МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2002

УДК 539.3

© 2002 г. Н.В. БАНИЧУК

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ БЕЗМОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧЕК ИЗ КВАЗИХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯМ ПОСТОЯННЫХ И ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ НАГРУЗОК

Рассматриваемые в данной работе вопросы связаны с проектированием оболочек минимального веса из квазихрупких материалов. Исследуемые задачи оптимизации заключаются в отыскании оптимальных распределений толщин оболочек и учитывают возможность возникновения и роста трещин. Данные задачи характеризуются неполнотой информации относительно начальных размеров, положения и ориентации трещин. Представлены некоторые основные постановки задач оптимального проектирования оболочек, основанные на гарантированном подходе, и результаты аналитических исследований.

1. Рассмотрим оболочку, имеющую форму поверхности вращения и нагруженную осесимметричными воздействиями. Интенсивности внешних нагрузок, действующих в касательном и нормальном к меридианам направлениям, обозначим через q_ϕ и q_n. Положение меридианной плоскости задается углом θ, отсчитываемым от некоторой заданной меридианной плоскости, а расположение параллельного круга определяется углом ϕ между нормалью к поверхности и осью вращения (фиг. 1). Меридианная плоскость и плоскость перпендикулярная к меридиану являются плоскостями главных кривизн в рассматриваемой точке поверхности оболочки. Соответствующие радиусы кривизн обозначаются через r_1 и r_2. Радиус параллельного круга обозначается через r_0. Предполагается, что радиусы кривизн являются величинами, существенно превышающими значения толщин оболочки [1, 2], т.е.

$$h_m = \max_{\varphi} h(\varphi) \ll r_m \tag{1.1}$$

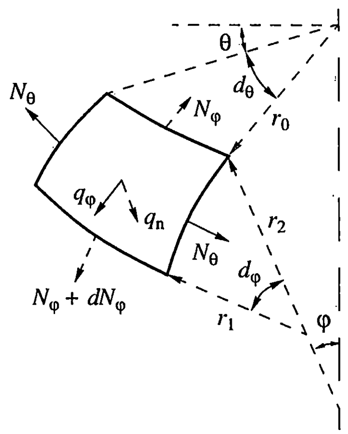
$$r_m = \min\{\min_{\varphi} r_1(\varphi),\ \min_{\varphi} r_2(\varphi)\} \tag{1.2}$$

Операция min в (1.2) означает отыскание минимального из двух величин, записанных в фигурных скобках в (1.2).

Предполагается, что материал оболочки является квазихрупким и что в оболочке имеется сквозная трещина длины l. Трещина считается прямолинейной и удовлетворяющей условию $h_m \ll l \ll r_m$. Расположение трещины заранее неизвестно. Условие распространения трещины, как это следует из механики квазихрупкого разрушения, записывается в виде

$$K_1 = K_{1C} \tag{1.3}$$

где K_1 – коэффициент интенсивности напряжений, фигурирующий в асимптотическом представлении компонент тензора напряжений вблизи края трещины. Здесь рассматривается сквозная трещина нормального отрыва. Величина K_{1C} представляет собой



Фиг. 1

константу квазихрупкой прочности материала. Для вычисления коэффициента интенсивности напряжений будем пользоваться формулой [3, 4]:

$$K_1 = \sigma_n \sqrt{\pi l / 2} \tag{1.4}$$

предполагая оболочку замкнутой, т.е. не имеющей свободных краев, или считая трещину удаленной от краев незамкнутой оболочки. Через σ_n обозначены напряжения, возникающие в нерастрескавшейся оболочке на месте предполагаемого расположения трещины.

Нижний индекс n означает, что напряжение действует в направлении нормальном к берегам трещины.

