МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2002

УДК 539.376

© 2002 г. А.Н. АЛИ-ЗАДЕ

ОБ УЧЕТЕ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ РАСЧЕТЕ КОНСТРУКЦИЙ, КОНТАКТИРУЮЩИХ С ГРУНТОМ

Предложен вариационный принцип для расчета конструкций, контактирующих с грунтом, когда и конструкции, и грунт проявляют свойства ползучести. При этом действие грунта на конструкцию описывается модифицированной моделью Винклера, учитывающей ползучесть грунта. В статье, используя вариационный принцип, исследуется поведение сжатого упругого стержня, находящегося в грунте, проявляющего свойства ползучести. Показано, что при определенных значениях нагрузки и параметров ползучести существует критическое время выпучивания.

1. Введение. При расчете конструкций, контактирующих с грунтом, особое внимание обращается на два момента: выбор расчетной схемы конструкции и моделирование действия грунта на конструкцию. В данной статье предполагается, что в конструкции могут возникать конечные деформации, сопровождающиеся деформацией ползучести. Для определения силы воздействия грунта на конструкцию, в общем случае, необходимо определить напряженно-деформированное состояние грунта. Учитывая сложность данной задачи, в ряде случаев, контактную силу определяют, основываясь на модели Винклера. В данной работе предлагается модификация модели Винклера с учетом ползучести грунта. Так как ползучесть описывается нелинейными уравнениями, то очевидно, что задача расчета конструкции является сложной задачей и для ее решения целесообразно применение приближенного метола. Целью работы является построение функционала для расчета конструкций, контактирующих с грунтом, когда и конструкция, и грунт проявляют свойства ползучести и апробирование его на конкретном примере.

2. Постановка задачи. При расчете контактных задач, как показал опыт проектирования, достаточно знать зависимость контактного давления q от перемещения точек поверхности контакта w. Эта зависимость в определенной степени отражает свойства грунта. Примером такой зависимости является зависимость модели Винклера $q = kw$, построенной для упругого грунта, где k – коэффициент жесткости постели, зависящий от ряда параметров, в частности, от модуля упругости грунта. Для более сложных грунтов аналогичную зависимость (модификация модели Винклера) можно построить, основываясь на решение следующей задачи [1]. Рассмотрим слой толщиной H, лежащий на жестком основании. На ограничивающую поверхность действует равномерно распределенная, вертикальная нагрузка интенсивности q. Задавая свойства среды, из решения задачи, определяется зависимость между q и перемещением точек ограничивающей поверхности. Основываясь на виде этой зависимости, введением коэффициентов, получается зависимость, характеризующая модифицированную модель Винклера рассматриваемого грунта.

В данной работе предполагается, что грунт проявляет свойства ползучести. Не анализируя виды грунтов, которые описываются ползучестью, примем, что уравнение ползучести грунта можно представить в следующем виде [2]:

$$\dot{p} = \upsilon(\sigma, q_1; q_2; \ldots; q_m) \tag{2.1}$$

где p – деформация ползучести, q_i – структурные параметры, σ – напряжение, υ –

функция ползучести грунта, точка – дифференцирование по времени t. Под структурными параметрами здесь понимаются некоторые параметры, характеризующие состояние грунта. Эти параметры такие, что в каждый момент времени скорость ползучести при данных значениях q_i определяется однозначно действующим напряжением σ. Примером такого параметра является пористость. Изменения структурных параметров, в ряде случаев, задаются некоторыми кинетическими уравнениями вида [2]:

$$\dot{q}_i = \varphi_i(\sigma, t; q_1; q_2; \ldots; q_m) \tag{2.2}$$

Начальные условия для определения q_i ставятся, основываясь на состоянии грунта при $t = 0$.

Не анализируя соотношения (2.1) и (2.2), рассмотрим простейшие. Предположим, что физическое состояние грунта определяется следующей системой уравнений:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} / E_s + \upsilon(\sigma, \omega), \quad \dot{\omega} = \varphi(\sigma, \omega) \tag{2.3}$$

где ε – деформация, E_s – модуль упругости мгновенной деформации грунта, $\omega \equiv q_1$ ($q_2 = \ldots = q_n = 0$). Решим поставленную выше задачу для малых перемещений.

