

УДК 539.3.01

© 2002 г. М.А. КУЛЕШ, В.П. МАТВЕЕНКО, И.Н. ШАРДАКОВ

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В рамках несимметричной теории упругости рассмотрены задачи: о сдвиге упругого бесконечного плоского слоя (пластины); кручении кольца, жёстко закрепленного по внешнему контуру за счет поворота внутреннего; деформировании плоской шайбы при жёстком смещении внутреннего контура относительно внешнего. Предполагается, что деформация материала описывается не только вектором перемещения, но и вектором поворота. Получены общие аналитические решения этих задач в виде бесконечных рядов. Установлена зависимость решений, записанных в безразмерной форме, от характерного размера. Приведен сравнительный анализ полученных решений с соответствующими решениями симметричной теории упругости.

1. Введение. Задачи о деформировании материала, при котором играют значительную роль вектора перемещения и вращения частиц среды, а тензора деформаций и напряжений являются несимметричными, давно привлекают внимание исследователей. Деформация такой среды, впервые введенной братьями Коссера в 1910 г., описывается не только вектором перемещения u , но также вектором поворота ω , являющимся функцией координат частицы и времени. Среду, моделируемую таким образом, часто называют средой Коссера, а за теорией в русскоязычной литературе закрепились названия моментной, или несимметричной теории упругости.

В 60–70-х годах эта теория была развита независимо несколькими исследователями [1–5]. В это же время появились первые аналитические решения плоских задач в рамках данной теории.

Однако большинство точных решений [6, 7] получены с использованием упрощения, часто называемого "стесненным вращением" или псевдоупругой средой Коссера, при котором постулируется зависимость вектора вращения от вектора перемещения

$$\omega = 1/2 \operatorname{rot} u \quad (1.1)$$

Этот вариант моментной теории упругости понижает ее полноту, так как [8] число физических констант для изотропного упругого тела сокращается с шести до четырех. Кроме того, получаемая структура уравнений такова [1], что если, в частности, на поверхности упругого тела заданы перемещения, то не удастся независимо выразить нормальную составляющую вектора поворота.

Ряд авторов [2, 9–11] посвятили свои работы отысканию точных решений задач в полной постановке моментной теории, несмотря на значительные трудности при разрешении получающихся дифференциальных уравнений равновесия или движения. Например, найдена концентрация напряжений вблизи кругового отверстия [10], задача о равновесии полупространства [2].

В данной работе приведены решения трех задач в рамках общей моментной теории упругости и анализ полученных решений с точки зрения возможности проведения экс-

перимента, цель которого – идентификация физических параметров упругого тела. Этими тремя задачами являются: задача о сдвиге плоского бесконечного слоя (пластины) под действием силы тяжести, закрепленной по обоим краям; задача о кручении жестко закрепленного по внешнему контуру кольца за счет поворота внутреннего контура на фиксированный угол; задача о деформировании жестко закрепленного по внешнему контуру кольца за счет сдвига внутреннего контура на фиксированную величину.

Все полученные аналитические решения с соответствующими краевыми условиями и в соответствующей системе координат являются точными решениями уравнений равновесия моментной теории упругости.

2. Основные соотношения моментной теории упругости. Выделим произвольную область сплошного деформируемого тела, ограниченную гладкой поверхностью. Для элементарного бесконечно малого элемента среды в виде тетраэдра с тремя гранями, ортогональными координатным осям, помимо тензора напряжений $\tilde{\sigma}$ вводится [1] тензор моментных напряжений $\tilde{\mu}$, который является дополнительной независимой характеристикой напряженного состояния.

Обозначим через \mathbf{X} вектор массовых сил, \mathbf{Y} – вектор массовых моментов. Тогда уравнения движения такой несимметричной среды запишем в виде [1]:

$$\nabla \cdot \tilde{\sigma} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.1)$$

$$\tilde{\sigma}^T : \tilde{\mathbf{E}} + \nabla \cdot \tilde{\mu} + \mathbf{Y} = j \ddot{\omega}$$

где $\nabla(\cdot)$ – набла-оператор [12], ρ – плотность, j – инерционная характеристика размерности плотности момента инерции, $\tilde{\mathbf{E}}$ – тензор Леви–Чивита третьего ранга [12].

Обозначим через $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\chi}$ тензора деформаций и изгиба – кручения

$$\tilde{\gamma} = \nabla \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{E}} \cdot \omega, \quad \tilde{\chi} = \nabla \omega \quad (2.2)$$

В отличие от классической теории, тензора $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\chi}$ являются несимметричными. Определяющие соотношения возьмем в виде [1]:

$$\tilde{\sigma} = (\mu + \alpha) \tilde{\gamma} + (\mu - \alpha) \tilde{\gamma}^T + \lambda_1 (\tilde{\gamma}) \tilde{\mathbf{e}} \quad (2.3)$$

$$\tilde{\mu} = (\gamma + \varepsilon) \tilde{\chi} + (\gamma - \varepsilon) \tilde{\chi}^T + \beta I_1 (\tilde{\chi}) \tilde{\mathbf{e}}$$

где $\tilde{\mathbf{e}}$ – единичный тензор.

С учетом соотношений (2.1)–(2.3) уравнения движения для вектора перемещения \mathbf{u} и вектора поворота ω примут вид:

$$(2\mu + \lambda) \text{grad div } \mathbf{u} - (\mu + \alpha) \text{rot rot } \mathbf{u} + 2\alpha \text{rot } \omega + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.4)$$

$$(\beta + 2\gamma) \text{grad div } \omega - (\gamma + \varepsilon) \text{rot rot } \omega + 2\alpha \text{rot } \mathbf{u} - 4\alpha \omega + \mathbf{Y} = j \ddot{\omega}$$

Здесь \mathbf{u} – вектор перемещения; ω – вектор вращения; \mathbf{X} – вектор массовых сил; \mathbf{Y} – вектор массовых моментов; ρ – плотность; j – инерционная характеристика размерности плотности момента инерции; μ, λ – постоянные Ламе; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – физические постоянные материала в рамках моментной теории упругости.