Для удобства последующих рассмотрений введем малый положительный параметр ε и редуцированное значение предельной величины коэффициента интенсивности напряжений $K_{1\varepsilon} = K_{1C} - \varepsilon$, $\varepsilon \geqslant 0$. Тогда условие нераспространения трещины можно приближенно записать следующим образом:

$$K_1 \leqslant K_{1\varepsilon} \tag{1.5}$$

Уравнения равновесия оболочки, служащие для определения величин нормальных мембранных усилий N_ϕ, N_θ, имееют вид [1]:

$$N_\varphi / r_1 + N_\theta / r_2 = -q_n \tag{1.6}$$

$$2\pi r_0 N_\varphi \sin\phi + R = 0 \tag{1.7}$$

где R – результирующая внешних нагрузок, действующих на часть оболочки, расположенную над параллельным кругом, определяемом координатой φ. Из приведенных уравнений видно, что для заданных функций $q_n(\varphi)$, $R(\varphi)$, $r_1(\varphi)$, $r_2(\varphi)$, $r_0(\varphi)$ ($r_0 = r_2 \sin\varphi$) усилие N_φ находится из соотношения (1.7), сила N_θ определяется при помощи уравнения (1.6). Соответствующие напряжения вычисляются по формулам

$$\sigma_\varphi = N\varphi(\varphi)/h(\varphi), \quad \sigma_\theta = N_\theta(\varphi)/h(\varphi) \tag{1.8}$$

Принимая во внимание, что коэффициент интенсивности напряжений K_1 зависит неявно (через зависимость величины σ_n) от толщины и от параметров, определяющих расположение трещины, рассмотрим следующую задачу оптимального проектирования оболочки. Требуется найти оптимальное распределение толщин $h = h(\varphi)$, которое удовлетворяет геометрическому ограничению $h \geqslant h_0$ и неравенству (1.5) для любых допустимых расположений и длин трещин и минимизирует функционал $J(h)$ (объем материала оболочки)

$$J = J(h) \to \min_h \tag{1.9}$$

$$J(h) = \int_0^{2\pi} \int_{\varphi_0}^{\varphi_f} h r_1 r_2 \sin\varphi d\varphi d\theta = 2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi_f} h r_1 r_2 \sin\varphi d\varphi$$

Здесь φ_0, φ_f ($\varphi_0 < \varphi_f$) – заданные параметры, определяющие пределы изменения угла φ. Некоторые дополнительные предположения, касающиеся допустимых вариантов расположения трещины и ее размеров необходимы для замкнутой формулировки задачи оптимального проектирования. Будем характеризовать трещину вектором $\omega = \{\varphi_c, l, \alpha\}$, где φ_c – координата середины трещины, l – длина трещины, α – угол, устанавливающий ориентацию трещины относительно меридиана. Вторая координата θ_c

середины трещины является несущественной, т.к. рассматривается осесимметричная задача и применяется гарантированный подход, допускающий все расположения трещины на параллелях ($0 \leqslant \theta_c \leqslant 2\pi$). Если $\alpha = 0$, то трещина ориентирована в меридиальном направлении (аксиальная трещина), а для $\alpha = \pi/2$ трещина ориентирована в направлении параллелей (периферийная трещина). Предполагается, что длины l рассматриваемых трещин не превышают заданного предельного значения l_m, где $l \leqslant l_m \leqslant r_m$.

Принятые предположения и имеющиеся дополнительные данные относительно наиболее опасных частей (подобластей) конструкций (в смысле появления трещин) позволяют считать множество допустимых трещин Λ ($\omega \in \Lambda$) заданным.

Таким образом, задача оптимального проектирования заключается в отыскании распределения толщин $h(\varphi)$, такого что функционал (1.9) достигает минимального значения при выполнении геометрического ограничения

$$h(\varphi) \geqslant h_0 \tag{1.10}$$

и прочностного ограничения

$$\max_{\omega} K_1 \leqslant K_{1\varepsilon} \tag{1.11}$$

где максимум по ω находится на множестве Λ, т.е.