Исходя из граничных условий имеем, что $\sigma = -q$. Тогда из (2.3) следует

$$\partial \dot{U} / \partial z = -\dot{q} / E_s - \upsilon(q, \omega), \quad \dot{\omega} = \varphi(q, \omega)$$

где z – координата вертикальной оси, направленной вниз и начало которой находится на ограничивающей поверхности. Величина U – перемещение вдоль оси z. Так как υ является нечетной функцией σ, то перед υ стоит знак минус. Учитывая, что на поверхности контакта слоя с жестким основанием перемещение отсутствует (т.е. при $z = H$ имеем $U = 0$), получим

$$\dot{u}(z) = [\dot{q} / E_s + \upsilon(q, \omega)](H - z), \quad \dot{\omega} = \varphi(q, \omega)$$

или

$$\dot{w} = H[\dot{q} / E_s + \upsilon(q, \omega)], \quad \dot{\omega} = \varphi(q, \omega), \quad w = u\big|_{z=0}$$

Отсюда получаем, что распределение структурного параметра не зависит от координаты. При построении модели Винклера этот результат принимается за предположение. Обобщим приведенное соотношение следующим образом:

$$\dot{w} = \frac{\dot{q}}{k} + \frac{1}{k_1}\upsilon(q, \omega), \quad \dot{\omega} = \varphi(q, \omega) \tag{2.4}$$

где k – коэффициент жесткости постели, k_1 – коэффициент ползучести постели. Так же как и k, величина k_1 определяется из эксперимента. При $\upsilon = 0$ из (2.4) получаем модель Винклера для упругого грунта. Соотношение (2.4) принимается за соотношение модифицированной модели Винклера для грунтов, проявляющих свойства ползучести с учетом изменения структурного параметра.

Наряду с принятием соотношения (2.4) предполагается, что поверхностные усилия $\mathbf{T}$, действующие на поверхности S_k, являющейся поверхностью контакта конструкции с грунтом, имеют вид $\mathbf{T} = -q\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ – вектор нормали недеформированной поверхности S_k. Такое представление предполагает возможность проскальзывания между грунтом и конструкцией. Это предположение приводит к равенству нормальных составляющих векторов перемещения точек контактной поверхности конструкции и грунта, т.е. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = w$, где $\mathbf{u}$ – вектор перемещения точек конструкции, w – перемещение точек грунта вдоль нормали. Таким образом

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = w, \quad \mathbf{T} = -\mathbf{n}q \quad \text{при} \quad x \in S_k \tag{2.5}$$

Отметим, что для величин w и q принимается соотношение (2.4). Уравнения равновесия, соотношения между компонентами тензора деформации ε_{ij} и компонентами вектора перемещения u_k для точек конструкции с учетом геометрической нелинейности примем в виде [3]:

$$[\sigma^{ij}(\delta_i^k + u_{,i}^k)]_{,j} = 0 \tag{2.6}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{,i}^k u_{k,j}), \quad x \in V$$

где σ^{ij} – компоненты тензора напряжения, δ_i^k – компоненты тензора Кронекера, запятая – ковариантное дифференцирование, V – объем недеформированного тела. Предположим, что конструкция проявляет ползучесть и что деформацию точек можно представить следующим образом $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^y + P_{ij}$, где ε_{ij}^y – мгновенная деформация, которая принимается упругой, P_{ij} – деформация ползучести (отметим, что P_{ij} зависит от напряженного состояния, но не зависит от ее скорости).

