

УДК 639.4

© 2002 г. В.В. ЧЕХОВ

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОЛНОСТЬЮ НАПРЯЖЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Рассматриваются дискретно описанные полностью напряженные (при одном случае нагружения) конструкции заданной геометрии, содержащие несколько материалов. Для них, с учетом физической нелинейности, выводятся достаточные условия оптимальности и сходимости алгоритма отношения напряжений. Условия позволяют подбирать материалы, обеспечивающие, соответственно, оптимальность и сходимость, не производя проекторочных расчетов либо анализа напряженного состояния конструкции. В случае использования произвольных материалов применение полученного условия оптимальности позволяет эвристически оценить нижнюю границу уровней напряжений, которые должны иметь место в оптимальном проекте (без отыскания самого этого проекта), а также указать некоторые из элементов конструкции, которые должны быть заведомо полностью напряжены у оптимального проекта. Проект, соответствующий указанной нижней границе, может быть построен теми же способами, что и полностью напряженный проект, и может оказаться ближе к оптимуму, чем последний. Полученные результаты проиллюстрированы на примере проектирования балки из двух материалов, работающей на поперечный изгиб.

1. Введение. При проектировании силовых конструкций достаточно часто используется понятие полностью напряженной конструкции (ПНК), называемой также равнопрочной. Оно "связано с представлениями об одновременном исчерпании прочности и несущей способности всеми частями конструкции" [1]. Преимуществом использования ПНК является то, что определить параметры элементов конструкции, обеспечивающие полную напряженность, при заданной геометрии конструкции достаточно просто, и это требует весьма незначительных вычислительных затрат (в сравнении, например, с отысканием параметров оптимального проекта методами математического программирования), что особенно важно при рассмотрении задач большой размерности, а также нелинейных задач. Однако ПНК имеет и недостатки. Например, она учитывает только ограничения по прочности и не учитывает других, не менее важных требований (по жесткости, устойчивости и др.). Кроме того, даже при учете только ограничений по прочности ПНК в общем случае не является оптимальным проектом, и ее использование может привести к ошибкам. Несмотря на свои недостатки, ПНК очень часто используется на начальных этапах проектирования (например, когда требуется быстро оценить эффективность того или иного варианта конструктивно-силовой схемы). Поэтому представляет практический интерес оценка того, насколько рациональной является полная напряженность для проектируемой конструкции. Существующие методы оценки оптимальности ПНК, а также улучшения ее массовых свойств (см., например, [2, 3]) связаны с выявлением тех элементов конструкции, которые в оптимуме должны быть недогружены (т.е. иметь пассивные ограничения на допускаемые напряжения). Это обычно связано с анализом условий Куна – Таккера в пространстве переменных проектирования, который является затруднительным в случае реальных сложных конструкций (например,

способ оценки оптимальности ПНК, предложенный в [2], требует количества циклов перерасчета конструкции, не меньшего, чем число содержащихся в ней конечных элементов). Эти трудности усиливаются при выполнении физически нелинейных расчетов, когда для одного цикла вычисления напряженно-деформированного состояния (НДС) требуется многократное повторение итераций линейно-упругого расчета. Кроме того, если для линейно-упругих конструкций имеется достаточное количество эффективных методов проектирования на основе подхода критериев оптимальности (см., например, [3, 4]), то для расчетов с учетом физической нелинейности при использовании более чем одного материала построение оптимального проекта возможно в настоящее время в общем случае только на основе методов анализа чувствительности и математического программирования. Такие методы являются критичными к использованию вычислительных ресурсов, и использование ПНК, несмотря на ее недостатки, до сих пор остается актуальным. Поэтому было бы полезным априори (не производя расчета НДС конструкции) оценить оптимальность ПНК, а также по возможности определить параметры для построения более рационального проекта. Данному вопросу и посвящено настоящее исследование. Кроме того, исследуется сходимость алгоритма построения ПНК для физически нелинейных конструкций.

2. Постановка задачи. Используются следующие предположения: рассматривается произвольная конструкция, представленная в виде дискретной модели; геометрия конструкции задана и неизменна, проектными параметрами являются поперечные размеры конечных элементов (КЭ): например, толщины плоских КЭ, площади поперечного сечения одномерных КЭ; если не оговорено иное, рассматриваются КЭ с однородным напряженным состоянием (НС); в конструкции используется произвольное количество материалов (в предельном случае каждый КЭ может иметь свой материал), их распределение по элементам задано и неизменно; нагружение конструкции производится одной системой статических нагрузок; для описания нелинейного поведения материалов под нагрузкой используется гиперупругая модель материалов (зависимость между напряжениями и деформациями полагается монотонной и выпуклой); влияние других нелинейностей (конструктивной, геометрической, потери устойчивости) не учитывается; при практических расчетах обычно используются ограничения, налагаемые снизу на величины проектных параметров (конструктивные ограничения). Допускаемые величины в таких ограничениях задаются достаточно малыми и слабо влияют на результат. В данной работе конструктивные ограничения не вводятся, так как при их наличии нельзя вести речь о полной напряженности.