$$\omega \in \Lambda \tag{1.12}$$

Можно показать, что максимальное значение K_1 по l и по α реализуется, когда $l = l_m$ и α принимает одно из двух экстремальных значений: $\alpha = 0$ (аксиальная трещина), $\alpha = \pi/2$, (периферийная трещина). Следовательно неравенство (1.5) может быть записано в виде системы двух неравенств:

$$\max_{\varphi_c}\left(\frac{\sqrt{\pi l_m/2}}{h}N_\varphi\right) \leqslant K_{1\varepsilon}, \quad \max_{\varphi_c}\left(\frac{\sqrt{\pi l_m/2}}{h}N_\theta\right) \leqslant K_{1\varepsilon} \tag{1.13}$$

$$N_\varphi = -\frac{R}{2\pi r_0 \sin\varphi_c}, \quad N_\theta = r_2\left(\frac{R}{2\pi r_0 r_1 \sin\phi_c} - q_n\right) \tag{1.14}$$

Для удовлетворения приведенной системе неравенств (1.13) необходимо и достаточно потребовать, чтобы

$$h(\varphi) \geqslant \frac{\sqrt{\pi l_m/2}}{K_{1\varepsilon}}\max\left\{-\frac{R(\varphi)}{2\pi r_0(\varphi)\sin\varphi},\; r_2(\varphi)\left(\frac{R(\varphi)}{2\pi r_0(\varphi) r_1(\varphi)\sin\varphi} - q_n(\varphi)\right)\right\} \tag{1.15}$$

для любых $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_f]$. Операция max в (1.15) означает выбор максимальной из двух величин, записанных в фигурных скобках. При этом исходная задача (1.9), (1.10) – (1.12) сводится к задаче (1.9), (1.10), (1.15), которая допускает следующее аналитическое решение

$$h = \max\left\{h_0, \frac{\sqrt{\pi l_m/2}}{K_{1\varepsilon}}N_\varphi, \frac{\sqrt{\pi l_m/2}}{K_{1\varepsilon}}N_\theta\right\} = \tag{1.16}$$

$$= \max\left\{h_0, -\frac{R\sqrt{\pi l_m/2}}{2\pi r_0 \sin(\varphi) K_{1\varepsilon}}, \frac{r_2\sqrt{\pi l_m/2}}{K_{1\varepsilon}}\left(\frac{R}{2\pi r_0 r_1 \sin(\varphi)} - q_n\right)\right\}$$

Для любых фиксированных $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_f]$ операция max в (1.16) означает выбор максимальной из трех величин, записанных в фигурных скобках.

Заметим, что в окрестностях, прилегающих к нагруженным краям оболочки, и в областях подкрепления оболочки кольцевыми ребрами жесткости могут возникать изгибные напряжения. Однако, области, в которых действуют значительные изгибные усилия, достаточно малы [1, 2]. Для основной же части оболочки с высокой степенью точности можно пренебрегать краевыми эффектами и использовать мембранную теорию. Поэтому проводимые ниже построения оптимальных проектов в случае незамкнутых подкрепленных оболочек применимы вплоть до узких зон подкрепления оболочки.

Заметим также, что для рассматриваемых в данной работе задач оптимизации применяется гарантированная минимаксная постановка, использованная ранее при оптимальном проектировании деформируемых тел из квазихрупких материалов в [5, 6].

2. В качестве примеров применения, полученных выше общих результатов, приведем решение задач оптимального проектирования тороидальной, конической и сферической оболочек. Детальный анализ напряженного состояния для указанных оболочек содержится, например, в [1, 2].