На поверхности конструкции S могут быть заданы не только контактные условия. Предположим, что на части поверхности конструкции S_σ заданы усилия $\overline{\mathbf{T}}$, а на другой части S_u заданы перемещения $\overline{\mathbf{u}}$. При этом вся поверхность конструкции S является объединением поверхностей S_k, S_σ, S_u, которые между собой не пересекаются. Таким образом, граничные условия для расчета конструкции наряду с условиями (2.5) могут содержать следующие условия:

$$u_i = \overline{u}_i \text{ при } x \in S_u, \quad T^k = \overline{T}^k \text{ при } x \in S_\sigma \tag{2.7}$$

$$T^k = \sigma^{ij}(\delta_i^k + u_{,i}^k)n_j$$

Приведенные уравнения вместе с граничными условиями позволяют определить напряженно-деформированное состояние конструкции.

3. Метод решения. Ввиду геометрической и физической нелинейности поставленной задачи для ее решения целесообразно применение приближенного метода, в частности, вариационного. Учитывая специфику приведенных уравнений, предлагаемый вариационный принцип аналогичен принципу Сандерса, Мак-Комба, Шлехте [3].

Рассмотрим следующий функционал:

$$J = \int_V \left\{\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{,i}^k u_{k,j})\dot{\sigma}^{ij} + \frac{1}{2}\sigma^{ij}\dot{u}_{,i}^k \dot{u}_{k,j} - \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{ij}^y \dot{\sigma}^{ij} - \right.$$

$$\left. - \dot{P}_{ij}\dot{\sigma}^{ij}\right\}dV - \int_{S_\sigma} \dot{\overline{T}}^k \dot{u}_k dS - \int_{S_u} \dot{T}(\dot{u}_i - \dot{\overline{u}}_i)dS +$$

$$+ \int_{S_k} \left(\dot{q}\dot{w} - \frac{1}{2k}\dot{q}^2 - \frac{1}{k_1}\dot{q}\upsilon\right)dS + \int_{S_k} \lambda\left(\frac{1}{2}\dot{\omega}^2 - \dot{\omega}\varphi\right)dS \tag{3.1}$$

При написании функционала (3.1) предполагалось выполнение контактного условия: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = w$ при $x \in S_k$. Кроме того, под ε_{ij}^y и P_{ij} подразумевается их зависимость от σ_{ij}. Независимыми варьируемыми являются $\dot{u}_i, \dot{\sigma}^{ij}, \dot{q}, \dot{\omega}$. Величина λ есть некоторая весовая функция, не зависящая от варьируемых величин. Покажем, что стационарное значение функционала (3.1) достигается для функций, являющихся решением поставленной задачи.

Для этого определим первую вариацию функционала J. Основываясь на условии варьирования: варьируются только скорости, а не сами величины (по аналогии с условием варьирования функционала Сандерса), имеем:

$$\delta J = \int_V \left\{-\left[\sigma^{ij}(\delta_i^k + u_{,i}^k)\right]_{,j} \delta\dot{u}_k + \left[\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{,i}^k u_{k,j}) - \right.\right.$$

$$\left. - \dot{\varepsilon}_{ij}^y - \dot{P}_{ij}\right]\delta\dot{\sigma}^{ij} + \int_{S_\sigma} (\dot{T}^k - \dot{\bar{T}}^k)\delta\dot{u}_k dS + \int_{S_u} \delta\dot{T}^i(\dot{u}_i - \dot{\bar{u}}_i)dS +$$

$$+ \int_{S_k} (\dot{T}^i + \dot{q}n^i)\delta u_i dS + \int_{S_k} \delta\dot{q}\left(\dot{w} - \frac{\dot{q}}{2k} - \frac{v}{k_1}\right)dS + \int_{S_k} \lambda(\dot{\omega} - \varphi)\delta\dot{\omega}dS \qquad (3.2)$$

