

УДК 531.383

© 2002 г. С.А. ЧЕРНИКОВ

О ВЛИЯНИИ ШИРИНЫ ПОЛОСЫ ПРОПУСКАНИЯ ОДНООСНЫХ КАНАЛОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХОСНОГО СИЛОВОГО ГИРОСТАБИЛИЗАТОРА

Рассматривается устойчивость трехосного силового гиросtabilизатора (ТГС), взаимосвязь каналов которого обусловлена вязким трением в осях прецессии гироскопов, а также зависимостью управляющих сигналов гироскопов от углового движения стабилизированной платформы относительно осей, параллельных осям прецессии гироскопов.

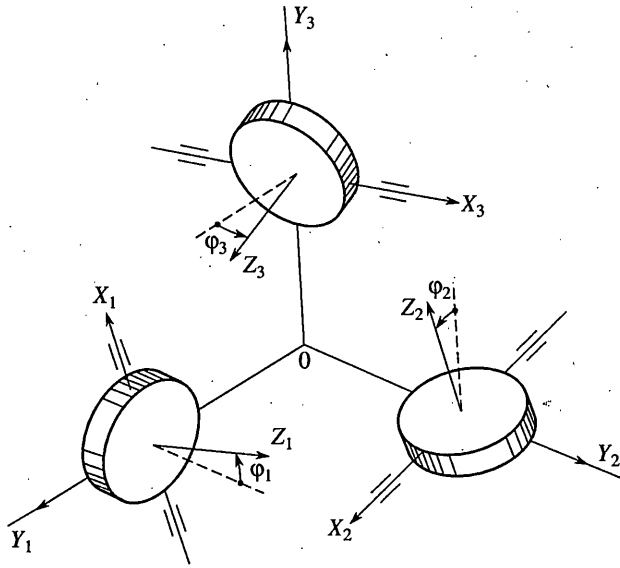
Задача о влиянии на устойчивость ТГС взаимосвязи одноосных каналов стабилизации, обусловленной указанными причинами, рассматривалась в [1–5]. Обнаруженный при этом дестабилизирующий эффект взаимосвязи для ТГС с узкой полосой пропускания одноосных каналов оказался незначительным. Однако для ТГС с широкой полосой пропускания одноосных каналов в случае ортогонального расположения гироскопов, было показано [5], что дестабилизирующий эффект может быть больше запасов устойчивости, обеспечивающих требуемое качество стабилизации одноосных каналов.

В данной работе показано, что и для неортогонального расположения гироскопов устойчивость трехосного гиросtabilизатора по сравнению с одноосным тем меньше, чем больше полоса пропускания одноосных каналов. Для частного случая расположения гироскопов на платформе получено простое аналитическое выражение коэффициента уменьшения устойчивости трехосного гиросtabilизатора по сравнению с одноосным.

1. Уравнения собственного движения трехосного гиросtabilизатора (ТГС) для общего случая расположения гироскопов на стабилизированной площадке (фигура) в предположении абсолютной жесткости элементов конструкции, неподвижности основания и малости углов стабилизации и прецессии основываясь на [1–4], можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_i \ddot{\alpha}_i + f_i \dot{\alpha}_i - H_i \dot{\beta}_i - \mu_j \dot{\epsilon}_j \cos \varphi_j + \mu_k \dot{\epsilon}_k \sin \varphi_k - K_i(D) \epsilon_i &= 0 \\ B_i \ddot{\beta}_i + \mu_i \dot{\epsilon}_i + H_i \dot{\alpha}_i &= 0 \\ \epsilon_i &= \beta_i + \alpha_j \sin \varphi_i - \alpha_k \cos \varphi_i \\ (i = 1, 2, 3; j = 2, 3, 1; k = 3, 1, 2) D &= d/dt \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь приняты следующие обозначения: α_i, β_i – абсолютные углы стабилизации и прецессии i -го канала стабилизации; A_i, f_i – приведенные моменты инерции платформы и коэффициенты вязкого трения относительно i -х осей стабилизации; B_i, μ_i – приведенные моменты инерции гироскопов и коэффициенты вязкого трения относительно i -х осей прецессии; H_i – кинетические моменты гироскопов; $K_i(D)$ – передаточные функции цепей стабилизации одноосных каналов; ϵ_i – относительные



углы прецессии i -х гироскопов; φ_i — углы разворота гироскопов относительно i -х осей стабилизации.