2.1. Рассмотрим задачу оптимального проектирования оболочки в форме тора, получаемого вращением вокруг вертикальной оси круга радиуса a, расстояние между центром которого и осью вращения равно b. Половина сечения оболочки вертикальной плоскостью показана на фиг. 2. Оболочка находится под действием равномерно распределенного внутреннего давления (q_n = const). Возникающие при этом усилия N_φ, N_θ находятся из рассмотрения равновесия кольцеобразной части оболочки и записываются в виде [1]:

$$N_\varphi = \frac{a}{2}\left(1+\frac{b}{r_0}\right)q_n,\quad N_\theta = \frac{a}{2}q_n,\quad r_0 = b + a\sin\varphi \tag{2.1}$$

Принимая во внимание, что $N_\varphi > N_\theta$ и используя формулу (1.16) будем иметь следующее выражение для оптимального распределения толщин в оболочке:

$$h = \max\left\{h_0,\ \frac{a}{2K_{1\varepsilon}}\left(1+\frac{b}{r_0}\right)q_n\sqrt{\pi l_m/2}\right\} \tag{2.2}$$

Оптимальное распределение толщин в тороидальной оболочке показано на фиг. 2. Как это видно из (2.2) и показано на фиг. 2, толщина оболочки h уменьшается при увеличении расстояния $r_0 = b + a \sin \varphi$ от оси вращения.

2.2. В качестве другого примера рассмотрим задачу оптимального проектирования сферической оболочки (фиг. 3), опертой по параллельному кругу AB и наполненной жидкостью удельного веса γ. Положение параллельного круга AB определяется углом $\varphi = \varphi_0$. Для зависимости внутреннего давления от угла φ и геометрических параметров оболочки имеем следующее выражение:

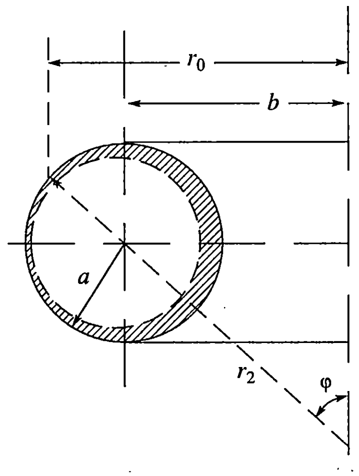
$$-q_n = \gamma a(1-\cos\varphi),\quad r_1 = r_2 = a,\quad r_0 = a\sin\varphi \tag{2.3}$$

Результирующая сила давления R, приложенная к части оболочки, расположенной над определяемым углом φ, параллельным кругом, а также выражения для усилий N_φ, N_θ записываются в виде

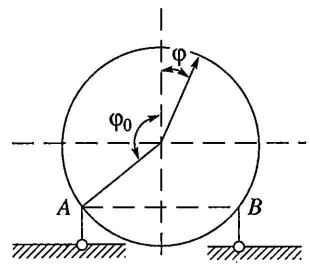
$$R = -2\pi a^2\int_0^\varphi \gamma a(1-\cos\varphi)\sin\varphi\cos\varphi d\varphi = -2\pi a^3\gamma\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cos^2\varphi\left(1-\frac{2}{3}\cos\varphi\right)\right]$$

$$N_\varphi = -\frac{R}{2\pi r_0\sin\varphi} = \frac{\gamma a^2}{6}\left(1-\frac{2\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right) \tag{2.4}$$

$$N_\theta = r_2\left(\frac{R}{2\pi r_0 r_1\sin\varphi} - q_n\right) = \frac{\gamma a^2}{6}\left(5-6\cos\varphi+\frac{2\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

при $\varphi < \varphi_0$, т.е. для верхней части оболочки. Для нижней части оболочки ($\varphi > \varphi_0$) имеем следующее выражение для R, N_φ и N_θ:

$$R = -\tfrac{4}{3}\pi a^3\gamma - 2\pi a^3\gamma\left[\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{2}\cos^2\varphi\left(1 - \tfrac{2}{3}\cos\varphi\right)\right]$$

$$N_\varphi = \frac{\gamma a^2}{6}\left(5 + \frac{2\cos^2\varphi}{1-\cos\varphi}\right) \tag{2.5}$$

$$N_\theta = \frac{\gamma a^2}{6}\left(1 - 6\cos\varphi - \frac{2\cos^2\varphi}{1-\cos\varphi}\right)$$