При написании δJ использовались теорема Гаусса–Остроградского, теорема Бетти $\dot{\varepsilon}_{ij}^y \delta\dot{\sigma}^{ij} = \dot{\sigma}^{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij}^y$, условие независимости скорости ползучести от скорости напряжения $\delta\dot{P}_{ij} = 0$. Условие стационарности функционала $\delta J = 0$, основываясь на основную лемму вариационного исчисления, приводит к равенству нулю коэффициентов при вариациях независимых величин. Отсюда получаем уравнение равновесия, физические соотношения, силовые и кинематические граничные условия, уравнения равновесия в точках поверхности контакта (все перечисленные уравнения получаются в скоростях), а так же уравнения модели Винклера и кинетическое уравнение. Уравнения, полученные в скоростях можно проинтегрировать по времени. Для этого необходимо поставить следующие начальные условия: при $t = 0$ искомые величины определяют напряженно-деформированное состояние соответствующей упругой задачи. Очевидно, что после интегрирования получаем уравнение не в скоростях. Таким образом, показано, что функционал (3.1) может быть использован для решения поставленной контактной задачи.

Проанализируем некоторые особенности предложенного функционала. Функционал (3.1) содержит величину λ, значение которой, как видно из доказательства, не влияет на вид уравнений Эйлера. Эта величина была введена по аналогии с работой [4]. Используя ускорения, а не скорости, как показано в [5], можно построить функционал, где величина λ определяется. Отметим, что соотношения модели Винклера (2.4) могут быть обобщены для m структурных параметров. Для этого случая не представляет труда обобщение функционала (3.1): вводятся λ_i ($i = 1–m$) множителей. Эти замечания и имеющиеся обобщения функционала Сандерса, предложенные проф. С.А. Шестериковым и его учениками [2], позволяют функционал (3.1) применять как для конструкций с различными физическими свойствами, так и для грунтов, описывающимися более сложными реологическими моделями.

4. Пример. Применим предложенный функционал для решения следующей задачи. Рассмотрим прямолинейный упругий стержень длиной L, шириной b, толщиной $2h$. Предположим, что торцы его шарнирно оперты, и он сжат равномерно распределенной по торцевой поверхности нагрузкой интенсивности P. Кроме того, предполагается, что по боковой поверхности стержень контактирует с грунтом, проявляющим свойства ползучести. Такого типа задачи встречаются при расчете свайных конструкций. Исследуем несущую способность этого стержня.

Расчет конструкции будем проводить в рамках нелинейной технической теории. Тогда деформация точек стержня определяется следующим выражением:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2}{\partial x^2}(w - w_0) \qquad (4.1)$$

где u – продольное перемещение точек оси, w – прогиб, x – продольная координата $(0 \leqslant x \leqslant L)$, z – поперечная координата $(-h \leqslant z \leqslant h)$, $\bar{w}$ – начальный прогиб, характеризующий несовершенство стержня. Предположим, что действие грунта описывается моделью Винклера, характерная зависимость для которой имеет вид

$$\dot{w} = \dot{q} / k + A q^n / k_1 \tag{4.2}$$

где n – степень нелинейности, принимающая нечетные значения, A – коэффициент ползучести. При написании (4.2) предполагалось, что структурный параметр не меняется, а A зависит от его начального значения. Для принятых зависимостей решим поставленную задачу, используя фнукционал (3.1).

После известных процедур, применительно к поставленной задаче, функционал (3.1) примет вид

$$J = \int_0^L \left\{ \dot{N} \left[\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(w - \overline{w}) \frac{\partial w}{\partial x} \right] - \dot{M} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} N \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{4Eh} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\dot{N}^2 + \frac{3}{h^2} \dot{M}^2 \right) \right\} dx + 2h\dot{P}[\dot{u}(L) - \dot{u}(0)] - \left[N \frac{\partial}{\partial x}(w - \overline{w}) \right] \dot{w} \Bigg|_0^L -$$
$$- \frac{\partial \dot{M}}{\partial x} \dot{w} \Bigg|_0^L + \int_0^L \left[\dot{q}\dot{w} - \left(\frac{\dot{q}^2}{2k} + \frac{\dot{q} A q^n}{k_1} \right) \right] dx \tag{4.3}$$