Исключая из уравнений (1.1) координаты α_i и полагая, что одноосные гиростабилизаторы (ОГС) идентичны, то есть $A_i = A$, $B_i = B$, $H_i = H$, $f_i = f$, $\mu_i = \mu$, $K_i(D) = K(D)$, $\varphi_i = \varphi$, характеристический определитель системы (1.1) запишем в следующем виде:

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \Delta & a & b \\ b & \Delta & a \\ a & b & \Delta \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

$$\Delta = W_0^{-1}(p) + K(p) + \mu \frac{B}{H} p^2$$

$$a = \mu p \left(\sin \varphi + \cos \varphi - \frac{B}{H} p \cos \varphi \sin \varphi \right) - K(p) \frac{B}{H} p \sin \varphi$$

$$b = -\mu p \left(\sin \varphi + \cos \varphi + \frac{B}{H} p \cos \varphi \sin \varphi \right) + K(p) \frac{B}{H} p \cos \varphi$$

при этом передаточная функция механической части как объекта управления одноосного гиростабилизатора будет

$$W_0(p) = \frac{k_0}{p(\tau_0^2 p^2 + 2\xi_0 \tau_0 p + 1)} \quad (1.3)$$

$$k_0 = \frac{H}{H^2 + \mu f}, \quad \tau_0 = \sqrt{\frac{AB}{H^2 + \mu f}}, \quad \xi_0 = \frac{1}{2\sqrt{H^2 + \mu f}} \left(f \sqrt{\frac{B}{A}} + \mu \sqrt{\frac{A}{B}} \right) \quad (1.4)$$

Приравняв характеристический определитель (1.2) нулю, получим

$$\Delta^3 - 3\Delta ab + a^3 + b^3 = 0 \quad (1.5)$$

Раскладывая кубический по Δ полином (1.5) на множители [2–5], подставляя в них Δ , a , b из (1.2) и приравнявая каждый множитель нулю, получим три уравнения экви-

валентных (1.5):

$$1 + W_{01}(p)K(p)\left(1 + \sigma \frac{B}{H} p\right) = 0$$

$$1 + W_{02}(p)K(p)\left(1 - \frac{\sigma B}{2H} p + j\gamma \frac{\sqrt{3} B}{2H} p\right) - j\gamma\sqrt{3}\mu p W_{02}(p) = 0 \quad (1.6)$$

$$1 + W_{03}(p)K(p)\left(1 - \frac{\sigma B}{2H} p - j\gamma \frac{\sqrt{3} B}{2H} p\right) + j\gamma\sqrt{3}\mu p W_{03}(p) = 0$$

$$\sigma = \cos \varphi - \sin \varphi, \quad \gamma = \cos \varphi + \sin \varphi \quad (1.7)$$

$$W_{0q}(p) = \frac{k_0}{p(\tau_0^2 p^2 + 2\xi_q \tau_0 p + 1)} \quad (q = 1, 2, 3) \quad (1.8)$$

При этом $W_{0q}(p)$ отличаются от $W_0(p)$ только коэффициентами затухания

$$\xi_q = \xi_0 \eta_q, \quad \eta_q = 1 + \frac{\delta_q \mu}{f + \mu A / B} \quad (q = 1, 2, 3) \quad (1.9)$$

$$\delta_1 = 1 - \sin 2\varphi, \quad \delta_2 = \delta_3 = 1 + \frac{1}{2} \sin 2\varphi$$

Однако это отличие, как следует из (1.9), для реального соотношения параметров ($A \gg B$) несущественно ($\eta_q \approx 1$), что дает основание полагать, что

$$W_{0q}(p) = W_0(p) \quad (1.10)$$

Таким образом вопрос об устойчивости ТГС сводится к анализу трех систем из (1.6).

2. Для анализа устойчивости систем (1.6) воспользуемся частотным критерием Найквиста. С этой целью введем в рассмотрение функции Найквиста $N_q(j\omega)$ и запишем уравнения (1.6) при подстановке в них $p = j\omega$ в виде

$$1 + N_q(j\omega) = 0 \quad (q = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

$$N_q(j\omega) = N_{0q}(j\omega)D_q(j\omega)Q_q(j\omega) \quad (q = 1, 2, 3) \quad (2.2)$$

$$N_{0q}(j\omega) = W_{0q}(j\omega)K(j\omega)$$

$$D_1(p) = 1 + \sigma \frac{B}{H} p, \quad p = j\omega$$

$$D_2(p) = 1 - \frac{\sigma B}{2H} p - j\gamma \frac{\sqrt{3} B}{2H} p \quad (2.3)$$

$$D_3(p) = 1 - \frac{\sigma B}{2H} p + j\gamma \frac{\sqrt{3} B}{2H} p$$

$$Q_1(p) = 1, \quad Q_2(p) = (1 + j\gamma\sqrt{3}\mu p W_{02}(p))^{-1} \quad (2.4)$$

$$Q_3(p) = (1 - j\gamma\sqrt{3}\mu p W_{03}(p))^{-1}$$

При этом $D_q(j\omega)$ – функции, определяющие взаимосвязь каналов через датчики углов прецессии; $Q_q(j\omega)$ – функции, определяющие взаимосвязь каналов, обусловленную вязким трением в осях прецессии гироскопов.