Вопросы существования и единственности ПНК не рассматриваются. При практических расчетах единственность не требуется (так как всегда достаточно первого найденного проекта ПНК), а с существованием проблем не возникает, так как при построении ПНК, если решение не существует при ненулевых проектных параметрах, то параметры "лишних" элементов стремятся к нулю, и в крайнем случае конструкция вырождается в статически определимую, для которой ПНК существует всегда.

Используемый здесь подход предполагает использование в качестве переменных проектирования не проектных параметров, а величин напряжений в элементах при заданной нагрузке (величины же проектных параметров полагаются при этом переменными состояниями). Таким образом, различные проекты конструкции задаются вектором напряжений в ее элементах (здесь имеется в виду вектор в пространстве переменных проектирования), и полагается, что вектор ее проектных параметров однозначно определяется по заданному вектору напряжений (на практике для этого используется алгоритм отношения напряжений [4] либо метод заданных напряжений [5]).

Рассматривается задача минимизации массы конструкции при ограничениях сверху на уровни напряжений в ее элементах при заданной нагрузке

$$\begin{cases} W \rightarrow \min \\ \sigma_i \leq \bar{\sigma}_i \quad (i = 1, \dots, n) \end{cases} \quad (2.1)$$

где W – масса конструкции, $\{\alpha\}$ – вектор проектных параметров конструкции, n – общее число КЭ в расчетной схеме, σ_i и $\bar{\sigma}_i$ – соответственно напряжение в i -м КЭ и его предельно допустимое значение. Под величинами напряжений в элементах понимаются эквивалентные (согласно критерию Мизеса) напряжения. Проекту ПНК соответствует вектор напряжений в конструкции, задаваемый равенствами

$$\sigma_i = \bar{\sigma}_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.2)$$

Известны частные случаи, когда ПНК является оптимальным в смысле задачи (2.1) проектом. Это имеет место, например, для статически определимых систем [1], для конструкций из одного материала [6]. Далее приводится и обосновывается условие, являющееся достаточным для оптимальности физически нелинейной ПНК, содержащей несколько материалов.

3. Условие оптимальности полностью напряженных конструкций. Рассмотрим задачу с точки зрения подбора материалов. Полагая, что задаваемый в конструкции набор материалов может быть произвольным, определим условие, которому должны соответствовать свойства этих материалов, чтобы ПНК оказалась оптимумом задачи (2.1).

Пусть выбор конструкционных материалов таков, что для всех элементов конструкции имеет место равенство:

$$\Pi_i(\bar{\epsilon}_i) / \rho_i = C = \text{const} > 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.1)$$

$$\Pi(\epsilon) = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon \quad (3.2)$$

где C – произвольная постоянная, Π – удельная потенциальная энергия деформации, ρ_i – плотность материала i -го КЭ, $\bar{\epsilon}_i$ – величина деформации (под которой понимается интенсивность деформаций [7], соответствующая напряжению Мизеса), соответствующая предельно допускаемому напряжению $\bar{\sigma}_i$ для материала i -го КЭ. Т.е. $\Pi_i(\bar{\epsilon}_i)$ – величина удельной потенциальной энергии деформации в i -м КЭ, когда в нем реализовано предельно допускаемое напряжение. Покажем, что при таком выборе материалов ПНК является оптимальным проектом для задачи минимизации массы конструкции при ограничениях на уровни напряжений.

Назовем полностью напряженный проект (2.2) конструкции, соответствующей условию (3.1), проектом I. Рассмотрим произвольные, допустимые для задачи (2.1), проекты, в части элементов (либо во всех элементах) которых уровни напряжений не достигают своих предельно допустимых величин. Так как КЭ в конструкции могут быть произвольным образом перенумерованы, то рассматриваемые проекты без ограничения общности можно определить соотношениями:

$$\begin{cases} \sigma_i = \bar{\sigma}_i & (i = 1, \dots, m) \\ \sigma_i < \bar{\sigma}_i & (i = m+1, \dots, n; \quad 0 \leq m \leq n) \end{cases} \quad (3.3)$$

Предположим противное: пусть ПНК для конструкции (3.1) не является проектом минимальной массы, т.е. среди проектов (3.3) существует проект II, имеющий массу конструкции, меньшую, чем величина массы у проекта I:

$$W^I - W^{II} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i^I - \alpha_i^{II}) \rho_i l_i > 0 \quad (3.4)$$

где через l_i обозначена величина отношения объема i -го КЭ к его проектному параметру (т.е. l_i может быть длиной стержня, площадью пластины и т.д.).

