F_2 = 2\alpha(240 - 288\alpha + 110\alpha^2 - 13\alpha^3)F_0 / \Delta$$

$$P = (32 - 31\alpha)F_0 / \Delta > 0$$

$$\Delta = 4\alpha(103 - 126\alpha + 51\alpha^2 - 7\alpha^3)$$

Как видно из (5.1), взаимодействие листов 1 и 2 происходит не только на свободном конце листа 2, но и в точке с координатой $x = \alpha l_3$.

Пример 2. Пусть $N = 3$, $l_2 = 3l_1/5$, $l_3 = l_1/3$, $a_1 = a_2 = a_3$, $f_0(x) \equiv f_0 = \text{const} > 0$. Гипотеза сосредоточенной нагрузки здесь ничего не утверждает, так как $f_0(x)$ не имеет вида (4.6). Можно показать, что решение задачи 2 в данном случае имеет вид

$$f_1(x) = F_1\delta(x-l_2) + P\delta(x-\alpha l_3) + \begin{cases} f_0/2 & (0 \le x \le \alpha l_3) \\ 0 & (\alpha l_3 < x \le l_2) \end{cases} \qquad (5.2)$$

$$f_2(x) = F_2\delta(x-l_3)$$

где $0 < \alpha < 1$ – корень уравнения

$$275625 - 737061\alpha + 727576\alpha^2 - 368292\alpha^3 + 107375\alpha^4 - 16975\alpha^5 + 1000\alpha^6 = 0$$

$$F_1 = 5(22671 - 39171\alpha + 14750\alpha^2 + 5250\alpha^3 - 4125\alpha^4 + 625\alpha^5)f_0 l_1 / 2\Delta$$

$$F_2 = (-6561 + 76545\alpha - 133650\alpha^2 + 92250\alpha^3 - 28125\alpha^4 + 3125\alpha^5)f_0 l_1 / \Delta$$

$$P = 2(5121 - 11700\alpha + 11350\alpha^2 - 4500\alpha^3 - 625\alpha^4)f_0 l_1 / \Delta$$

$$\Delta = 1200(117 - 227\alpha + 135\alpha^2 - 25\alpha^3)$$

Как видно из (5.2), взаимодействие листов 1 и 2 происходит не только на свободном конце листа 2, но и на отрезке $0 \le x \le \alpha l_3$.

6. Заключение. Предложенный подход к исследованию взаимодействия листов рессоры при их совместном изгибе позволил полностью изучить изгиб двух листов и получить условия справедливости гипотезы сосредоточенной нагрузки при изгибе произвольного числа листов. Можно надеяться, что в последнем случае этот подход приведет к установлению картины взаимодействия листов и для произвольной заданной нагрузки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пархиловский И.Г.* Автомобильные листовые рессоры. М.: Машиностроение, 1978. 227 с.
2. *Geil M.D., Parnianpour M., Berme N.* Significance of nonsagittal power terms in analysis of a dynamic elastic response prosthetic foot // Trans ASME. J. Biomech. Engi–ng. 1999. V. 121. № 5. P. 521–524.
3. *Rudakov R.N., Osipenko M.A., Nyashin Y.I., Kalashnikov Y.V., Podgaetz A.R.* Optimization and Investigation of the Foot Prosthesis Operating Characteristics // Russian Journal of Biomechanics. 1997. № 1–2. P. 1–11.
4. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.

Пермь

Поступила в редакцию
6.04.2000