С использованием выражений (2.4) можно показать, что $N_\theta \geqslant 0$ и

$$N_\theta - N_\varphi = \frac{\gamma a^2}{6(1+\cos\varphi)}\left(2 - \cos\varphi - \cos^2\varphi\right) \geqslant 0 \tag{2.6}$$

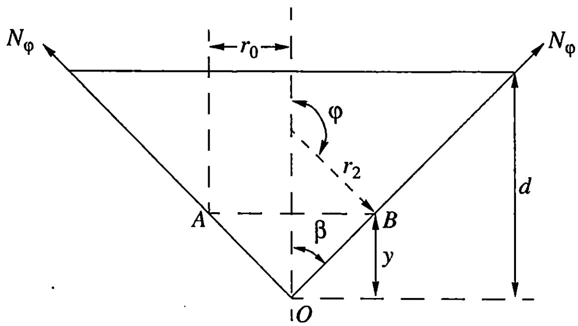
для верхней части оболочки, т.е. при $0 \leqslant \varphi < \varphi_0$. Строгое равенство в (2.6) реализуется, когда $\varphi = 0$. Для нижней части оболочки ($\varphi_0 < \varphi \leqslant \pi$) величины мембранных сил, определяемых выражениями (2.5), удовлетворяют неравенствам $N_\varphi > 0$ и

$$N_\theta - N_\varphi = \frac{\gamma a^2}{3(1-\cos\varphi)}\left(2 + \cos\varphi + \cos^2\varphi\right) > 0 \tag{2.7}$$

Таким образом, для верхней части оболочки третий член в (1.16) больше второго. Соответственно для нижней части оболочки второй член в (1.16) больше третьего. Следовательно оптимальное распределение толщин сферической оболочки запишется в виде

$$h = \max\left\{h_0,\ \frac{\gamma a^2\sqrt{\pi l_m/2}}{6K_{1\varepsilon}}\left[5 - 6\cos\varphi + \frac{2\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}\right]\right\},\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0 \tag{2.8}$$

$$h = \max\left\{h_0,\ \frac{\gamma a^2\sqrt{\pi l_m/2}}{6K_{1\varepsilon}}\left[5 + \frac{2\cos^2\varphi}{1-\cos\varphi}\right]\right\},\quad \varphi_0 < \varphi < \pi$$



Фиг. 4

2.3. Рассмотрим коническую оболочку, заполненную жидкостью с удельным весом γ (фиг. 4). Обозначим через y и d текущее расстояние и высоту свободной поверхности жидкости, отсчитываемые от вершины оболочки O. Подставляя выражения для давления $-q_n$, силу R (вес жидкости, расположенной над параллельным кругом AB, определяемым углом φ) и соответствующие геометрические характеристики конической оболочки

$$-q_n = \gamma(d-y), \quad R = -\pi\gamma y^2\left(d - \frac{2}{3}y\right)\tan^2\beta \tag{2.9}$$

$$\varphi = \pi/2 + \beta, \quad r_1 = \infty, \quad r_0 = y\tan\beta$$

в уравнения (1.6), (1.7), получим

$$N_\theta = -\frac{q_n r_0}{\sin\varphi} = \frac{\gamma(d-y)y\tan\beta}{\cos\beta}$$

$$N_\varphi = -\frac{R}{2\pi r_0\cos\beta} = \frac{\gamma y(d - {}^2\!/_3)\tan\beta}{2\cos\beta} \tag{2.10}$$

Как это следует из (2.10), $N_\theta \geqslant 0, N_\varphi \geqslant 0$ для любых $y \in [0, d]$, а величина

$$N_\theta - N_\varphi = \frac{\gamma y(d - {}^4\!/_3\, y)\tan\beta}{2\cos\beta} \tag{2.11}$$

является положительной для $0 \leqslant y \leqslant {}^3\!/_4 d$ и отрицательной для ${}^3\!/_4 d < y \leqslant d$. Имеем

$$N_\theta \geqslant N_\varphi (0 \leqslant y \leqslant {}^3\!/_4 d), \quad N_\theta \leqslant N_\varphi (3/4 \leqslant y \leqslant d) \tag{2.12}$$

