

УДК. 539.3

© 2002 г. А.А. ПАНЬКОВ

ДИСПЕРСИИ ДЕФОРМАЦИЙ В ФАЗАХ УПРУГИХ КОМПОЗИТОВ СО СЛУЧАЙНЫМИ СТРУКТУРАМИ

Представлены постановка и решение новых осредненных краевых задач обобщенного метода самосогласования [1, 2] для расчета полей дисперсий напряжений и деформаций в фазах составных или полых включений, обусловленных случайным взаимным расположением включений в представительном объеме композита, через заданные поля однородной макродеформации и безусловные одноточечные центральные моменты микродеформаций композита [3–10] (см. также: М.Г. Танкеева, А.А. Ташкинов, Ю.В. Соколкин, А.М. Постных. Структурно-феноменологический подход к оценке прочности анизотропных композитных конструкций. Свердловск, 1989. – (Препринт / УрО АН СССР). – 80 с.). Сделан переход от постановки краевой задачи для условных двухточечных центральных моментов полей деформирования композита со случайной структурой к постановке более простой краевой задачи для соответствующих полей условных одноточечных моментов. Показано, что в частных случаях для расчета, например, дисперсий для относительного изменения объема и для сдвиговой деформации во включениях изотропного композита достаточно решить соответствующую осредненную краевую задачу теории упругости, расчетная схема которой – это одиночное включение с переходным слоем в однородной среде; упругие свойства и размер переходного слоя учитывают особенности случайного взаимного расположения включений через специальные осредненные индикаторные функции. Под переходным слоем подразумевается локальная область неоднородности поля упругих свойств осредненной краевой задачи вокруг одиночного включения, размер слоя соизмерим с радиусом корреляции случайной структуры композита. Решения этой осредненной задачи, например, для полей деформаций и напряжений соответствуют одноточечным полям центральных моментов деформаций и напряжений внутри и вокруг включений композита. Приведены результаты решения тестовых задач и численный расчет статистических характеристик напряжений и деформаций в жесткой фазе полых и в сплошных сферических включениях различных случайных структур композитов.

1. Модель структуры. Пусть для некоторой представительной области композита V со случайной структурой из составных или полых включений задано однородное поле малых упругих макродеформаций композита ϵ^* , F – число фаз во включении. Действительные или микроуровневые поля напряжений $\sigma(\mathbf{r})$ и деформаций $\epsilon(\mathbf{r})$ обладают свойствами статистической однородности и эргодичности [3–5]. Все включения имеют одинаковые размеры, геометрическую форму, ориентацию в области V и расположение фаз внутри включений. Выполняются условия идеального контакта на межфазных поверхностях.

Безусловные центральные моменты деформаций

$$\langle \epsilon'_{ij} \epsilon'_{mn} \rangle = \langle \epsilon_{ij} \epsilon_{mn} \rangle - \epsilon^*_{ij} \epsilon^*_{mn} \quad (1.1)$$

считаем известными для заданного тензора $\epsilon^* \equiv \langle \epsilon \rangle$ однородной макродеформации композита; моменты $\langle \epsilon \rangle$ (1.1) могут быть рассчитаны на основе теории случайных функций [3–7]. В (1.1) пульсации деформаций

$$\epsilon'_{ij}(\mathbf{r}) = \epsilon_{ij}(\mathbf{r}) - \epsilon_{ij}^* \quad (1.2)$$

операторы безусловного $\langle \dots \rangle$ и условного $\langle \dots \rangle_f$ статистических осреднений в точке \mathbf{r} для случайных эргодических полей совпадают с соответствующими операторами объемных осреднений по представительной области композита \mathbf{V} :

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{|\mathbf{V}|} \int_{\mathbf{V}} \dots d\mathbf{r} \quad (1.3)$$

и по области f -й фазы \mathbf{V}_f :

$$\langle \dots \rangle_f = \frac{1}{|\mathbf{V}_f|} \int_{\mathbf{V}_f} \dots d\mathbf{r}, \quad \bigcup_{f=1}^{F+1} \mathbf{V}_f = \mathbf{V} \quad (1.4)$$

где фаза $F + 1$ соответствует матрице композита.