В [9, 13], используя условия положительности внутренней энергии, установлены следующие неравенства:

$$3\lambda + 2\mu + \alpha \geq 0, \quad 2\mu + \alpha \geq 0, \quad \alpha \geq 0 \quad (2.5)$$

$$3\beta + 2\gamma \geq 0, \quad |\gamma - \varepsilon| \leq \gamma + \varepsilon, \quad \gamma + \varepsilon \geq 0$$

В данной работе получены точные аналитические решения ряда плоских задач. Приведение этих решений к безразмерному виду позволило ввести три безразмерных величины, одна из которых зависит от характерного размера l :

$$A = l \sqrt{\frac{\alpha\mu}{(\alpha+\mu)(\gamma+\varepsilon)}}, \quad B = \frac{\alpha+\mu}{\alpha}, \quad C = \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon} \quad (2.6)$$

Используя (2.5), несложно выписать неравенства, ограничивающие значения данных величин $A > 0$, $B \geq 1$, $|C| \leq 1$.

3. Задача о сдвиговом деформировании слоя (пластины). Рассмотрим плоский бесконечный слой (пластину) шириной l , находящийся в равновесии в поле массовых сил интенсивности f , действующих вдоль оси Oy (фиг. 1). Левая ($x = 0$) и правая ($x = l$) грани закреплены

$$\mathbf{u}|_{x=0} = \boldsymbol{\omega}|_{x=0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}|_{x=l} = \boldsymbol{\omega}|_{x=l} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

Решение задачи будем искать в виде

$$\mathbf{u} = \{0, V(x), 0\}, \quad \boldsymbol{\omega} = \{0, 0, \omega(x)\} \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (2.4), получим уравнения равновесия в виде системы двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $V(x)$ и $\omega(x)$:

$$\frac{d^2}{dx^2} V(x) - \frac{2\alpha}{\alpha+\mu} \frac{d}{dx} \omega(x) = \frac{f}{\alpha+\mu} \quad (3.3)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \omega(x) - \frac{4\alpha}{\gamma+\varepsilon} \omega(x) + \frac{2\alpha}{\gamma+\varepsilon} \frac{d}{dx} V(x) = 0$$

Общее решение этой системы уравнений имеет вид:

$$V(x) = C_1 V_1(x) + C_2 V_2(x) + C_3 V_3(x) + C_4 V_4(x) + V_0(x)$$

$$\omega(x) = C_1 \omega_1(x) + C_2 \omega_2(x) + C_3 \omega_3(x) + C_4 \omega_4(x) + \omega_0(x)$$

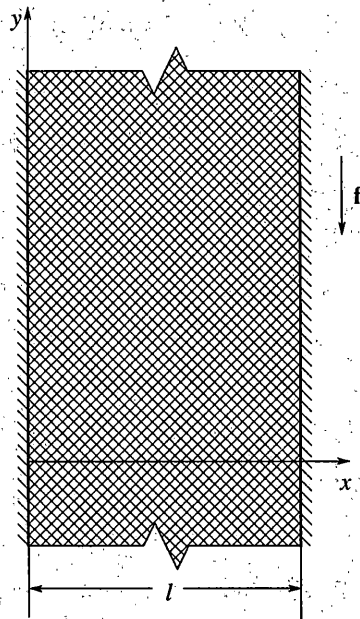
где $V_i(x)$, $\omega_i(x)$ ($i = 1, \dots, 4$) – частные решения соответствующей однородной системы (3.3); $V_0(x)$, $\omega_0(x)$ – частное решение неоднородной; C_i – произвольные постоянные, определяемые из краевых условий.

В качестве $V_1(x)$, $V_2(x)$ были использованы частные решения, соответствующие классической теории упругости, а $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ получены на основе соотношения (1.1). Правомерность такого представления доказана в [1]. Остальные частные решения получены путем непосредственного решения системы (3.3).

Используя ранее введенные (2.6) безразмерные величины A , B , C , и принимая в качестве характерного размера величину ширины упругого слоя l , получим в явной форме безразмерный вид величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние:

$$u_y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2Ax} + C_4 e^{-2Ax} + \frac{1}{2} F x^2$$

$$\omega_z(x) = \frac{1}{2} C_2 + C_3 A B e^{2Ax} - C_4 A B e^{-2Ax} + \frac{1}{2} F x$$



Фиг. 1

$$\gamma_{xy}(x) = \frac{1}{2}C_2 - C_3A(B-2)e^{2Ax} + C_4A(B-2)e^{-2Ax} + \frac{1}{2}Fx$$

$$\gamma_{yx} = \frac{1}{2}C_2 + C_3ABe^{2Ax} - C_4ABe^{-2Ax} + \frac{1}{2}Fx \quad (3.4)$$

$$\chi_{xz}(x) = 2C_3A^2Be^{2Ax} + 2C_4A^2Be^{-2Ax} + \frac{1}{2}F$$

$$\sigma_{xy}(x) = Fx + C_2$$

$$\sigma_{yx}(x) = Fx + C_2 + 4C_3Ae^{2Ax} - 4C_4Ae^{-2Ax}$$

$$\mu_{xz}(x) = 2C_3e^{2Ax} + 2C_4e^{-2Ax} + F/(2A^2B)$$

$$\mu_{zx}(x) = C\mu_{xz}(x), \quad F = fl/\mu$$

где $x, u_y, \omega_z, \gamma_{ij}, \chi_{ij}, \sigma_{ij}, \mu_{ij}$ — безразмерные величины, которые связаны с размерными $\hat{x}, \hat{u}_y, \hat{\omega}_z, \hat{\gamma}_{ij}, \hat{\chi}_{ij}, \hat{\sigma}_{ij}, \hat{\mu}_{ij}$ соотношениями:

$$\hat{x} = lx, \quad \hat{u}_i = lu_i, \quad \hat{\omega}_i = \omega_i \quad (3.5)$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \mu\sigma_{ij}, \quad \hat{\mu}_{ij} = l\mu\mu_{ij}, \quad \hat{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij}, \quad \hat{\chi}_{ij} = \chi_{ij}/l$$

Граничные условия (3.1) для решения (3.4) примут вид $u_y(0) = 0, \omega_z(0) = 0, u_y(1) = 0, \omega_z(1) = 0$, из которых определяются константы C_1, C_2, C_3, C_4 .