Учитывая (2.12) и используя (1.16), представим оптимальное распределение толщин конической оболочки следующим образом:

$$h = \max\left\{h_0, \ \frac{\gamma\tan\beta\sqrt{\pi l_m/2}}{K_{1\varepsilon}\cos\beta}(d-y)y\right\}, \quad 0 \leqslant y \leqslant {}^3\!/_4 d \tag{2.13}$$

$$h = \max\left\{h_0, \ \frac{\gamma\tan\beta\sqrt{\pi l_m/2}}{2K_{1\varepsilon}\cos\beta}(d - {}^2\!/_3\, y)y\right\}, \quad {}^3\!/_4 d \leqslant y \leqslant d$$

Заметим, что максимальное значение силы N_θ: $(N_\theta)_{max} = (N_\theta)_{y=d/2} = \gamma d^2\tan\beta/(4\cos\beta)$ больше, чем максимальное значение силы N_φ: $(N_\varphi)_{max} = (N_\varphi)_{y={}^3\!/_4 d} = 3\gamma d^2\tan\beta/(16\cos\beta)$.

Следовательно, если значение параметра h_0 достаточно мало, то оптимальное распределение толщин $h(y)$ достигает максимума при $y = d/2$.

3. Выше при постановке задачи оптимального проектирования и ее решении предполагалось, что прикладываемые к оболочке нагрузки не меняются в процессе ее эксплуатации. Рассмотрим теперь другой случай, когда на оболочку действуют циклические нагрузки

$$q_\varphi = q_\varphi^0 p, \quad q_n = q_n^0 p$$
$$0 \leqslant p_{\min} \leqslant p \leqslant p_{\max} \tag{3.1}$$

где q_φ^0, q_n^0 – заданные амплитудные функции независимой координаты, φ, p – параметр нагружения, а $p_{\min}, p_{\max}$ – заданные константы. Предположим, что прикладываемые нагрузки обуславливают квазистатическое изменение напряженного состояния оболочки и монотонное увеличение длины возникшей трещины. Процесс усталостного роста трещины при циклических нагружениях описывается уравнениями следующего вида [7, 8]:

$$dl/dn = C(\Delta K_1)^m$$
$$l_0 \leqslant l \leqslant l_{\text{cr}},\ 0 \leqslant n \leqslant n_{\text{cr}} \tag{3.2}$$

где C и m ($2 < m \leqslant 4$) – заданные материальные константы, n – число циклов, l_{cr} и n_{cr} – критические значения длины трещины и числа циклов, соответствующие моменту разрушения оболочки. Величина коэффициента интенсивности напряжений K_1 для трещин нормального отрыва дается формулой (1.4), а приращение ΔK_1 определяется следующим образом:

$$\Delta K_1 = (K_1)_{\max} - (K_1)_{\min} = \sqrt{\pi l_m / 2}\,\sigma_n^0 (p_{\max} - p_{\min}) \tag{3.3}$$

где $(K_1)_{\max}$, $(K_1)_{\min}$ – максимальное и минимальное значение коэффициента интенсивности напряжений в цикле изменения нагрузки. Здесь и в дальнейшем через σ_n^0 и σ обозначаются следующие величины:

$$\sigma_n^0 = (\sigma_n)_{p=1}, \quad \sigma = p_{\max}\sigma_n^0 \tag{3.4}$$

Дифференциальное уравнение (3.2) определяет с учетом (3.3) зависимость длины трещины l от числа циклов n при квазистатическом процессе роста трещины. Это уравнение справедливо до момента $n = n_{\text{cr}}$, когда $l = l_{\text{cr}}$ и наступает неустойчивое распространение трещины (разрушение оболочки). Для отыскания l_{cr} используется критерий разрушения

$$K_1(l_{\text{cr}}, \sigma) = K_{1\varepsilon} \tag{3.5}$$

где $K_{1\varepsilon} = K_{1c} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. С учетом (1.4), (3.4), (3.5) будем иметь

$$l_{\text{cr}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{K_{1\varepsilon}}{\sigma}\right)^2 = \frac{2}{\pi}\left(\frac{K_{1\varepsilon}}{p_{\max}\sigma_n^0}\right)^2 \tag{3.6}$$