Рассмотрим вспомогательную задачу минимизации массы конструкции при ограничении сверху на ее интегральную податливость

$$\begin{cases} W \rightarrow \min \\ \tilde{R} \leq \tilde{R}^I \end{cases} \quad (3.5)$$

где \bar{R}^I – податливость проекта I. Здесь в качестве меры податливости используется величина дополнительной энергии конструкции

$$\bar{R} = \int_V R(\sigma) dV = \sum_{i=1}^n \alpha_i l_i R_i(\sigma_i) \quad (3.6)$$

$$R(\sigma) = \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma \quad (3.7)$$

где R – удельная дополнительная энергия. Условие оптимальности задачи (3.5) известно [8] – ему соответствует проект, имеющий активное ограничение на податливость и напряжения, удовлетворяющие соотношению (3.1). Таким образом, задача (3.5) сформулирована так, что ее оптимуму соответствует проект I.

Разность величин дополнительной энергии проектов I и II, согласно (3.6), равна

$$\bar{R}^I - \bar{R}^{II} = \sum_{i=1}^n (\alpha_i^I - \alpha_i^{II}) l_i R_i(\bar{\sigma}_i) + \sum_{i=m+1}^n \alpha_i^{II} l_i \int_{\sigma_i^{II}}^{\bar{\sigma}_i} \varepsilon_i d\sigma_i \quad (3.8)$$

Второе слагаемое в правой части (3.8), как следует из (3.3), всегда положительно. Если теперь показать, что и первое слагаемое неотрицательно, то из равенства (3.8) будет следовать $\bar{R}^{II} < \bar{R}^I$. Т.е. проект II является допустимым проектом для задачи (3.5), имеющим пассивное ограничение на податливость. Отсюда, ввиду оптимальности для данной задачи проекта I, следует неравенство $W^{II} > W^I$, которое противоречит предположению (3.4). Таким образом существование проекта II является невозможным, и проект I действительно является оптимумом задачи (2.1) для конструкции (3.1).

Осталось только определить условия, при которых первое слагаемое в правой части (3.8) неотрицательно, т.е.

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i^I - \alpha_i^{II}) l_i R_i(\bar{\sigma}_i) \geq 0 \quad (3.9)$$

Если количество КЭ в расчетной схеме не превосходит двух, то выполнение (3.9) очевидно следует из неравенства (3.4). Для случая же произвольного количества КЭ для истинности (3.9) уже недостаточно выполнения только неравенства (3.4), требуется еще дополнительное условие:

$$R_i(\bar{\sigma}_i) / \rho_i = \text{const} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.10)$$

Это соотношение определяет положительный множитель, с точностью до которого левая часть неравенства (3.9) будет равняться левой части (3.4), поэтому в данном случае истинность (3.9) будет следовать из (3.4). Остается определить, в каких же случаях выполняется (3.10). Условие (3.10), очевидно, связано с условием (3.1). В частности, если использовать степенную аппроксимацию зависимостей σ - ε материалов (такая аппроксимация обусловлена известными свойствами выпуклости связи напряжение – деформация [7]):

$$\varepsilon_i = D_i \sigma_i^q \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.11)$$

где $D_i > 0$ и $q \geq 1$ – константы, то условия (3.1) и (3.10) совпадают, так как для степенных зависимостей, очевидно, при любом уровне напряжений справедливо соотношение

$$\Pi_i / R_i = q \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.12)$$

В частном случае линейной упругости, когда равенство (3.11) выполняется с константами $D_i = 1/E_i$ (E_i – модуль упругости материала i -го КЭ) и $q = 1$, условие оп-

тимальности (3.1) принимает следующий вид:

$$\bar{\varepsilon}_i \sqrt{\frac{E_i}{\rho_i}} = \frac{\bar{\sigma}_i}{\sqrt{E_i \rho_i}} = \text{const} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.13)$$

Приведенный вывод условия оптимальности оказывается истинным не только при использовании КЭ с однородным НС, но и в более общем случае, если в качестве напряжения в КЭ использовать величину, вычисленную на основании среднего по объему элемента значения энергии деформации, поскольку в этом случае остается справедливым условие оптимальности задачи (3.5) [8], а в остальных формулах следует только заменить умножение на l_i интегрированием по l_i .