Вектор перемещения, соответствующий решению данной задачи в рамках симметричной теории упругости, а также вектор вращения, найденный из соотношения (1.1), будут равны

$$u_y^*(x) = \frac{1}{2}Fx(x-1), \quad \omega_z^*(x) = \frac{1}{2}F(x-\frac{1}{2}) \quad (3.6)$$

Сравнивая безразмерные формы записи решений (3.4) и (3.6), отметим, что решение (3.4), полученное в рамках несимметричной теории, является функцией характерного размера l , в то время как (3.6) от l не зависит. Из этого можно предположить, что при фиксированных материальных константах моментной теории упругости и величине F , есть возможность нахождения такого характерного размера, при котором различия решений (3.4) и (3.6) будут значительными. Для данной задачи в качестве характеристики сравнения этих решений применим относительную величину

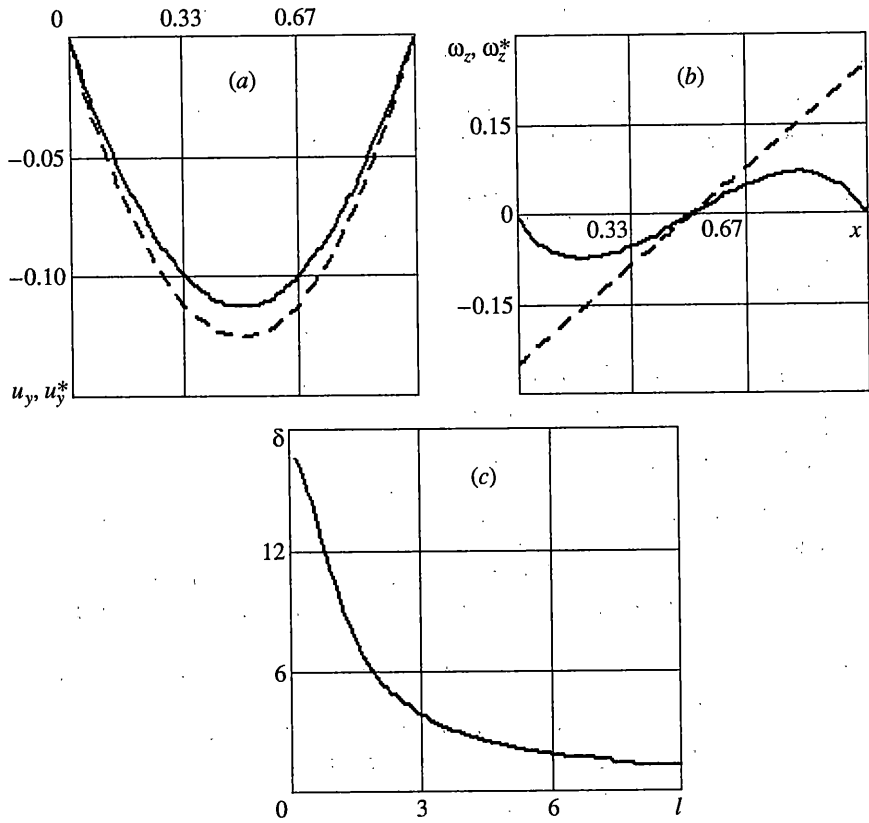
$$\delta = \left| \frac{u_y(0.5) - u_y^*(0.5)}{u_y^*(0.5)} \right| 100\% \quad (3.7)$$

На фиг. 2, *a, b* приведены зависимости безразмерного перемещения и поворота от координаты x . Сплошной линией обозначены графики, соответствующие несимметричной теории упругости, а штриховой — симметричной. На фиг. 2, *c* приведена зависимость величины δ от характерного размера l . Эти графические зависимости соответствуют следующим значениям материальных констант: $\alpha = 0.2, \gamma = 0.01, \epsilon = 0.01, \mu = 1$.

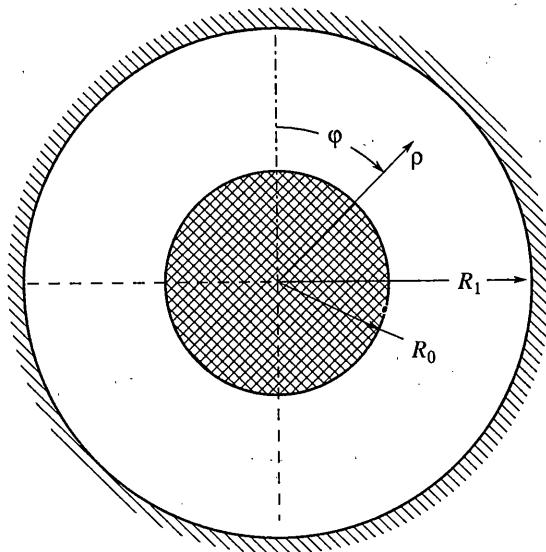
4. Задача о кручении плоского кольца. Рассмотрим кольцо (цилиндр), жестко закрепленное по внешнему контуру $\rho = R_1$ (фиг. 3). Кручение кольца осуществляется за счет поворота внутреннего контура $\rho = R_0$ на угол φ_0 .

В силу симметрии, решение этой задачи для несимметричной теории упругости в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) сводится к нахождению ненулевой компоненты вектора углового перемещения $V(\rho)$, а также вектора поворота $\omega(\rho)$ относительно оси z :

$$\mathbf{u} = \{0, V(\rho), 0\}, \quad \boldsymbol{\omega} = \{0, 0, \omega(\rho)\} \quad (4.1)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Граничные условия для искомых функций примут вид

$$u_{\varphi}|_{\rho=R_0} = \varphi_0 R_0, \quad \omega_z|_{\rho=R_0} = \varphi_0, \quad u_{\varphi}|_{\rho=R_1} = 0, \quad \omega_z|_{\rho=R_1} = 0 \quad (4.2)$$

Подставляя (4.1) в (2.4), получим уравнения равновесия в виде системы двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $V(\rho)$ и $\omega(\rho)$:

$$\frac{d^2}{d\rho^2} V(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} V(\rho) - \frac{1}{\rho^2} V(\rho) - \frac{2\alpha}{\alpha + \mu} \frac{d}{d\rho} \omega(\rho) = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2} \omega(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \omega(\rho) - \frac{4\alpha}{\gamma + \varepsilon} \omega(\rho) + \frac{2\alpha}{\gamma + \varepsilon} \frac{d}{d\rho} V(\rho) + \frac{2\alpha}{(\gamma + \varepsilon)\rho} V(\rho) = 0$$

Общее решение системы уравнений (4.3) имеет вид

$$V(\rho) = C_1 V_1(\rho) + C_2 V_2(\rho) + C_3 V_3(\rho) + C_4 V_4(\rho)$$

$$\omega(\rho) = C_1 \omega_1(\rho) + C_2 \omega_2(\rho) + C_3 \omega_3(\rho) + C_4 \omega_4(\rho)$$

где $V_i(\rho)$, $\omega_i(\rho)$ ($i = 1, \dots, 4$) – частные решения системы (4.3), а C_i – произвольные постоянные, определяемые из краевых условий.