Пусть ξ – локальная система координат, центр которой совмещен с центром, заданного радиус-вектором $\mathbf{r}^{(k)}$, произвольного k -го включения в представительной области композита \mathbf{V} . Аналогично (1.3) и (1.4) обозначим через $\langle \dots \rangle_{\xi}$ и $\langle \dots \rangle_{\xi_f}$ операторы осреднения случайных величин в локальной точке ξ ; оператор условного осреднения $\langle \dots \rangle_{\xi_f}$ определен при условии нахождения в точке ξ точек f -й фазы композита. Аналогично одноточечному оператору осреднения $\langle \dots \rangle_{\xi}$, могут быть введены и n -точечные моменты, например, двухточечные моменты $\langle \dots \rangle_{\xi_1 \xi_2}$ для локальных точек ξ_1 и ξ_2 .

Например, для статистически однородной эргодической индикаторной функции f -й фазы композита

$$\omega_f(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in \mathbf{V}_f \\ 0, & \mathbf{r} \notin \mathbf{V}_f \end{cases} \quad (1.5)$$

относительное объемное содержание f -й фазы композита

$$v_f = \langle \omega_f \rangle \quad (1.6)$$

Случайная величина ω_f в фиксированной локальной точке ξ принимает значение 1 с вероятностью $p_f(\xi)$ и 0 – с вероятностью $1 - p_f(\xi)$, следовательно осредненное значение

$$\bar{\omega}_f(\xi) \equiv \langle \omega_f \rangle_{\xi} = 1 p_f(\xi) + 0(1 - p_f(\xi)) = p_f(\xi) \quad (1.7)$$

есть вероятность появления в локальной точке ξ точки из области \mathbf{V}_f f -й фазы композита, при этом имеем

$$\sum_{f=1}^{F+1} \bar{\omega}_f(\xi) = 1 \quad (1.8)$$

Осредненная индикаторная функция $\bar{\omega}_f(\xi)$ [1] рассчитывается через представительную реализацию поля $\omega_f(\mathbf{r})$ в области \mathbf{V} по формуле

$$\bar{\omega}_f(\xi) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \omega_f^{(k)}(\xi) \quad (1.9)$$

$$\omega_f^{(k)}(\xi) \equiv \omega_f(\mathbf{r}_{(k)} + \xi) \quad (1.10)$$

где поле $\omega_f(\mathbf{r})$ в локальной системе координат ξ для k -го включения, $\mathbf{r}_{(k)}$ – радиус-вектор центра k -го включения, N – число включений в представительной области композита V .

Очевидно, что в локальной системе координат ξ всегда существует детерминированная область $v \equiv \cup_{(f)} v_{(f)}$ (f меняется от 1 до F) – одиночное "формальное" включение, идентичное включениям композита и центр которого совмещен с началом координат ξ , где $v_{(f)}$ – область f -й фазы этого включения; при $\xi \in v_{(f)}$ имеем равенство $\bar{\omega}_f = p_f = 1$.

2. Постановка осредненной задачи. Введем в рассмотрение в локальной системе координат ξ условные двухточечные начальные

$$K_{ijmn}^{(\sigma)}(\xi_1, \xi_2) \equiv \langle \sigma_{ij} \sigma_{mn} \rangle_{\xi_1 \xi_2} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sigma_{ij}^{(k)}(\xi_1) \sigma_{mn}^{(k)}(\xi_2) \quad (2.1)$$

и центральные

$$D_{ijmn}^{(\sigma)}(\xi_1, \xi_2) = K_{ijmn}^{(\sigma)}(\xi_1, \xi_2) - \bar{\sigma}_{ij}(\xi_1) \bar{\sigma}_{mn}(\xi_2) \quad (2.2)$$