Поскольку выражения для удельных энергии деформации (3.2) и дополнительной энергии (3.7) записаны через напряжения Мизеса, то в них учитывается только энергия изменения формы и не учтена энергия изменения объема тела. Поэтому приведенный вывод условия оптимальности является справедливым в предположении о несжимаемости материалов (которым можно пользоваться, например, при развитых пластических деформациях [7]).

В случаях произвольных выпуклых зависимостей σ - ε и сжимаемых материалов условием (3.1) можно пользоваться как эвристическим, как это сделано в приводимом ниже в п. 6 тестовом примере.

4. Сходимость алгоритма полной напряженности. Для получения ПНК обычно используется эвристический итерационный алгоритм "отношения напряжений" (см., например, [4]):

$$\alpha_i^{(k+1)} = \alpha_i^{(k)} \sigma_i^{(k)} / \bar{\sigma}_i \quad (i = 1, \dots, n; \quad k = 0, 1, \dots) \quad (4.1)$$

где верхний индекс означает номер итерации. Так как в ходе итераций возможно нарушение ограничений на напряжения, то для данного алгоритма используется экстраполяция кривых напряжение - деформация за пределы диапазона допускаемых напряжений без нарушения их монотонности и выпуклости.

Для статически определимых конструкций данный алгоритм является, очевидно, одношаговым. В общем же случае его сходимость не гарантирована [9] (хотя на практике проблем со сходимостью обычно не возникает). В [6] доказано, что для физически нелинейных конструкций из одного материала алгоритм (4.1) сходится с монотонным уменьшением массы после первой итерации. Установим условие уменьшения массы при использовании нескольких материалов.

Определим, при каких условиях имеет место уменьшение массы конструкции в конце текущей итерации алгоритма в сравнении с ее массой в конце предыдущей итерации

$$W^{(k)} - W^{(k+1)} \geq 0 \quad (4.2)$$

Поскольку номер шага k здесь произволен, то условие (4.2) означает монотонное уменьшение массы при применении алгоритма. Это соответствует сходимости алгоритма в смысле нормы, в качестве которой выступает величина массы конструкции, в пространстве переменных проектирования (в выполнении аксиом, соответствующих понятию нормы пространства [10] для величины W нетрудно убедиться). С учетом (4.1) условие (4.2) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^n \rho_i l_i \alpha_i^{(k)} \left(1 - \frac{\sigma_i^{(k)}}{\bar{\sigma}_i} \right) \geq 0 \quad (4.3)$$

Поскольку рассматриваемые здесь конструкции находятся в равновесии, для них имеет место статический вариационный принцип [7]:

$$\tilde{R} \rightarrow \min_{\{\sigma\}} \quad (4.4)$$

согласно которому среди всех возможных полей напряжений, удовлетворяющих заданным краевым условиям, в конструкции реализуются напряжения, соответствующие абсолютному минимуму дополнительной энергии (3.6).

После того, как на k -й итерации алгоритма произошло изменение величин проектных параметров конструкции, она, если внутренние усилия в ней полагать "замороженными", стала полностью напряженной. Обозначим значение дополнительной энергии конструкции в этом состоянии как $\tilde{R}(\bar{\sigma})$. В действительности же конструкции будет соответствовать значение дополнительной энергии (обозначим его через \tilde{R}^k), в общем случае отличное от $\tilde{R}(\bar{\sigma})$ из-за перераспределения внутренних усилий вследствие статической неопределимости. Рассматривая получившееся в конструкции НС как имеющее место в действительности, а полностью напряженное состояние – как возможное, можно, согласно вариационному принципу (4.4), записать $\tilde{R}(\bar{\sigma}) - \tilde{R}^k \geq 0$. При пластическом деформировании сжимаемостью материала можно пренебречь [7]. При этом последнее неравенство примет вид

$$\sum_{i=1}^n l_i \alpha_i^{(k)} [R_i(\bar{\sigma}_i) - R_i(\sigma_i^{(k)})] \geq 0 \quad (4.5)$$

где величины R_i являются функциями напряжений Мизеса. Строгое равенство здесь будет иметь место лишь в том случае, когда предельный проект (т.е. ПНК) достигнут на k -м шаге алгоритма.