Как и ранее, в качестве $V_1(\rho)$, $V_2(\rho)$ были выбраны частные решения, соответствующие классической теории упругости, а $\omega_1(\rho)$, $\omega_2(\rho)$ получены на основе соотношения (1.1).

Используем ранее введенные (2.6) безразмерные величины A , B , C , а также связь безразмерных и размерных характеристик напряженно-деформированного состояния (3.5), где в качестве характерного размера возьмем радиус внешнего контура R_1 . Это позволяет выписать безразмерный вид общего решения в явной форме

$$u_{\varphi}(\rho) = C_1 \rho + C_2 (1/\rho) + C_3 V_3(\rho) + C_4 V_4(\rho)$$

$$\omega_z(\rho) = C_1 + C_3 \omega_3(\rho) + C_4 \omega_4(\rho)$$

$$\sigma_{\rho\varphi}(\rho) = -2C_2 / \rho^2 + C_3 S_{\rho\varphi}^{(3)}(\rho) + C_4 S_{\rho\varphi}^{(4)}(\rho)$$

$$\sigma_{\varphi\rho}(\rho) = -2C_2 / \rho^2 + C_3 S_{\varphi\rho}^{(3)}(\rho) + C_4 S_{\varphi\rho}^{(4)}(\rho) \quad (4.4)$$

$$\mu_{\rho z}(\rho) = C_3 M_{\rho z}^{(3)}(\rho) + C_4 M_{\rho z}^{(4)}(\rho)$$

$$M = \int_0^{2\pi} \sigma_{\rho\varphi}(R_0) R_0^2 d\varphi + \int_0^{2\pi} \mu_{\rho z}(R_0) R_0 d\varphi$$

Здесь M – макромомент, являющийся реакцией внутреннего контура на поворот. Функции, соответствующие частным решениям, определяются соотношениями

$$V_3(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n A^{2n} \rho^{2n+3}$$

$$V_4(\rho) = \rho \ln(\rho) + \frac{1}{2} A^2 (1 + \ln(\rho)) \rho^3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} A^{2n+4} L_n (\ln(\rho) + M_n) \rho^{2n+5}$$

$$\omega_3(\rho) = B \left\{ 2(B-1)/(A^2 B) + \sum_{n=0}^{\infty} K_n A^{2n} (n+2) \rho^{2n+2} \right\}$$

$$\omega_4(\rho) =$$

$$= -7/4 + B \left\{ \frac{4 \ln(\rho) + 9}{4} + A^2 \frac{4 \ln(\rho) + 5}{4} \rho^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+4}}{24} L_n (2(n+3)(\ln(\rho) + M_n) + 1) \rho^{2n+4} \right\}$$

$$S_{\rho\varphi}^{(3)}(\rho) = -4/A^2 - \sum_{n=0}^{\infty} 2K_n A^{2n} \rho^{2n+2}$$

$$S_{\rho\varphi}^{(4)}(\rho) = -\frac{7+4\ln(\rho)}{2} - A^2(1+\ln(\rho))\rho^2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+4}}{6} L_n(\ln(\rho) + M_n)\rho^{2n+4}$$

$$S_{\varphi\rho}^{(3)}(\rho) = 4/A^2 + \sum_{n=0}^{\infty} 2K_n A^{2n} (2n+3)\rho^{2n+2}$$

$$S_{\varphi\rho}^{(4)}(\rho) = \frac{11+4\ln(\rho)}{2} + A^2(4+3\ln(\rho))\rho^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+4}}{6} L_n((2n+5)(\ln(\rho) + M_n) + 1)\rho^{2n+4}$$

$$M_{\rho z}^{(3)}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} 2K_n A^{2n-2} (n+1)(n+2)\rho^{2n+1}$$

$$M_{\rho z}^{(4)}(\rho) = 1/(A^2\rho) + \frac{7+4\ln(\rho)}{2}\rho + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+2}}{12} L_n(2(n+2)(n+3)(\ln(\rho) + M_n) + 2n+5)\rho^{2n+3}$$

$$K_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)}, \quad L_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

$$M_n = \frac{7}{12} - \sum_{k=1}^n \frac{2k+5}{2(k+2)(k+3)}$$

Константы C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из краевых условий (4.2) для конкретных значений безразмерных величин A и B .

Вектор перемещения, соответствующий решению данной задачи в рамках симметричной теории упругости, а также вектор вращения, найденный по соотношению (1.1), примут вид

$$u_{\varphi}^*(\rho) = -\frac{R_0^2\varphi_0}{1-R_0^2}\rho + \frac{R_0^2\varphi_0}{(1-R_0^2)\rho}, \quad \omega_z^*(\rho) = -\frac{R_0^2\varphi_0}{1-R_0^2}\rho \quad (4.5)$$

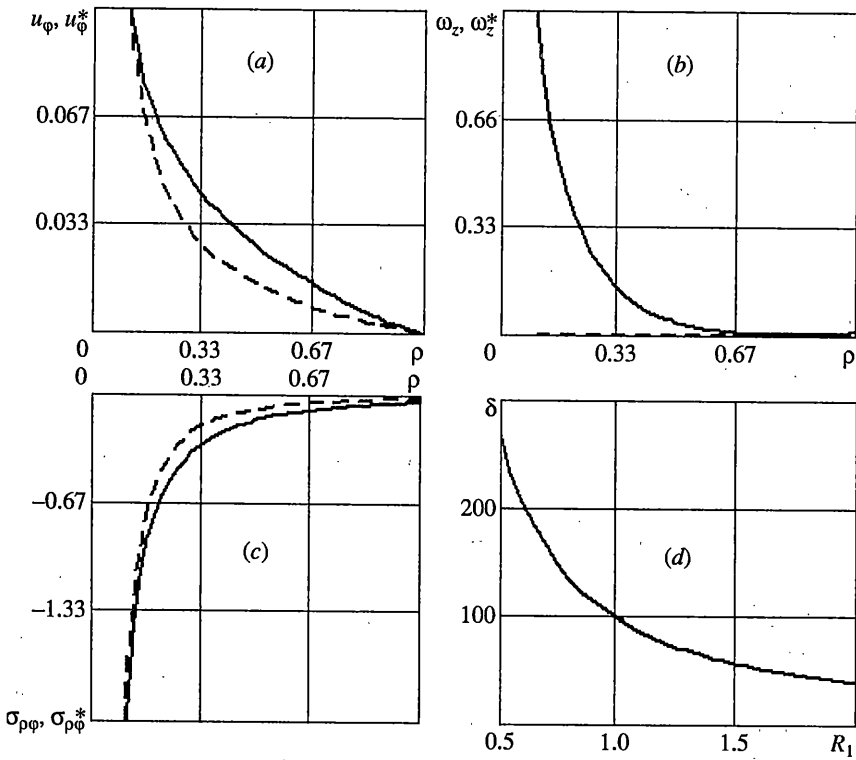
$$\sigma_{\rho\varphi}^*(\rho) = -\frac{2R_0^2\varphi_0}{(1-R_0^2)\rho^2}, \quad M^* = \int_0^{2\pi} \sigma_{\rho\varphi}^*(R_0)R_0^2 d\varphi$$