где N – усилие, M – момент, действующие в стержне. Варьируемыми величинами являются $\dot{N}, \dot{M}, \dot{w}, \dot{u}, \dot{q}$. При написании функционала (4.3) учитывались граничные условия опирания стержня ($w = 0$, $M = 0$ при $x = 0$, L). Кроме того, использовалось, что контактная поверхность является боковой поверхностью стержня, прогиб стержня совпадает с перемещением точек грунта. Исключим из функционала (4.3) величину $\dot{u}$. Проварьировав J и $\dot{u}$ получаем, что $N = -2hP$. В результате этой операции число искомых величин уменьшается, а именно, после исключения u и N функционал J будет зависеть от $\dot{w}, \dot{M}, \dot{q}$. Для нахождения стационарного значения преобразованного функционала применим метод Ритца. Неизвестные величины будем искать в виде

$$w = w_0 \sin \frac{\pi x}{L}, \quad M = M_0 \sin \frac{\pi x}{L}, \quad q = q_0 \sin \frac{\pi x}{L} \tag{4.4}$$

где w_0, M_0, q_0 – коэффициенты аппроксимации, зависящие от t. Вид аппроксимации продиктован решением упругой задачи, видом граничных условий и ожидаемой картиной поведения стержня. Отметим, что начальное несовершенство берется в виде $\overline{w} = \overline{w}_0 \sin(\pi x / L)$. Тогда с точностью до членов, не влияющих на стационарное значение функционала, после учета (4.4) в J и интегрирования на отрезке $[0, L]$, получаем

$$\frac{\pi}{L} J = -2h\dot{P} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 (w_0 - \overline{w}_0) \frac{\dot{w}_0 \pi}{2} + \dot{M}_0 \dot{w}_0 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{\pi}{2} - hP \times$$
$$\times \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \dot{w}_0^2 \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4Eh^3} \dot{M}_0^2 \frac{\pi}{2} + \dot{q}_0 \dot{w}_0 \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\dot{q}_0^2 \pi}{4k} + \dot{q}_0 \frac{A q_0^n Q}{k_1} \right) \tag{4.5}$$
$$Q = \int_0^\pi \sin^{n+1} \xi d\xi$$

Из вариационного принципа следует, что J является функцией от $\dot{w}_0, \dot{M}_0, \dot{q}_0$. Стационарное значение ее определяется из следующей системы:

$$\frac{\partial J}{\partial \dot{M}_0} = \dot{w}_0 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 - \frac{3}{2Eh^3} \dot{M}_0 = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \dot{q}_0} = \frac{\dot{w}_0 \pi}{2} - \left(\frac{\dot{q}_0 \pi}{2k} + \frac{A q_0^n Q}{k_1} \right) = 0$$
$$\frac{\partial J}{\partial \dot{w}_0} = -2h\dot{P} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 w_0 + \dot{M}_0 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 - 2hP \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \dot{w}_0 + \dot{q}_0 = 0 \tag{4.6}$$

Полученная система является системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для ее решения необходимо поставить начальные условия. Основываясь на вариационный принцип, начальные условия определяются из решения соответствующей упругой задачи. В данном случае такой задачей является задача об изгибе упругого стержня шарнирно опертого по торцам и контактирующего с упругим грунтом, описывающегося упругой моделью Винклера. Задача решается в вышеприведенных предположениях. Система определяющих уравнений для этой задачи совпадает с вышеприведенными уравнениями, если принять $A = 0$. Эту задачу можем решить вариационным принципом Рейсснера, используя метод Ритца и аппроксимацию (4.4). Не проводя всех выкладок (они аналогичны вышепроделанным), выпишем систему уравнений, определяющих стационарное значение функционала Рейсснера. Она имеет вид

$$(w_0^* - \overline{w}_0)\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - \frac{3M_0^*}{2Eh^3} = 0, \quad w_0^* - \overline{w}_0 - \frac{q_0^*}{k} = 0$$

$$-2hP\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 w_0^* + M_0^*\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 q_0^* = 0 \qquad (4.7)$$

где w_0^*, M_0^*, q_0^* – соответственно, начальные значения w_0, M_0, q_0. При написании (4.7) предполагалось, что $P = \mathrm{const}$.