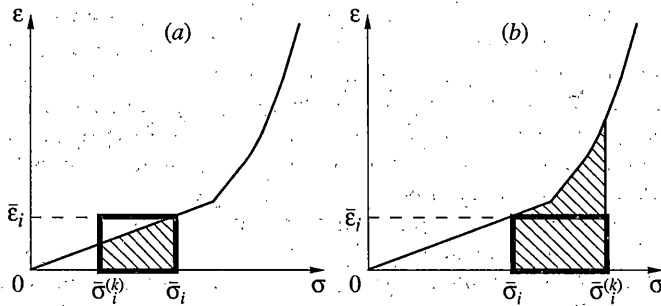
В данном случае уменьшение массы конструкции, то есть справедливость неравенства (4.3), можно обосновать неравенством (4.5), подобно тому, как это было сделано в П.3 неравенствами (3.4) и (3.9). Нетрудно видеть, что если все используемые материалы соответствуют условию

$$\bar{\sigma}_i \bar{\epsilon}_i / \rho_i = K > 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.6)$$

где K – произвольная постоянная, то каждое слагаемое в левой части неравенства (4.3), умноженного на указанную константу K , оказывается не меньше соответствующего слагаемого, находящегося в левой части неравенства (4.5):

$$(\bar{\sigma}_i - \sigma_i^{(k)}) \bar{\epsilon}_i \geq R(\bar{\sigma}_i) - R(\sigma_i^{(k)}) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.7)$$

Действительно, если после перераспределения внутренних усилий величина $\sigma_i^{(k)}$ стала меньше, чем $\bar{\sigma}_i$, то правую часть (4.7) можно определить на диаграмме $\epsilon(\sigma)$ заштрихованной площадью фигуры (см. фиг. 1, а), а левую – площадью прямоугольника с жирным контуром. Очевидно, что в этом случае неравенство (4.7) выполняется. Случай, когда величина $\sigma_i^{(k)}$ стала больше, чем $\bar{\sigma}_i$, показан на фиг. 1, б. Здесь выполнение (4.7) также очевидно. Таким образом, если конструкционные материалы соответствуют соотношению (4.6), то алгоритм полной напряженности будет сходиться с монотонным уменьшением массы конструкции. При доказательстве этого были использованы предположения о несжимаемости материала, а также монотонности и выпуклости связей напряжение – деформация. Больше никаких ограничений на эти связи не наложено (в частности, здесь не вводилось требование степенной аппроксимации). При использовании же степенных зависимостей $\sigma - \epsilon$ условие (4.6) оказывается эквивалентным условию оптимальности ПНК (3.1). Это следует из очевидного равенства $\bar{\sigma} \bar{\epsilon} = \Pi(\bar{\epsilon}) + R(\bar{\sigma})$ и соотношения (3.12). Таким образом, при использовании для связей напряжение – деформация степенной аппроксимации выполнение условия (3.1) не только означает оптимальность ПНК для задачи (2.1), но и гарантирует сходимость алгоритма (4.1) с монотонным уменьшением массы конструкции. В частности, это справедливо для линейно-упругих конструкций, когда оба указанных условия принимают вид (3.13).



Фиг. 1

Следует отметить, что неравенство (4.3) справедливо при переходе с k -й на $(k+1)$ -ю итерацию алгоритма, а неравенство (4.5) – с $(k-1)$ -й на k -ю. Поэтому уменьшение массы будет происходить на всех итерациях кроме, возможно, самой первой. Например, если у исходного проекта нарушены все ограничения на допускаемые напряжения, то масса конструкции, очевидно, должна возрасти на первой итерации алгоритма.

Полученные здесь условия оптимальности ПНК (3.1) и сходимости алгоритма ПНК (4.6) являются обобщением аналогичных условий, описываемых в [6] для физически нелинейных конструкций из одного материала.

5. Применение условия оптимальности. Условие (3.1) определяет свойства, которые должны иметь материалы, чтобы ПНК соответствовала оптимуму. Поэтому, например, в случаях, когда на основе ПНК сравнивается эффективность различных вариантов конструкции, следует подбирать материалы как можно ближе к условию (3.1), иначе можно прийти к ошибочным выводам.

Условие оптимальности (3.1) позволяет сделать определенные выводы и при использовании произвольных материалов (либо когда используемые материалы уже заданы из каких-то других соображений). При этом ПНК в общем случае уже не будет соответствовать условию (3.1). В этом случае соотношению (3.1) можно придать смысл не условия, накладываемого на материалы, а условия, из которого при заданных материалах задаются напряжения в элементах. При таком подходе напряжение в каждом элементе является однозначной и монотонной функцией от константы C . Рассмотрим максимально возможное значение этой константы, при котором все напряжения в конструкции не превышают своих предельных значений. Очевидно, что при этом хотя бы в одном из материалов будет иметь место полная напряженность, а в остальных уровни напряжений могут еще не достигать предельно допускаемых, т.е. проект однозначно определяется следующим условием:

$$\hat{\sigma}_m = \bar{\sigma}_m$$

$$\hat{\sigma}_i \leq \bar{\sigma}_i \quad (i = 1, \dots, m-1, m+1, \dots, n) \quad (5.1)$$