Как и в предыдущей задаче, решение (4.4), полученное в рамках несимметричной теории, является функцией характерного размера R_1 , в то время как (4.5) от него не зависит. Для данной задачи в качестве характеристики сравнения моментного и классического решений применим относительную величину, как функцию характерного размера R_1 :

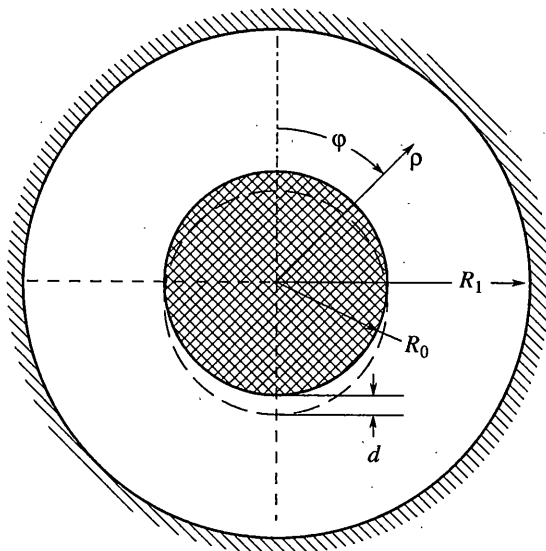
$$\delta = \left| \frac{M - M^*}{M^*} \right| 100\% \quad (4.6)$$

На фиг. 4, *a-c* приведены зависимости от безразмерного радиуса ρ безразмерных компонент: $u_{\varphi}, u_{\varphi}^*$ – вектора углового перемещения; ω_z, ω_z^* – вектора поворота относительно оси z ; $\sigma_{\rho\varphi}, \sigma_{\rho\varphi}^*$ – тензора напряжений. Сплошные линии на этих графиках соответствуют решению, полученному в рамках несимметричной теории упругости, а штриховые – симметричной. На фиг. 4, *d* приведена зависимость величины δ (4.6) от характерного размера R_1 .

Все численные результаты, представленные на фиг. 4, были получены для следующих значений физических материальных констант: $\alpha = 0.2, \gamma = 0.01, \varepsilon = 0.01$,



Фиг. 4



Фиг. 5

$\mu = 1$. Число членов ряда $N = 25$. В данной задаче такого числа членов ряда достаточно, чтобы результат решения не зависел от него.

5. Задача о деформировании плоского кольца. Рассмотрим кольцо (цилиндр), жестко закрепленное по внешнему контуру $\rho = R_1$ (фиг. 5). Деформирование кольца осуществляется за счет жесткого смещения внутреннего контура $\rho = R_0$ на величину d .

В силу симметрии, решение задачи будем искать в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) в разложении по азимутальному углу в виде

$$\mathbf{u}(\rho, \varphi) = \{U(\rho) \cos(\varphi), V(\rho) \sin(\varphi), 0\}, \quad \boldsymbol{\omega}(\rho, \varphi) = \{0, 0, \omega(\rho) \sin(\varphi)\} \quad (5.1)$$

Граничные условия запишем так:

$$u_\rho|_{\rho=R_0} = -d \cos(\varphi), \quad u_\varphi|_{\rho=R_0} = d \sin(\varphi) \quad (5.2)$$

$$\omega_z|_{\rho=R_0} = 0, \quad u_\rho = u_\varphi = \omega_z|_{\rho=R_1} = 0$$

Подставляя (5.1) в (2.4), получим уравнения равновесия в виде системы трех линейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $U(\rho)$, $V(\rho)$ и $\omega(\rho)$:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\rho^2} U(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} U(\rho) - \frac{3\mu + \alpha + \lambda}{(2\mu + \lambda)\rho^2} U(\rho) - \frac{\alpha - \mu - \lambda}{(2\mu + \lambda)\rho} \frac{d}{d\rho} V(\rho) - \\ & - \frac{3\mu + \alpha + \lambda}{(2\mu + \lambda)\rho^2} V(\rho) + \frac{2\alpha}{(2\mu + \lambda)\rho} \omega(\rho) = 0 \\ & \frac{d^2}{d\rho^2} V(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} V(\rho) - \frac{3\mu + \alpha + \lambda}{(\mu + \alpha)\rho^2} V(\rho) + \frac{\alpha - \mu - \lambda}{(\mu + \alpha)\rho} \frac{d}{d\rho} U(\rho) - \\ & - \frac{3\mu + \alpha + \lambda}{(\mu + \alpha)\rho^2} U(\rho) - \frac{2\alpha}{(\mu + \alpha)} \frac{d}{d\rho} \omega(\rho) = 0 \\ & \frac{d^2}{d\rho^2} \omega(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \omega(\rho) - \frac{4\alpha\rho^2 + \gamma + \varepsilon}{(\gamma + \varepsilon)\rho^2} \omega(\rho) + \frac{2\alpha}{\gamma + \varepsilon} \frac{d}{d\rho} V(\rho) + \\ & + \frac{2\alpha}{(\gamma + \varepsilon)\rho} V(\rho) + \frac{2\alpha}{(\gamma + \varepsilon)\rho} U(\rho) = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Общее решение системы уравнений (5.3) имеет вид

$$U(\rho) = C_1 U_1(\rho) + C_2 U_2(\rho) + C_3 U_3(\rho) + C_4 U_4(\rho) + C_5 U_5(\rho) + C_6 U_6(\rho)$$

$$V(\rho) = C_1 V_1(\rho) + C_2 V_2(\rho) + C_3 V_3(\rho) + C_4 V_4(\rho) + C_5 V_5(\rho) + C_6 V_6(\rho)$$

$$\omega(\rho) = C_1 \omega_1(\rho) + C_2 \omega_2(\rho) + C_3 \omega_3(\rho) + C_4 \omega_4(\rho) + C_5 \omega_5(\rho) + C_6 \omega_6(\rho)$$

где $U_i(\rho), V_i(\rho), \omega_i(\rho)$ ($i = 1, \dots, 6$) – частные решения системы (5.3), а C_i – произвольные постоянные, определяемые из краевых условий.