моменты напряжений, где осредненное поле напряжений

$$\bar{\sigma}_{ij}(\xi) \equiv \langle \sigma_{ij} \rangle_{\xi} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sigma_{ij}^{(k)}(\xi)$$

введено ранее в задаче эффективного модуля [1] обобщенного метода самосогласования. После $\sigma^{(k)}(\xi)$ в формулах (2.1) и (2.2) связано с действительным полем напряжений $\sigma(\mathbf{r})$ в глобальной системе координат \mathbf{r} зависимостью

$$\sigma_{ij}^{(k)}(\xi) \equiv \sigma_{ij}(\mathbf{r}_{(k)} + \xi) \quad (2.3)$$

После дифференцирования уравнения (2.1) по координатам вектора ξ_2 получим

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n^{(2)}} K_{ijmn}^{(\sigma)}(\xi_1, \xi_2) = 0 \quad (2.4)$$

так как выполняются уравнения равновесия $\partial \sigma_{mn}^{(k)}(\xi) / \partial \xi_n = 0$.

Выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n^{(2)}} (\bar{\sigma}_{ij}(\xi_1) \bar{\sigma}_{mn}(\xi_2)) = 0 \quad (2.5)$$

так как осредненное поле напряжений $\bar{\sigma}(\xi)$ удовлетворяет уравнению равновесия [1] $\partial \bar{\sigma}_{mn}(\xi) / \partial \xi_n = 0$. Вычтем из (2.4) уравнение (2.5); в результате получим равенство

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n^{(2)}} D_{ijmn}^{(\sigma)}(\xi_1, \xi_2) = 0 \quad (2.6)$$

относительно условных центральных моментов $D^{(\sigma)}(\xi_1, \xi_2)$ (2.2).

Предположим, что существует связь вида

$$D_{ijmn}^{(\sigma)}(\xi_1, \xi_2) = a_{ijpq} D_{pqdb}^{(\epsilon)}(\xi_1, \xi_2)$$

через некоторое поле $\mathbf{a}(\xi_1, \xi_2)$ между условными центральными моментами напряжений $\mathbf{D}^{(\sigma)}(\xi_1, \xi_2)$ и деформаций

$$D_{pqdb}^{(\epsilon)}(\xi_1, \xi_2) = K_{pqdb}^{(\epsilon)}(\xi_1, \xi_2) - \bar{\epsilon}_{pq}(\xi_1) \bar{\epsilon}_{db}(\xi_2)$$

где условный начальный момент деформаций

$$K_{pqdb}^{(\epsilon)}(\xi_1, \xi_2) \equiv \langle \epsilon_{pq} \epsilon_{db} \rangle_{\xi_1 \xi_2} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \epsilon_{pq}^{(k)}(\xi_1) \epsilon_{db}^{(k)}(\xi_2)$$

осредненное поле деформаций [1]

$$\bar{\epsilon}_{pq}(\xi) \equiv \langle \epsilon_{pq} \rangle_{\xi} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \epsilon_{pq}^{(k)}(\xi)$$

Поле $\epsilon^{(k)}(\xi)$ связано с действительным полем деформаций $\epsilon(\mathbf{r})$ в системе координат \mathbf{r} зависимостью $\epsilon_{pq}^{(k)}(\xi) \equiv \epsilon_{pq}(\mathbf{r}_{(k)} + \xi)$, аналогичной (1.10) и (2.3).