Предполагается, что начальные размеры трещины l_0 не превышают критической величины l_{cr}, т.е. $l_0 \leqslant l_{\text{cr}}$. Число циклов нагружения n_{cr}, необходимых для достижения трещиной критического размера l_{cr}, определяет долговечность (ресурс) конструкции. Ниже рассмотрим следующую задачу оптимального проектирования оболочки с ограничениями по долговечности.

Требуется найти оптимальное распределение толщин оболочки, которое удовлетворяет геометрическому ограничению (1.10), ограничению по долговечности

$$\min_{\omega} n_{\text{cr}} \geqslant n_* \tag{3.7}$$

и минимизирует функционал $J(h)$ из (1.9) (объем материала оболочки). Минимум по ω находится на множестве Λ допустимых значений, определяющих длину и расположение трещины.

Величина n_{cr} в (3.7) зависит от σ. С целью получения явной зависимости n_{cr} от σ проинтегрируем уравнение (3.2) в пределах $0 \leqslant n \leqslant n_{cr}$, $l_0 \leqslant l \leqslant l_{cr}$, и воспользуемся выражением (3.6) для l_{cr}. Будем иметь

$$n_{cr} = \frac{\psi_1(\sigma)}{\psi_2(\sigma)}, \quad \psi_1(\sigma) = 1 - \left(\frac{l_0 \pi}{2}\left(\frac{\sigma}{K_{1\varepsilon}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}m-1} \tag{3.8}$$

$$\psi_2(\sigma) = (\tfrac{1}{2}m - 1) l_0^{\frac{1}{2}m-1} C(\pi/2)^{\frac{1}{2}m} \sigma^m (1 - p_{\min}/p_{\max})^m$$

Критическое число циклов n_{cr}, как это следует из (3.8), является монотонно убывающей функцией величин σ и l_0 и, следовательно, минимальное значение n_{cr} по l_0 и по σ реализуется, когда $l_0 = l_m$ и σ принимает одно из двух экстремальных значений, соответствующих аксиальной трещине ($\alpha = 0$) или периферийной трещине ($\alpha = \pi/2$), т.е. для

$$\sigma = (\sigma)_{\alpha=0} = \sigma_\theta, \quad \sigma = (\sigma)_{\alpha=\pi/2} = \sigma_\varphi \tag{3.9}$$

Обозначим через $\sigma_* > 0$ корень алгебраического уравнения $n_{cr}(\sigma) = n_*$. Ограничение по долговечности (3.7) запишется в виде системы двух неравенств

$$\max_{\varphi_c}\left(\sigma_\varphi = \frac{N_\varphi}{h}\right) \leqslant \sigma_*, \quad \max_{\varphi_c}\left(\sigma_\theta = \frac{N_\theta}{h}\right) \leqslant \sigma_* \tag{3.10}$$

$$N_\varphi = -\frac{R}{2\pi r_0 \sin\varphi_c}, \quad N_\theta = r_2\left(\frac{R}{2\pi r_0 r_1 \sin\varphi_c} - q_n\right)$$

Заметим, что интенсивности внешних нагрузок, а также определяемое ими значение силы R, берутся в (3.10) при $p = p_{\max}$.