$$\Pi_i(\hat{\epsilon}_i) / \rho_i = \text{const} \quad (i = 1, \dots, n)$$

где $l \leq m \leq n$, через $\hat{\sigma}$ и $\hat{\epsilon}$ обозначены напряжения и деформации, соответствующие максимально допустимому значению C . Согласно доказанному в П.3 проект, соответствующий условию (5.1), будет легче любого проекта, уровни напряжений в элементах которого не превосходят соответствующие уровни (5.1), и имеющего хотя бы в одном КЭ напряжение, меньшее, чем соответствующее у проекта (5.1). Это позволяет сделать эвристический вывод о том, что соотношение (5.1) определяет нижнюю границу, в пределах которой должны находиться уровни напряжений у оптимального проекта. Например, если в конструкции используются материалы, которые соответствуют соотношению (3.1), то в этом случае проект (5.1), очевидно, совпадает с ПНК,

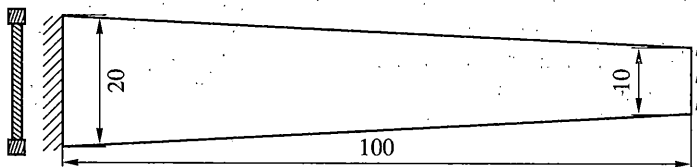
т.е. для такой конструкции нижняя и верхняя граница напряжений оптимума совпадают и дают оптимальный проект. Таким образом, при использовании (5.1) оказывается возможным оценить пределы, в которых должны находиться уровни напряжений у оптимального проекта, а также указать некоторые из элементов конструкции, которые заведомо будут полностью напряжены в оптимуме (ими, очевидно, являются те элементы, для материалов которых неравенства в (5.1) оказываются строгими равенствами). Причем для этого не требуется отыскание оптимального проекта. Поэтому данная оценка является полезной, тем более что для нее не требуется производить проектирование либо расчет НДС, а достаточно только проанализировать свойства используемых материалов. Поскольку сам оптимальный проект в общем случае может оказаться ближе как к своей верхней (ПНК), так и к нижней (5.1) границе, то проект (5.1) вполне может оказаться более рационален, чем ПНК. Таким образом для случаев, когда в качестве рационального проекта используется ПНК, имеет смысл построить также и проект (5.1), и выбрать лучший из этих двух вариантов. Вычислительные затраты при этом возрастут незначительно и, кроме того, это не требует внесения изменений в имеющееся программное обеспечение, ведь для построения проекта (5.1) подойдет тот же алгоритм (4.1), что и для построения ПНК, в котором только следует соответствующим образом задать допускаемые напряжения. Согласно формуле (5.1) порядок их вычисления следующий:

вычисляются величины $\Pi(\bar{\epsilon})/\rho$ для всех материалов, используемых в конструкции; среди них отыскивается минимум $C = \min(\Pi(\bar{\epsilon}_i)/\rho_i)$;

принимая для каждого материала (номер которого обозначим здесь через j) величину $\rho_j C$ в качестве нового значения Π_j , по нему в соответствии с кривой σ - ϵ этого материала вычисляется искомый уровень напряжения $\hat{\sigma}_j$. В общем случае для этого следует найти решение нелинейного уравнения (достаточно простого и имеющего единственное решение). Для случая линейно-упругого расчета алгоритм определения напряжений не содержит нелинейностей и сводится к следующей формуле:

$$\hat{\sigma}_j = \sqrt{E_j \rho_j} \min_i \left(\frac{\bar{\sigma}_i}{\sqrt{E_i \rho_i}} \right) \quad (j = 1, \dots, n)$$

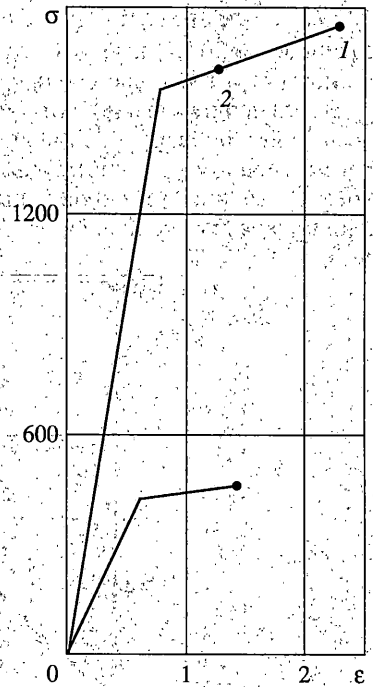
6. Пример. Полученные результаты можно наглядно проиллюстрировать на примере численного расчета рациональных параметров трапециевидной балки, работающей на изгиб. Схема балки показана на фиг. 2 (размеры даны в см). В стенке использован алюминиевый сплав (плотность 2800 кг/м^3 , допускаемое напряжение 461 МПа), в поясах – сталь (соответственно 7800 кг/м^3 и 1716 МПа). Конструкция нагружена поперечной касательной нагрузкой, равномерно распределенной по поверхности торцевого сечения (результатирующая равна 61.8 кН). Расчет нелинейного поведения материалов проводился по теории малых упругопластических деформаций [7], используемые при этом схематизированные диаграммы σ - ϵ показаны на фиг. 3. В расчетной схеме МКЭ пояса балки смоделированы при помощи стержневых КЭ (проектные параметры – площади поперечного сечения), а стенка, дискретизирована мембран-