Используя соотношения Коши малых деформаций $\epsilon_{pq}^{(k)}(\xi) = u_{(p,q)}^{(k)}(\xi)$, $\bar{\epsilon}_{pq}(\xi) = \bar{u}_{(p,q)}(\xi)$ (индексы в круглых скобках (i, j) обозначают операцию выделения симметричной составляющей из полей градиентов перемещений [4]), выразим условный центральный момент напряжений в виде

$$D_{ijmn}^{(\sigma)}(\xi_1, \xi_2) = a_{ijpq} \underset{mndb}{(\xi_1, \xi_2)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_q^{(1)} \partial \xi_b^{(2)}} D_{pd}^{(u)}(\xi_1, \xi_2) \quad (2.7)$$

через соответствующий центральный момент перемещений

$$D_{pd}^{(u)}(\xi_1, \xi_2) = K_{pd}^{(u)}(\xi_1, \xi_2) - \bar{u}_p(\xi_1) \bar{u}_d(\xi_2)$$

где условный начальный момент перемещений

$$K_{pd}^{(u)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_p^{(k)}(\xi_1) u_d^{(k)}(\xi_2)$$

и осредненное поле перемещений [1]:

$$\bar{u}_p(\xi) \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_p^{(k)}(\xi)$$

Поле $u^{(k)}(\xi)$ связано с действительным полем перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ в системе координат \mathbf{r} зависимостью $u_p^{(k)}(\xi) \equiv u_p(\mathbf{r}_{(k)} + \xi) - u_p(\mathbf{r}_{(k)})$.

Таким образом, после подстановки (2.7) в (2.6) приходим к постановке краевой задачи

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n^{(2)}} \left[a_{ijpq} \underset{mndb}{(\xi_1, \xi_2)} \frac{\partial^2}{\partial \xi_q^{(1)} \partial \xi_b^{(2)}} D_{pd}^{(u)}(\xi_1, \xi_2) \right] = 0 \quad (2.8)$$

с граничными условиями при $|\xi_2| \rightarrow \infty$ вида

$$D_{pd}^{(u)} = \langle \epsilon'_{pq} \epsilon'_{db} \rangle_{\xi_q^{(1)} \xi_b^{(2)}} \quad (2.9)$$

например, когда $\xi_1 \rightarrow \xi_2$; безусловные центральные моменты деформаций $\langle \epsilon' \epsilon' \rangle$ в (2.9) считаем известными (1.1) для заданного тензора ϵ^* однородной макродеформации композита.

Для рассматриваемого предельного случая, когда $\xi_1 \rightarrow \xi_2 \equiv \xi$ постановку краевой задачи (2.8), (2.9) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[a_{mndb}^{ijpq}(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi_q^{(1)} \partial \xi_b} D_{pd}^{(u)}(\xi_1, \xi) \right] + f_{ij}(\xi) = 0 \quad (2.10)$$

$$f_{ij}(\xi) \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[\left(a_{mndb}^{ijpq}(\xi_1, \xi) - a_{mndb}^{ijpq}(\xi) \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi_q^{(1)} \partial \xi_b} D_{pd}^{(u)}(\xi_1, \xi) \right]_{\xi_1 \rightarrow \xi} \quad (2.11)$$

с граничными условиями (2.9), где использовано обозначение

$$a_{mndb}^{ijpq}(\xi) \equiv a_{mndb}^{ijpq}(\xi, \xi) \quad (2.12)$$

Определим вид поля $\mathbf{a}(\xi)$ в уравнениях (2.10)–(2.12). Обозначим через $\mathbf{D}^{(\sigma)}(\xi) \equiv \mathbf{D}^{(\sigma)}(\xi, \xi)$ и $\mathbf{D}^{(\epsilon)}(\xi) \equiv \mathbf{D}^{(\epsilon)}(\xi, \xi)$ поля условных центральных моментов напряжений и деформаций соответственно. Представим $\mathbf{D}^{(\sigma)}(\xi)$ и $\mathbf{D}^{(\epsilon)}(\xi)$ в виде

$$D_{ijmn}^{(\sigma)}(\xi) = \langle \sigma_{ij} \sigma_{mn} \rangle_{\xi} - \langle \sigma_{ij} \rangle_{\xi} \langle \sigma_{mn} \rangle_{\xi}$$

$$D_{ijmn}^{(\epsilon)}(\xi) = \langle \epsilon_{ij} \epsilon_{mn} \rangle_{\xi} - \langle \epsilon_{ij} \rangle_{\xi} \langle \epsilon_{mn} \rangle_{\xi}$$