Как и в п. 3, 4, в качестве $V_1(\rho), V_2(\rho), V_3(\rho), V_4(\rho)$ были выбраны частные решения, соответствующие классической теории упругости. Функции $\omega_1(\rho), \omega_2(\rho), \omega_3(\rho), \omega_4(\rho)$ получены на основе соотношения (1.1). Эти первые четыре частных решения были применены для эффективного построения двух оставшихся.

Используем ранее введенные (2.6) безразмерные величины A, B, C , а также связь безразмерных и размерных характеристик напряженно-деформированного состояния (3.5), где в качестве характерного размера возьмем радиус внешнего контура R_1 . Это позволяет выписать безразмерный вид общего решения в явной форме:

$$\begin{aligned}
u_p(\rho, \varphi) &= \cos(\varphi)(C_1 + C_2/\rho^2 + C_3\rho^2 + C_4 \ln(\rho) + C_5 U_5(\rho) + C_6 U_6(\rho)) \\
u_\varphi(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi) \left(-C_1 + \frac{C_2}{\rho^2} + C_3 \frac{3\lambda + 5\mu}{\mu - \lambda} \rho^2 - C_4 \left[\ln(\rho) + \frac{\mu + \lambda}{3\mu + \lambda} \right] - C_5 V_5(\rho) - C_6 V_6(\rho) \right) \\
\omega_z(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi) \left(C_3 \frac{8\mu + 4\lambda}{\mu - \lambda} \rho - C_4 \frac{2\mu + \lambda}{(3\mu + \lambda)\rho} - C_5 \omega_5(\rho) - C_6 \omega_6(\rho) \right) \\
\sigma_{\rho\rho}(\rho, \varphi) &= \cos(\varphi) \left(-C_2 \frac{4}{\rho^3} + C_3 \frac{4(\mu + \lambda)}{\mu - \lambda} \rho + C_4 \frac{2(3\mu + 2\lambda)}{(3\mu + \lambda)\rho} + C_5 S_{\rho\rho}^{(5)}(\rho) + C_6 S_{\rho\rho}^{(6)}(\rho) \right) \\
\sigma_{\rho\varphi}(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi) \left(-C_2 \frac{4}{\rho^2} + C_3 \frac{4(\mu + \lambda)}{\mu - \lambda} \rho - C_4 \frac{2\mu}{(3\mu + \lambda)\rho} + C_5 S_{\rho\varphi}^{(5)}(\rho) + C_6 S_{\rho\varphi}^{(6)}(\rho) \right) \\
\sigma_{\varphi\rho}(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi) \left(-C_2 \frac{4}{\rho^3} + C_3 \frac{4(\mu + \lambda)}{\mu - \lambda} \rho - C_4 \frac{2\mu}{(3\mu + \lambda)\rho} + C_5 S_{\varphi\rho}^{(5)}(\rho) + C_6 S_{\varphi\rho}^{(6)}(\rho) \right) \quad (5.4) \\
\sigma_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi) &= \cos(\varphi) \left(C_2 \frac{4}{\rho^3} + C_3 \frac{12(\mu + \lambda)}{\mu - \lambda} \rho - C_4 \frac{2\mu}{(3\mu + \lambda)\rho} + C_5 S_{\varphi\varphi}^{(5)}(\rho) + C_6 S_{\varphi\varphi}^{(6)}(\rho) \right) \\
\mu_{\rho z}(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi) \left(C_3 \frac{4(2\mu + \lambda)}{(\mu - \lambda)A^2 B} + C_4 \frac{2\mu + \lambda}{(3\mu + \lambda)A^2 B \rho^2} + C_5 M_{\rho z}^{(5)}(\rho) + C_6 M_{\rho z}^{(6)}(\rho) \right) \\
\mu_{\varphi z}(\rho, \varphi) &= \cos(\varphi) \left(C_3 \frac{4(2\mu + \lambda)}{(\mu - \lambda)A^2 B} - C_4 \frac{2\mu + \lambda}{(3\mu + \lambda)A^2 B \rho^2} + C_5 M_{\varphi z}^{(5)}(\rho) + C_6 M_{\varphi z}^{(6)}(\rho) \right) \\
\mu_{z\rho}(\rho, \varphi) &= C\mu_{\rho z}(\rho, \varphi), \quad \mu_{z\varphi}(\rho, \varphi) = C\mu_{\varphi z}(\rho, \varphi) \\
F_y &= \int_0^{2\pi} (\sigma_{\rho\varphi}(R_0, \varphi) \sin(\varphi) + \sigma_{\rho\rho}(R_0, \varphi) \cos(\varphi)) R_0 d\varphi
\end{aligned}$$

Здесь F_y – величина реакции внутреннего контура на жесткое смещение на величину d . Функции, зависящие от ρ , введенные в выражении (5.4) и соответствующие частным решениям, определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
U_5(\rho) &= \sum_{n=0}^{\infty} A^{2n} K_n \rho^{2n+4}, \quad U_6(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{2n} L_n (\ln(\rho) + M_n) \rho^{2n+2} \\
V_5(\rho) &= \frac{48\mu}{(\mu - \lambda)A^2} \rho^2 + \sum_{n=0}^{\infty} A^{2n} K_n (2n + 5) \rho^{2n+4} \\
V_6(\rho) &= \frac{4\mu}{(3\mu + \lambda)A^2} + \sum_{n=0}^{\infty} A^{2n} L_n ((2n + 3)(\ln(\rho) + M_n) + 1) \rho^{2n+2} \\
\omega_5(\rho) &= \frac{24(2\mu + B\mu - B\lambda + \lambda)}{A^2(\mu - \lambda)} \rho + \sum_{n=0}^{\infty} 2BA^{2n} K_n (n + 2)(n + 3) \rho^{2n+3} \\
\omega_6(\rho) &= \frac{2(3B\mu + B\lambda - 2\mu - \lambda)}{A^2(3\mu + \lambda)\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} BA^{2n} L_n (2(n + 1)(n + 2)(\ln(\rho) + M_n) + 2n + 3) \rho^{2n+1}
\end{aligned}$$