Учитывая (1.10), в дальнейшем будем полагать $N_{0q}(j\omega) = N_0(j\omega)$ ($q = 1, 2, 3$), где $N_0(j\omega) = W_0(j\omega)K(j\omega)$ – функции Найквиста ОГС.

Определим полосу пропускания ОГС как такой диапазон частот, в котором $|(1 + N_0(j\omega))^{-1}| < 1$, тогда окружность единичного радиуса на комплексной плоскости $N_0(j\omega)$ с центром в точке $(-1, j0)$ определит границу полосы пропускания ω_* :

$$|1 + N_0(j\omega_*)| = 1 \quad (2.5)$$

Условимся называть одноосные системы стабилизации "узкополосными", если полоса их пропускания $\omega_* < \omega_0$, и "широкополосными", если $\omega_* > \omega_0$ ($\omega_0 = 1/\tau_0$).

Вначале рассмотрим влияние на устойчивость ТГС динамических коэффициентов взаимосвязи $D_q(j\omega)$. Введем относительную частоту

$$v = \frac{B}{H} \omega \quad \text{или} \quad v = \frac{\omega}{\omega_H} \sqrt{\frac{B}{A}}, \quad \omega_H = \frac{H}{\sqrt{AB}} \quad (2.6)$$

Тогда (2.3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} D_1(jv) &= 1 + j\sigma v, & D_2(jv) &= 1 + \gamma \frac{\sqrt{3}}{2} v - j \frac{\sigma}{2} v \\ D_3(jv) &= 1 - \gamma \frac{\sqrt{3}}{2} v - j \frac{\sigma}{2} v \end{aligned} \quad (2.7)$$

Годографы $D_q(jv)$ на комплексной плоскости представляют собой векторы с началом в точке $(+1, j0)$, направления которых определяются углами

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \sigma, \quad \lambda_{2,3} = \pm \operatorname{arctg} \frac{\sigma \sqrt{3}}{2}$$

При изменении φ от 0 до 2π векторы $D_{2,3}(jv)$ также совершают полный оборот вокруг их начала, вращаясь в противоположные стороны, сохраняя при этом относительную четную симметрию.

Как видно из (2.7), в диапазоне частот $v < 0.1$ динамические коэффициенты $D_q(jv)$ мало отличаются от единицы и, следовательно, их влияние на устойчивость систем (2.1), а значит и на устойчивость ТГС в этом диапазоне частот незначительно. С увеличением частоты v отличие от единицы динамических коэффициентов взаимосвязи $D_q(jv)$ становится все более существенным и следовательно, более существенно отличаются амплитудно-фазовые характеристики $N_q(jv)$ от $N_0(jv)$. При $v \geq 1$ фазовые и амплитудные искажения характеристик Найквиста $N_q(jv)$, вносимые динамическими коэффициентами $D_q(jv)$, могут оказаться больше запасов устойчивости ОГС. Однако это может произойти только в случае широкополосных ОГС, поскольку критический диапазон частот, в котором деформирующие характеристики превысят запасы устойчивости одноосных систем, соответствует полосе пропускания $\omega_* > \omega_0$. Действительно, критическая точка, в которой находятся полюса замкнутой одноосной гиросистемы, является центром круга, определяющего границу полосы пропускания, а значит критическая частота, соответствующая этой точке и определяемая условием

$$1 + N_0(j\omega_{cr}) = 0 \quad (2.8)$$

находится вне полосы пропускания, т.е. $\omega_{cr} > \omega_*$.