Для удовлетворения приведенной системе неравенств (3.10) необходимо и достаточно потребовать, чтобы

$$h(\varphi) \geqslant -\frac{R(\varphi)}{2\pi\sigma_* r_0(\varphi)\sin\varphi} \tag{3.11}$$

$$h(\varphi) \geqslant \frac{r_2(\varphi)}{\sigma_*}\left(\frac{R(\varphi)}{2\pi r_0(\varphi) r_1(\varphi)\sin\varphi} - q_n(\varphi)\right)$$

для $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_f]$. При этом решение задачи оптимального проектирования, которая сведена к минимизации интеграла (1.9) при ограничениях типа неравенств (1.10), (3.11), записывается в следующем виде:

$$h = \max\left\{h_0, \frac{N_\varphi}{\sigma_*}, \frac{N_\theta}{\sigma_*}\right\} = \max\left\{h_0, -\frac{R}{2\pi\sigma_* r_0 \sin\varphi}, \frac{r_2}{\sigma_*}\left(\frac{R}{2\pi r_0 r_1 \sin\varphi} - q_n\right)\right\} \tag{3.12}$$

Для любых фиксированных $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_f]$ операция max в (3.12) означает выбор максимальной из трех величин, записанных в фигурных скобках. В случае $m = 4$ (типичное значение для металлов [7]):

$$n_{cr} = \left[1 - \frac{\pi l_m}{2}\left(\frac{\sigma}{K_{1\varepsilon}}\right)^2\right] \Big/ \left[C\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 l_m \sigma^4 \left(1 - \frac{p_{\min}}{p_{\max}}\right)^4\right] \tag{3.13}$$

а условие $n_{cr}(\sigma) \geqslant n_*$ записывается в виде явного ограничения на σ:

$$\sigma^2 \leqslant \sigma_*^2 \equiv b_1(-1+\sqrt{1+b_2})$$
$$b_1 = 1/[C\pi(1-p_{\min}/p_{\max})^4 K_{1\varepsilon}^2 n^*] \qquad (3.14)$$
$$b_2 = 4n_* C K_{1\varepsilon}^4 (1-p_{\min}/p_{\max})^4 / l_m$$

Заметим, что при достаточно больших значениях n_{cr}, т.е. в случае многоцикловой усталости, величина σ_* дается следующим асимптотическим представлением:

$$\sigma_* = [\sqrt{\pi/2}(Cl_m n_*)^{1/4}(1-p_{\min}/p_{\max})]^{-1} \qquad (3.15)$$

В качестве примера приведем решение задачи оптимального проектирования оболочки в форме тора, подверженной действию равномерно распределенного внутреннего давления $q = pq^0(q^0 = \text{const})$ циклически меняющегося по величине пропорционально параметру p. Выражения для усилий N_φ и N_θ даются формулами (2.1).

В случае $m = 4$ и достаточно больших значений n_{cr}, когда можно пользоваться представлением (3.15), выражение для оптимального распределения толщин дается формулой

$$h = \max\left\{h_0, \frac{aq_0}{2}\left(1+\frac{b}{r_0}\right)\sqrt{\pi/2}(Cl_m n_*)^{1/4}\left(1-\frac{p_{\min}}{p_{\max}}\right)\right\} \qquad (3.16)$$

описывающей явную зависимость решения от определяющих параметров.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 00-01-96025) и региональной программы РФФИ "р 2000-Юг".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.
2. *Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И.* Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.
3. *Kanninen M.F., Popelar C.H.* Advanced Fracture Mechanics. New York: Oxford Univer. Press, 1985. 563 p.
4. *Folias E.S.* Failure of pressurized vessels // Fracture: a Topical Encyclopedia of Current Knowledge. Malabar: Krieger Publ. Co., 1998. P. 275–288.
5. *Баничук Н.В.* Задачи оптимального проектирования на основе механики квазихрупкого разрушения. Докл. РАН. 1998. Т. 358. № 1. С. 40–43.
6. *Banichuk N.V.* Optimal design of quasi–brittle elastic bodies with cracks // Mech. Struct. and Mach. 1998. V. 26. № 4. P. 365–376.
7. *Хеллан К.* Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1988. 364 с.
8. *Smith R.N.* Basic Fracture Mechanics: Including an Introduction to Fatigue. Oxford: Butterworth–Heinemann Ltd, 1991. 160 p.

Москва

Поступила в редакцию
7.02.2002