Фиг. 2

щей на изгиб. Схема балки показана на фиг. 2 (размеры даны в см). В стенке использован алюминиевый сплав (плотность 2800 кг/м^3 , допускаемое напряжение 461 МПа), в поясах – сталь (соответственно 7800 кг/м^3 и 1716 МПа). Конструкция нагружена поперечной касательной нагрузкой, равномерно распределенной по поверхности торцевого сечения (результатирующая равна 61.8 кН). Расчет нелинейного поведения материалов проводился по теории малых упругопластических деформаций [7], используемые при этом схематизированные диаграммы σ - ϵ показаны на фиг. 3. В расчетной схеме МКЭ пояса балки смоделированы при помощи стержневых КЭ (проектные параметры – площади поперечного сечения), а стенка, дискретизирована мембран-

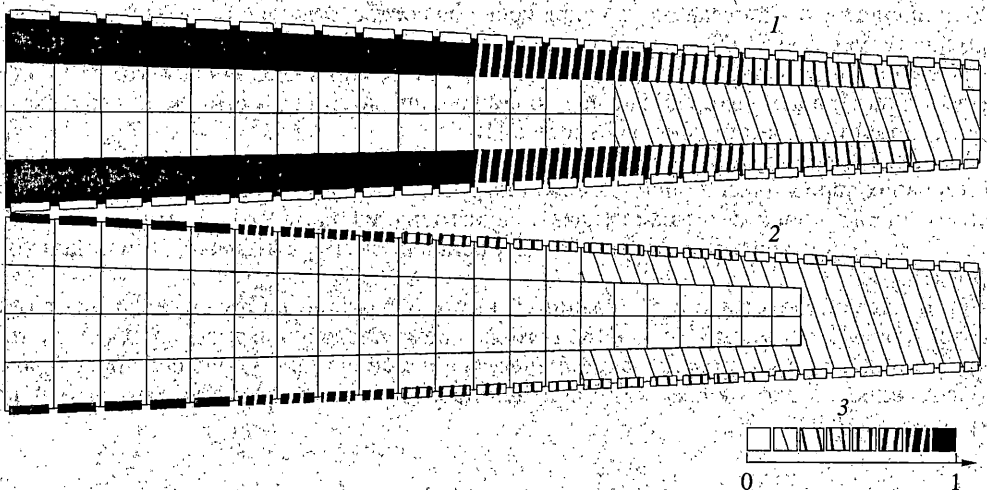
ными КЭ (проектные параметры – толщины). Так как последние имеют неоднородное НС, то для них в качестве напряжения в элементе использовано усредненное по объему КЭ значение. На фиг. 4 под номером 1 показано распределение обезразмеренных проектных параметров, ПНК. Можно видеть, что ПНК для данной конструкции является не очень удачным проектом. Стальные пояса здесь фактически исключены из работы конструкции, что является невыгодным с точки зрения восприятия поперечного изгиба. Это связано с тем, что материалы, используемые в конструкции, не соответствуют условию оптимальности ПНК (3.1): у стали величина $\Pi(\bar{\epsilon})/\rho$ более чем в 2 раза превышает аналогичную величину для алюминиевого сплава. Поэтому для данной конструкции проект (5.1) будет отличаться от ПНК. Для его построения следует уменьшить допускаемое напряжение в стали (примерно на 7%). Требуемая величина напряжения соответствует точке 2 на диаграмме σ - ϵ на фиг. 3. Результат можно видеть на фиг. 4 под номером 2. Здесь силовой материал распределен уже существенно более рационально: основная его часть сосредоточена как раз в стальных поясах. Данный проект оказался лучше, чем ПНК, как по массовым (2.26 кг против 3.29 кг), так и по жесткостным (максимальное перемещение 9.14 см против 11.75 см) свойствам. Следует также отметить, что построение данного проекта потребовало значительно меньшего количества итераций.



Фиг. 3

Данный пример можно рассматривать и с точки зрения подбора материалов, как иллюстрацию условия оптимальности (3.1), поскольку задание меньшего уровня напряжений в материале можно формально трактовать как замену его другим материалом с меньшим допускаемым напряжением.