Далее рассмотрим динамические коэффициенты $Q_q(j\omega)$, определяющие взаимосвязь каналов, обусловленную вязким трением в осях прецессии гироскопов. Пусть

$$Q_q(j\omega) = C_q(\omega) e^{j\theta_q(\omega)} \quad (q = 1, 2, 3) \quad (2.9)$$

тогда начальные и конечные значения амплитуды $C_q(\omega)$ и фазы $\theta_q(\omega)$ векторов $Q_{2,3}(j\omega)$ по (1.8) и (2.4) соответственно равны

$$C_{2,3}(0) = (1 + 3\gamma^2 \mu^2 k_0^2)^{-1/2}, \quad C_{2,3}(\infty) = 1 \quad (2.10)$$

$$\theta_{2,3}(0) = \mp \arctg \gamma \mu k_0 \sqrt{3}, \quad \theta_{2,3}(\infty) = 0$$

и изменяются монотонно с ростом ω .

Поэтому динамические коэффициенты взаимосвязи каналов из-за вязкого трения деформируют годографы Найквиста $N_q(j\omega)$ только в низкочастотном диапазоне ($\omega < \omega_0$), поскольку при $\omega > \omega_0$ $Q_{2,3} \approx 1$.

Кроме того, для систем с интегральной цепью стабилизации, включающей интегрирующее звено, с целью повышения статической точности стабилизации, а также улучшения динамических характеристик одноосных каналов в низкочастотном диапазоне, отрицательная фаза $\theta_2(\omega)$ переводит эквивалентную систему в класс условно устойчивых и следовательно критичных к сопутствующим нелинейностям усилительно-преобразовательного тракта [6].

Поскольку взаимосвязь каналов через датчики углов прецессии с одной стороны и через вязкое трение с другой проявляется в разных частотных диапазонах, то влияние этих взаимосвязей на устойчивость ТГС может рассматриваться независимо.

3. Исследование устойчивости ТГС с широкой полосой пропускания одноосных каналов удобно осуществить, используя инверсные динамические характеристики $D_q^{-1}(j\nu)$.

Полагая $\mu = 0$ (при этом $Q_q(j\omega) = 1$ и $W_{0q}(j\omega) = W_0(j\omega)$), условия амплитудно-фазового баланса для систем (2.1) запишем в виде

$$N_0(j\nu) = -1/D_q(j\nu) \quad (q = 1, 2, 3) \quad (3.1)$$

Тогда условия устойчивости можно сформулировать следующим образом. Система из (2.1) устойчива, если годограф Найквиста $N_0(j\nu)$ устойчивого одноосного гиросtabilизатора при изменении частоты ν в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$ не охватывает и не пересекает годограф $-1/D_q(j\nu)$, построенный также при изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$. При этом функцию $-1/D_q(j\nu)$ можно рассматривать как траекторию критической точки, в которой находятся полюса замкнутой q -й системы из (2.1) и положение которой зависит от частоты. Тогда траектории критической точки $-1/D_1(j\nu)$ для всех значений углов φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) при изменении частоты ν в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$ представляют собой окружность радиуса $R_1 = 1/2$ с центром в точке $(-1/2, j0)$. При этом верхняя дуга окружности, где скольжение изображающей точки происходит по часовой стрелке (в отличие от нижней, где скольжение происходит против часовой стрелки), соответствует положительным значениям $\forall \sigma$, нижняя — отрицательным.

Траектории критических точек $-1/D_2(j\nu)$ и $-1/D_3(j\nu)$ представляют окружности, радиусы и центры которых зависят от угла φ . При этом $R_2 = R_3 = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 3(\gamma/\sigma)^2}$, а центры окружностей определяются координатами $(-1/2; +j\sqrt{3}/2 (\gamma/\sigma))$ и $(-1/2; -j\sqrt{3}/2 (\gamma/\sigma))$ соответственно. Положительным значениям $\forall \sigma$ соответствуют нижние дуги окружностей, отрицательным — верхние. В силу симметрии годографов $-1/D_q(j\nu)$ и $N_\Delta(j\nu)$ относительно вещественной оси для положительных и отрицательных частот достаточно рассмотреть их только при $\nu > 0$. Поскольку $N_0(j\nu)$ устойчивой одноосной гиросистемы при изменении частоты от 0 до ∞ пересекает отрицательную вещественную полуось слева от точки $(-1; j0)$, то он обязательно пересечет по крайней мере нижние дуги окружностей $-1/D_q(j\nu)$. Если при этом в точке пересечения, опреде-

ляемой равенством

$$N_0(j\nu_{0q}) = -1/D_q(j\nu_{Dq}) \quad (q=1,2,3) \quad (3.2)$$

частота $\nu_{0q} < \nu_{Dq}$, то q -я система из (2.1) устойчива, если $\nu_{0q} > \nu_{Dq}$, то система неустойчива. Иными словами, q -я система будет устойчивой, если точка, "прочерчивающая" годограф $N_0(j\nu)$ при возрастании частоты ν , достигает точки пересечения кривых раньше, чем аналогичная точка, прочерчивающая годограф $-1/D_q(j\nu)$. Неустойчивость хотя бы одной q -й системы является достаточным условием неустойчивости ТГС.