или

$$D_{ijmn}^{(\sigma)}(\xi) = \sum_{f=1}^{F+1} \langle \omega_f \sigma_{ij} \sigma_{mn} \rangle_{\xi} - \left(\sum_{f_1=1}^{F+1} \langle \omega_{f_1} \sigma_{ij} \rangle_{\xi} \right) \left(\sum_{f_2=1}^{F+1} \langle \omega_{f_2} \sigma_{mn} \rangle_{\xi} \right) \quad (2.13)$$

$$D_{ijmn}^{(\epsilon)}(\xi) = \sum_{f=1}^{F+1} \langle \omega_f \epsilon_{ij} \epsilon_{mn} \rangle_{\xi} - \left(\sum_{f_1=1}^{F+1} \langle \omega_{f_1} \epsilon_{ij} \rangle_{\xi} \right) \left(\sum_{f_2=1}^{F+1} \langle \omega_{f_2} \epsilon_{mn} \rangle_{\xi} \right) \quad (2.14)$$

Статистические моменты для напряжений в уравнении (2.13) можно выразить через условные моменты напряжений $\langle \sigma \sigma \rangle_{\xi f}$ и $\langle \sigma \rangle_{\xi f}$ по формулам

$$\langle \omega_f \sigma_{ij} \sigma_{mn} \rangle_{\xi} = \bar{\omega}_f(\xi) \langle \sigma_{ij} \sigma_{mn} \rangle_{\xi f} \quad (2.15)$$

$$\langle \omega_f \sigma_{ij} \rangle_{\xi} = \bar{\omega}_f(\xi) \langle \sigma_{ij} \rangle_{\xi f}$$

или через соответствующие моменты для деформаций $\langle \epsilon \epsilon \rangle_{\xi f}$ и $\langle \epsilon \rangle_{\xi f}$ в виде

$$\langle \omega_f \sigma_{ij} \sigma_{mn} \rangle_{\xi} = \bar{\omega}_f(\xi) C_{ij\alpha\beta}^{(f)} C_{mnpq}^{(f)} \langle \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{pq} \rangle_{\xi f} \quad (2.16)$$

$$\langle \omega_f \sigma_{ij} \rangle_{\xi} = \bar{\omega}_f(\xi) C_{ij\alpha\beta}^{(f)} \langle \epsilon_{\alpha\beta} \rangle_{\xi f}$$

с учетом обобщенного закона Гука для f -й фазы композита; осредненная индикаторная функция $\bar{\omega}_f(\xi)$ – вероятность нахождения в локальной точке ξ f -й фазы композита (1.7)–(1.10). Аналогично (2.15) для статистических моментов деформаций имеем

$$\langle \omega_f \epsilon_{ij} \epsilon_{mn} \rangle_{\xi} = \bar{\omega}_f(\xi) \langle \epsilon_{ij} \epsilon_{mn} \rangle_{\xi f}$$

$$\langle \omega_f \epsilon_{ij} \rangle_{\xi} = \bar{\omega}_f(\xi) \langle \epsilon_{ij} \rangle_{\xi f} \quad (2.17)$$

Таким образом, из формул (2.13)–(2.17) следуют выражения для полей условных центральных моментов напряжений

$$D_{ijmn}^{(\sigma)}(\xi) = \sum_{f=1}^{F+1} \bar{\omega}_f(\xi) C_{ijpq}^{(f)} C_{mndb}^{(f)} \langle \epsilon_{pq} \epsilon_{db} \rangle_{\xi f} - \left[\sum_{f_1=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_1}(\xi) C_{ijpq}^{(f_1)} \langle \epsilon_{pq} \rangle_{\xi f_1} \right] \left[\sum_{f_2=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_2}(\xi) C_{mndb}^{(f_2)} \langle \epsilon_{db} \rangle_{\xi f_2} \right] \quad (2.18)$$