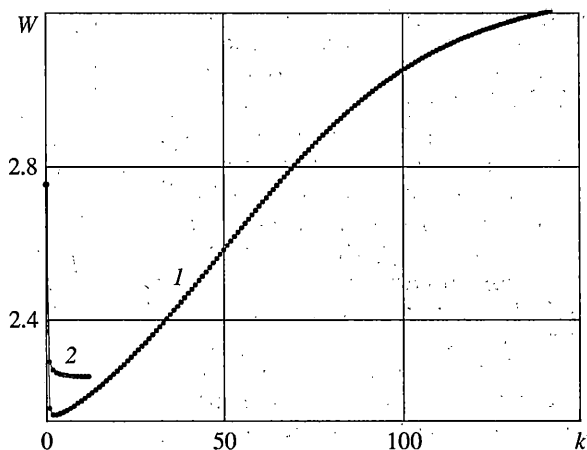
На фиг. 5 показано изменение массы W конструкции при применении алгоритма (4.1) для построения рассмотренных проектов (по оси абсцисс отложен номер итера-



Фиг. 4

ции k , по оси ординат – значение массы в кг). Можно видеть, что для проекта (5.1), в отличие от ПНК, имеет место монотонное уменьшение массы. Данный результат иллюстрирует условие уменьшения массы (4.6), которому соответствует проект (5.1).

В дальнейшем для полного анализа НДС следует учитывать не только физическую, но и геометрическую нелинейность (судя, в частности, по величинам перемещений в рассмотренном примере). Однако для линейно-упругих задач, а также в качестве первого нелинейного приближения относительно линейно-упругой модели, рассмотренный подход вполне подойдет.



Фиг. 5

7. Заключение. Установлены достаточные условия оптимальности ПНК и сходимости алгоритма отношения напряжений для конструкций из нескольких материалов с учетом физической нелинейности. Согласно первому из них, ПНК будет соответствовать оптимуму, если для всех используемых в ней материалов отношение удельной потенциальной энергии деформации, соответствующей предельно допускаемому напряжению, к плотности материала является одним и тем же. Согласно второму условию, алгоритм отношения напряжений будет сходиться с монотонным уменьшением массы конструкции, если для всех используемых материалов отношение произведения предельно допускаемого напряжения на соответствующую ему деформацию к плотности является одним и тем же.

Полученное условие оптимальности позволяет без проведения расчетов НДС конструкции подобрать материалы с целью повышения достоверности оценки эффективности вариантов конструкции на основе ПНК.

Используя полученное условие оптимальности, можно при произвольно заданных материалах эвристически оценить нижнюю границу уровней напряжений в элементах оптимального проекта, а также указать некоторые из элементов, которые окажутся полностью напряжены в оптимуме. Такая оценка не требует отыскания оптимального проекта.

Проект, соответствующий указанной нижней границе напряжений, может оказаться ближе к оптимуму, чем ПНК. В то же время построение этого проекта, не требует большого объема вычислений и внесения изменений в имеющееся программное обеспечение, поскольку может быть произведено теми же методами, что и построение ПНК.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баничук Н.В.* Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986. 302 с.
2. *Разани Р.* Поведение равнонапряженной конструкции и ее отношение к конструкции минимального веса // *Ракетн. техника и космонавтика*, 1965. Т. 3. № 12. С. 115–124.
3. *Липин Е.К., Фролов В.М., Чедрик В.В., Шаныгин А.Н.* Алгоритм оптимизации силовых конструкций по условиям прочности с компенсацией нарушенных ограничений // *Учен. зап. ЦАГИ*. 1988. Т. 19. № 1. С. 58–66.
4. *Fleury C.* An efficient optimality criteria approach to the minimum weight design of elastic structures // *Computers and Structures*. 1980. V. 11. № 3. P. 163–173.
5. *Рабинович И.М.* Основы строительной механики стержневых систем. М.: Госстройиздат, 1960. 519 с.
6. *Selyugin S.V.* Optimization of physically nonlinear structures // *Proceedings of the 1st World Congr. of Structural and Multidisciplinary Optimization.* / Eds. N. Olhoff and G. Rozvany. Goslar, Germany. Oxford: Pergamon Press, 1995. P. 437–444.
7. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
8. *Селюгин С.В., Чехов В.В.* Расчет рациональных параметров физически нелинейных конструкций // *Тр. ЦАГИ*. 1998. Вып. 2632. С. 85–95.
9. *Melosh R.J.* Convergence in fully-stressed designing // *AGARD C.P.* 36–70. 1970. P. 7–1–7–15.
10. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.

Жуковский.

Поступила в редакцию
27.06.2000