$$S_{\rho\rho}^{(5)}(\rho) = \frac{-48\lambda}{(\mu - \lambda)A^2} \rho + 4 \sum_{n=0}^{\infty} A^{2n} K_n(n+2) \rho^{2n+3}$$

$$S_{\rho\rho}^{(6)}(\rho) = \frac{-4\lambda}{(3\mu + \lambda)A^2 \rho} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} A^{2n} L_n(2(n+1)(\ln(\rho) + M_n) + 1) \rho^{2n+1}$$

$$S_{\rho\varphi}^{(5)}(\rho) = S_{\rho\rho}^{(5)}(\rho)$$

$$S_{\rho\varphi}^{(6)}(\rho) = \frac{4(4\mu + \lambda)}{(3\mu + \lambda)A^2 \rho} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} A^{2n} L_n(2(n+1)(\ln(\rho) + M_n) + 1) \rho^{2n+1}$$

$$S_{\varphi\rho}^{(5)}(\rho) = \frac{-48(2\mu - \lambda)}{(\mu - \lambda)A^2} \rho - 4 \sum_{n=0}^{\infty} A^{2n} K_n(n+2)(2n+5) \rho^{2n+3}$$

$$S_{\varphi\rho}^{(6)}(\rho) = \frac{-4(2\mu + \lambda)}{(3\mu + \lambda)A^2 \rho} - \sum_{n=0}^{\infty} A^{2n} L_n(4(n+1)(2n+3)(\ln(\rho) + M_n) + 2(4n+5)) \rho^{2n+1}$$

$$S_{\varphi\varphi}^{(5)}(\rho) = \frac{-48(2\mu + \lambda)}{(\mu - \lambda)A^2} \rho - 4 \sum_{n=0}^{\infty} A^{2n} K_n(n+2) \rho^{2n+3}$$

$$S_{\varphi\varphi}^{(6)}(\rho) = \frac{-4(2\mu + \lambda)}{(3\mu + \lambda)A^2 \rho} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} A^{2n} L_n(2(n+1)(\ln(\rho) + M_n) + 1) \rho^{2n+1}$$

$$M_{\rho z}^{(5)}(\rho) = \frac{-24(2\mu + \lambda + B(\mu - \lambda))}{(\mu - \lambda)A^4 B} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} A^{2n-2} K_n(n+2)(n+3)(2n+3) \rho^{2n+2}$$

$$M_{\rho z}^{(6)}(\rho) = \frac{-2(2\mu + \lambda - B(3\mu + \lambda))}{(3\mu + \lambda)A^4 B \rho^2} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} A^{2n-2} L_n(2(n+1)(n+2)(2n+1)(\ln(\rho) + M_n) + 2n(3n+7) + 7) \rho^{2n}$$

$$M_{\varphi z}^{(5)}(\rho) = \frac{-24(2\mu + \lambda + B(\mu - \lambda))}{(\mu - \lambda)A^4 B} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} A^{2n-2} K_n(n+2)(n+3) \rho^{2n+2} \quad (5.5)$$

$$M_{\varphi z}^{(6)}(\rho) = \frac{2(2\mu + \lambda - B(3\mu + \lambda))}{(3\mu + \lambda)A^4 B \rho^2} - \sum_{n=0}^{\infty} A^{2n-2} L_n(2(n+1)(n+2)(\ln(\rho) + M_n) + 2n+3) \rho^{2n}$$

$$K_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{(k+2)(k+3)}, \quad L_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$M_n = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{2k+3}{2(k+1)(k+2)}$$

Константы $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ определяются из краевых условий (5.2).

Вектор перемещения, соответствующий решению данной задачи в рамках симметричной теории упругости, а также вектор вращения, найденный по соотношению (1.1), примут вид

$$u_{\rho}^*(\rho, \varphi) = \cos(\varphi)(C_1^* + C_2^*/\rho^2 + C_3^*\rho^2 + C_4^* \ln(\rho))$$

$$u_{\varphi}^*(\rho, \varphi) = \sin(\varphi) \left(-C_1^* + \frac{C_2^*}{\rho^2} + C_3^* \frac{3\lambda + 5\mu}{\mu - \lambda} \rho^2 - C_4^* \left\{ \ln(\rho) + \frac{\mu + \lambda}{3\mu + \lambda} \right\} \right)$$

$$\begin{aligned} \omega_z^*(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi) \left(C_3^* \frac{8\mu + 4\lambda}{\mu - \lambda} \rho - C_4^* \frac{2\mu + \lambda}{(3\mu + \lambda)\rho} \right) \\ \sigma_{\rho\rho}^*(\rho, \varphi) &= \cos(\varphi) \left(-C_2^* \frac{4}{\rho^3} + C_3^* \frac{4(\mu + \lambda)}{\mu - \lambda} \rho + C_4^* \frac{2(3\mu + 2\lambda)}{(3\mu + \lambda)\rho} \right) \\ \sigma_{\rho\varphi}^*(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi) \left(-C_2^* \frac{4}{\rho^3} + C_3^* \frac{4(\mu + \lambda)}{\mu - \lambda} \rho - C_4^* \frac{2\mu}{(3\mu + \lambda)\rho} \right) \\ \sigma_{\varphi\varphi}^*(\rho, \varphi) &= \sigma_{\rho\varphi}^*(\rho, \varphi) \\ \sigma_{\varphi\varphi}^*(\rho, \varphi) &= \cos(\varphi) \left(C_2^* \frac{4}{\rho^3} + C_3^* \frac{12(\mu + \lambda)}{\mu - \lambda} \rho - C_4^* \frac{2\mu}{(3\mu + \lambda)\rho} \right) \\ F_y^* &= \int_0^{2\pi} (\sigma_{\rho\varphi}^*(R_0, \varphi) \sin(\varphi) + \sigma_{\rho\rho}^*(R_0, \varphi) \cos(\varphi)) R_0 d\varphi \end{aligned} \tag{5.6}$$

Константы $C_1^*, C_2^*, C_3^*, C_4^*$ также будут определяться из соответствующей части краевых условий (5.2).