При $\sigma = 0$ ($\varphi = \pi/4, 5\pi/4$) условия устойчивости ТГС можно получить в простом аналитическом виде. Представим

$$K(j\omega) = K_c W_c(j\omega) \quad (3.3)$$

где $K_c = K(0)$ – статический коэффициент усиления цепи стабилизации. Тогда граничные условия устойчивости систем из (1.6) можно записать в виде

$$1 + K_{cq} W_c(j\omega_{cr}) W_0(j\omega_{cr}) Q_q(j\omega_{cr}) D_q(j\omega_{cr}) = 0 \quad q=1,2,3 \quad (3.4)$$

где ω_{cr} – частота удовлетворяющая условию (3.4), K_{cq} – значение статического коэффициента усиления ОГС, соответствующее границе устойчивости q -й системы из (1.6).

Введем обозначение K_c^0 – значение статического коэффициента усиления K_c , соответствующее границе устойчивости одноосного гиросtabilизатора:

$$K_c^0 = -\frac{1}{W_c(j\omega_{cr}) W_0(j\omega_{cr})} \quad (3.5)$$

Так как при $\sigma = 0$ $\arg D_q(j\omega) = 0$ ($q = 1, 2, 3$), то критическая частота ω_{cr} для всех трех систем из (3.4) оказывается одной и той же. Тогда, разрешая уравнения (3.4) относительно K_{cq} , получим

$$K_{cq} = K_c^0 \chi_q(\omega_{cr}) \quad (q=1,2,3) \quad (3.6)$$

где K_c^0 – определяется выражением (3.5), а коэффициенты уменьшения устойчивости q -х систем соответственно равны:

$$\chi_1(\omega_{cr}) = 1, \quad \chi_{2,3}(\omega_{cr}) = \frac{1}{1 \pm \sqrt{3/2} (B/H) \omega_{cr}} \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует, что устойчивость ТГС тем меньше по сравнению с одноосным гиросtabilизатором, чем больше критическая частота ω_{cr} , а значит и чем больше полоса пропускания ω_* одноосных каналов. Для систем с полосой пропускания $\omega_* > \omega_n \sqrt{A/B}$ или, что то же самое, с относительной полосой пропускания $\nu_* = \omega_* B/H > 1$ устойчивость одноканальных систем не гарантирует устойчивость ТГС. И наоборот, для систем с полосой пропускания $\nu_* \ll 1$ взаимосвязь каналов через датчики углов прецессии практически не влияет на устойчивость ТГС.

4. 1. Взаимосвязь каналов стабилизации ТГС из-за вязкого трения в осях прецессии гироскопов проявляется в низкочастотном диапазоне ($\omega < \omega_0$), в то время как взаимосвязь через датчики углов прецессии проявляется только в высокочастотном диапазоне ($\omega > \omega_0$). Это дает основание рассматривать влияние этих факторов на устойчивость ТГС независимо друг от друга.

2. Устойчивость ТГС по сравнению с одноосным тем меньше, чем шире полоса пропускания одноосных каналов. При полосе пропускания $\nu_* \geq 1$ рекомендуемые запасы устойчивости одноосных гиросtabilизаторов не обеспечивают устойчивости ТГС.

Автор благодарит И.В. Новожилова за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* О меньшей устойчивости двухосного гироскопического стабилизатора по сравнению с одноосным // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163. № 6. С. 1334–1337.
2. *Новожилов И.В.* Об устойчивости трехосного гиросtabilизатора // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 5. С. 137–140.
3. *Слезкин Л.Н., Ван-Дань-чжи.* О влиянии связей между каналами гироскопической платформы // Изв. вузов. Приборостроение. 1965. № 4. С. 85–90.
4. *Новожилов И.В.* Об устойчивости трехосного силового гиросtabilизатора // Изв. АН СССР. ММТ. 1968. № 4. С. 59–64.
5. *Черников С.А.* Устойчивость широкополосного трехосного гиросtabilизатора. Круговой критерий устойчивости // Вестн. МГТУ. Сер. Приборостроение. 2000. № 1. С. 120–128.
6. *Черников С.А.* Динамика нелинейных гироскопических систем. М.: Машиностроение, 1981. 224 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.06.2000