и деформаций

$$D_{ijmn}^{(\varepsilon)}(\xi) = \sum_{f=1}^{F+1} \bar{\omega}_f(\xi) \langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn} \rangle_{\xi_f} - \left(\sum_{f_1=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_1}(\xi) \langle \varepsilon_{ij} \rangle_{\xi_{f_1}} \right) \left(\sum_{f_2=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_2}(\xi) \langle \varepsilon_{mn} \rangle_{\xi_{f_2}} \right) \quad (2.19)$$

Пусть тензоры $f^{(f)}$ и $\mathbf{f}^{(f_1, f_2)}$ введены разложениями

$$\langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn} \rangle_f = f_{ij\alpha\beta}^{(f)} d_{\alpha\beta\varphi\psi} \quad (2.20)$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_{f_1} \langle \varepsilon_{mn} \rangle_{f_2} = f_{ij\alpha\beta}^{(f_1, f_2)} d_{\alpha\beta\varphi\psi} \quad (2.21)$$

где безусловный центральный момент деформаций $d_{ijmn} \equiv \langle \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{mn} \rangle$. Аналогично разложениям (2.20) и (2.21) условные моменты $\langle \varepsilon \varepsilon \rangle_{\xi_f}$ и $\langle \varepsilon \rangle_{\xi_f}$ будем искать в виде предполагаемых разложений

$$\langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn} \rangle_{\xi_f} \approx f_{ij\alpha\beta}^{(f)} d_{\alpha\beta\varphi\psi}^{\circ}(\xi) \quad (2.22)$$

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle_{\xi_{f_1}} \langle \varepsilon_{mn} \rangle_{\xi_{f_2}} \approx f_{ij\alpha\beta}^{(f_1, f_2)} d_{\alpha\beta\varphi\psi}^{\circ}(\xi) \quad (2.23)$$

где $d^{\circ}(\xi)$ – некоторое неизвестное пока поле локальной координаты ξ . Далее будет показано, что поле $d^{\circ}(\xi)$ может быть исключено из выражения для расчета искомого поля $\mathbf{a}(\xi)$. Отметим, что явный вид поля $d^{\circ}(\xi)$ возможно определить после решения осредненной задачи обобщенного метода самосогласования, например, через найденное поле $\mathbf{D}^{(\varepsilon)}(\xi)$.

В результате из формул (2.18) и (2.19) с учетом принятых разложений (2.22) и (2.23) получим равенства

$$D_{ijmn}^{(\sigma)}(\xi) = k_{ij\alpha\beta}^{(\sigma)}(\xi) d_{\alpha\beta\varphi\psi}^{\circ}(\xi) \quad (2.24)$$

$$D_{ijmn}^{(\varepsilon)}(\xi) = k_{ij\alpha\beta}^{(\varepsilon)}(\xi) d_{\alpha\beta\varphi\psi}^{\circ}(\xi) \quad (2.25)$$

$$k_{ij\alpha\beta}^{(\sigma)}(\xi) \equiv \sum_{f=1}^{F+1} \bar{\omega}_f(\xi) C_{ijpq}^{(f)} C_{mndb}^{(f)} f_{pq\alpha\beta}^{(f)} - \sum_{f_1=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_1}(\xi) C_{ijpq}^{(f_1)} \sum_{f_2=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_2}(\xi) C_{mndb}^{(f_2)} f_{pq\alpha\beta}^{(f_1, f_2)} \quad (2.26)$$

$$k_{ij\alpha\beta}^{(\varepsilon)}(\xi) \equiv \sum_{f=1}^{F+1} \bar{\omega}_f(\xi) f_{ij\alpha\beta}^{(f)} - \sum_{f_1=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_1}(\xi) \sum_{f_2=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_2}(\xi) f_{ij\alpha\beta}^{(f_1, f_2)} \quad (2.27)$$

Таким образом, из формул (2.24)–(2.27) и с учетом того, что поле $\mathbf{a}(\xi)$ вводится разложением

$$D_{ijmn}^{(\sigma)}(\xi) = a_{ij\alpha\beta}(\xi) D_{\alpha\beta\varphi\psi}^{(\varepsilon)}(\xi) \quad (2.28)$$