Проанализируем систему начальных значений. После несложных преобразований определим зависимость прогиба от нагрузки. Ее возьмем в виде

$$w_0^* = \overline{w}_0 P_э /(P_э - P) \qquad (4.8)$$

$$P_э = \frac{k}{2h}\left(\frac{\pi}{L}\right)^{-2} + \frac{Eh^2}{3}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 = \frac{k}{2h}\left(\frac{\pi}{L}\right)^{-2} + P_{э0}$$

Отсюда видно, что с возрастанием нагрузки $0 \leqslant P < P_э$ прогиб увеличивается от $\overline{w}_0$ до бесконечности. При $\overline{w}_0 = 0$ из (4.8) следует, что для существования w необходимо, чтобы $P = P_э$. Это и определяет физический смысл $P_э$. В случае $k = 0$ из (4.8) получаем значение эйлеровской нагрузки $P_э = P_{э0}$.

Рассмотрим систему (4.6). При $P < P_э$ с учетом (4.7) имеем

$$M_0 = \frac{2Eh^3}{3} w_0 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2, \quad q_0 = 2h\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 w_0 (P < P_{э0})$$

$$\dot{w}_0 = w_0^n \frac{(P - P_{э0})^n}{P_э - P} B, \quad B = \frac{2AQ}{\pi k_1}(2h)^{n-1}\left(\frac{\pi}{L}\right)^{2(n-1)} k \qquad (4.9)$$

Последнее уравнение является определяющим для решения поставленной задачи. Заметим, что для решения этого дифференциального уравнения имеется начальное условие (4.8). После интегрирования по t при $n > 1$ получим

$$w_0 = \left\{\overline{w}_0^{-n+1}\left(\frac{P_э}{P_э - P}\right)^{-n+1} - (n-1)t\frac{(P - P_{э0})^n}{P_э - P} B\right\}^{-1/(n-1)} \qquad (4.10)$$

Отсюда следует, что при $P > P_{э0}$ (уравнение решалось при $P < P_э$) существует такое значение $t = t_*$, при котором прогиб становится неограниченным, где

$$t_* = \overline{w}_0^{-n+1}\left(\frac{P_э}{P_э - P}\right)^{-n+1} \frac{1}{n-1} \frac{P_э - P}{(P - P_{э0})^n B} \qquad (4.11)$$

Отметим, что при $n = 1$ прогиб во времени возрастает экспоненциально. При $P < P_{э0}$ прогиб со временем уменьшается до нулевого значения независимо от n.

5. Заключение. Для расчета конструкций, контактирующих с грунтом, проявляющим ползучесть, была предложена модификация модели Винклера, учитывающая ползучесть грунта. Для решения поставленной задачи был предложен вариационный принцип, который был апробирован на конкретном примере о сжатии упругого стержня, имеющего начальное несовершенство и находящегося в грунте. Показано, что если сжимающая нагрузка меньше эйлеровой нагрузки для стержня, не контактирующего с грунтом ($P < P_{э0}$), то со временем прогиб стремится к нулю. Если $P > P_{э0}$, но меньше эйлеровой нагрузки для стержня, контактирующего с упругим грунтом ($P < P_э$), то со временем прогиб неограниченно возрастает. При этом, в зависимости от показателя нелинейности степенного закона ползучести грунта, существует критическое время выпучивания. Если $P = P_э$, то стержень при приложении нагрузки мгновенно теряет устойчивость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эюбов Я.А., Али-заде А.Н., Ахундов М.Б.* Метод Винклера расчета грунтовых оснований. Баку, 1999. 126 с.
2. Закономерности ползучести и длительной прочности. Справочник / Под ред. С.А. Шестерикова. М.: Машиностроение, 1983. 101 с.
3. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
4. *Сергеев М.В.* Смешанный вариационный принцип теории ползучести в задачах длительной прочности // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 6. С. 112–116.
5. *Али-заде А.Н., Эюбов Я.А.* Об одном вариационном принципе расчета длительной прочности конструкций // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 853–859.

Баку

Поступила в редакцию
8.06.2000