По аналогии с предыдущими задачами введем функцию, зависящую от характерного размера R_1 :

$$\delta = \left| \frac{F_y - F_y^*}{F_y^*} \right| 100\% \tag{5.7}$$

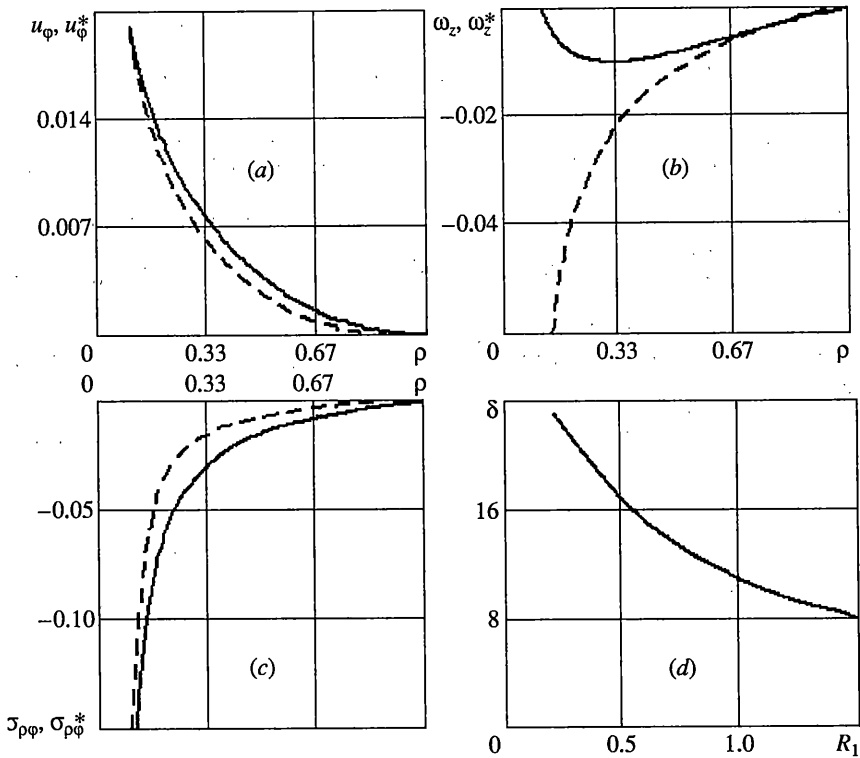
На фиг. 6, *a-c* представлены распределения по безразмерной радиальной координате ρ безразмерных компонент соответственно: вектора угловых перемещений u_φ, u_φ^* ; вектора поворота относительно оси z ω_z, ω_z^* ; тензора напряжений $\sigma_{\rho\varphi}, \sigma_{\rho\varphi}^*$. Сплошной линией изображено моментное решение, штриховой – классическое. Представленные графики получены для: материальных физических констант $\alpha = 0.5$, $\gamma = 0.01$, $\varepsilon = 0.01$, $\mu = 1$, $\lambda = 1.5$; радиуса внутреннего контура $R_0 = 0.1$; относительного смещения $d = 0.02$; числа членов ряда $N = 25$. В данной задаче такого количества членов ряда достаточно, чтобы результат решения от него не зависел.

На фиг. 6, *d* приведена зависимость величины δ (5.7) от характерного размера R_1 . В данной задаче эта величина характеризует влияние характерного размера R_1 на степень различия моментной и классической реакций внутреннего контура при жестком смещении на величину d .

6. Заключение. Качественный и численный анализ аналитических решений, полученных выше, а также зависимостей, представленных на фиг. 2, фиг. 4, 6, позволяет сделать ряд выводов.

Безразмерная форма записи полученных аналитических решений позволила наглядно установить принципиальное различие безразмерных моментного и классического решений. А именно, безразмерное моментное решение зависит от характерного размера, а классическое – нет.

Во всех трех решенных задачах по мере уменьшения характерного размера возрастает степень различия безразмерных макровеличин, полученных в рамках несимметричной теории, по сравнению с классическими (первая задача – максимальное осевое смещение, вторая – крутящий момент на внутреннем контуре, третья – осевая си-



Фиг. 6

ла реакции внутреннего контура). Этот факт наглядно представлен на фиг. 2, с, фиг. 4, d, фиг. 6, d. В первой и третьей задачах степень различия, при фиксированных материальных константах, видимо имеет конечный предел при неограниченном уменьшении толщины слоя за счет уменьшения характерного размера. Однако во второй задаче наблюдается неограниченное возрастание этой степени различий.

Полученные решения в значительной степени позволяют определить схему эксперимента и необходимую точность измерений, а также методы обработки экспериментальных данных с целью идентификации материальных параметров моментной теории упругости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00240).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. *Nowacki W.* Teoria niesymetrycznej sprzyzystosci. Warszawa: PNW, 1971. 264 s.
3. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Континуальная теория асимметрической упругости. Равновесие изотропного тела // Физика твердого тела. 1964. Т. 6. Вып. 9. С. 2689–2699.
4. *Пальмов В.А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401–408.
5. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.

6. *Misicu M.* Theory of viscoelasticity with couple stress and some reductions to two-dimensional problems // *Revue de mecanique*. 1963. V. 8. № 6.
7. *Misicu M.* On a theory of asymmetric plastic and viscoelastic-plastic solids // *Revue Roumaine des sciences techniques, Serie de mecanique appliquee*. 1964. V. 9. № 3.
8. *Савин Г.Н.* Механика деформируемых тел. Киев: Наук. думка, 1979. 466 с.
9. *Gauthier R.D., Jahsman W.E.* A quest for micropolar elastic constants // *Trans. ASME. Ser. E.J. Appl. Mech.* 1975. V. 42. № 2. P. 369–374.
10. *Пальмов В.А.* Плоская задача теории несимметричной упругости // *ПММ*. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1117–1120.
11. *Chiu B.M., Lee J.D.* On the plane problem in micropolar elasticity // *Intern. J. Eng. Sci.* 1973. V. 11. № 9. P. 997–1012.
12. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
13. *Labropulu F., Chandna O.P.* Some confluent flows of Cosserat fluids // *ZAMM*. 1995. Bd. 75. H. 3. S. 233–237.

Пермь

Поступила в редакцию
16.05.2000