получим выражение

$$a_{ij\alpha\beta}(\xi) = k_{ijpq}^{(\sigma)}(\xi) k_{pq\alpha\beta}^{(\varepsilon)-1}(\xi) \quad (2.29)$$

для расчета поля $\mathbf{a}(\xi)$, так как поле $d^{\circ}(\xi)$, входящее в формулы (2.22), (2.23) и (2.24), (2.25) может быть представлено в виде

$$d_{ijmn}^{\circ}(\xi) = k_{ij\alpha\beta}^{(\varepsilon)-1}(\xi) D_{\alpha\beta\varphi\psi}^{(\varepsilon)}(\xi) \quad (2.30)$$

через поле $\mathbf{D}^{(\varepsilon)}(\xi)$ (2.25), где $\mathbf{k}^{(\varepsilon)-1}$ – тензор, обратный тензору $\mathbf{k}^{(\varepsilon)}$ (2.27).

Отметим, что тензор $\mathbf{f}^{(f_1, f_2)}$ в (2.23), (2.26) и (2.27) может быть представлен в виде

$$f_{ij\alpha\beta}^{(f_1, f_2)} \equiv N_{ijpq}^{(f_1)} N_{mndb}^{(f_2)} A_{pq\alpha\beta}^{-1} \quad (2.31)$$

где тензоры $\mathbf{N}^{(f)}$ и \mathbf{A} введены разложениями

$$\varepsilon_{ij}^{(f)} \equiv \langle \varepsilon_{ij} \rangle_f = N_{ijmn}^{(f)} \varepsilon_{mn}^* \quad (2.32)$$

$$\langle \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{mn} \rangle = A_{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^* \varepsilon_{\varphi\psi}^* \quad (2.33)$$

Аналогично (2.31) выразим тензор $\mathbf{f}^{(f)}$ в (2.22), (2.26) и (2.27) через тензоры $\mathbf{N}^{(f)}$ (2.32), \mathbf{A} (2.33) и тензоры $\mathbf{A}^{(f)}$, которые введем через разложения

$$\langle \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{mn} \rangle_f \equiv \langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn} \rangle_f - \varepsilon_{ij}^{(f)} \varepsilon_{mn}^{(f)} = A_{ij\alpha\beta}^{(f)} \langle \varepsilon'_{\alpha\beta} \varepsilon'_{\varphi\psi} \rangle \quad (2.34)$$

Из совместного решения уравнений (2.22)–(2.34) получим выражение

$$f_{ij\alpha\beta}^{(f)} \langle \varepsilon'_{\alpha\beta} \varepsilon'_{\varphi\psi} \rangle \equiv A_{ij\alpha\beta}^{(f)} \langle \varepsilon'_{\alpha\beta} \varepsilon'_{\varphi\psi} \rangle + \varepsilon_{ij}^{(f)} \varepsilon_{mn}^{(f)}$$

или с учетом (2.23) и (2.31)–(2.33) в виде

$$f_{ij\alpha\beta}^{(f)} = A_{ij\alpha\beta}^{(f)} + N_{ijpq}^{(f)} N_{mndb}^{(f)} A_{pq\alpha\beta}^{-1} \quad (2.35)$$

Таким образом, поля $\mathbf{k}^{(\sigma)}(\xi)$ (2.26) и $\mathbf{k}^{(e)}(\xi)$ (2.27) примут вид

$$k_{ij\alpha\beta}^{(\sigma)}(\xi) = \sum_{f=1}^{F+1} \bar{\omega}_f(\xi) C_{ijpq}^{(f)} C_{mndb}^{(f)} A_{pq\alpha\beta}^{(f)} + \quad (2.36)$$

$$+ \sum_{f_1=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_1}(\xi) C_{ijpq}^{(f_1)} N_{pq\alpha\beta}^{(f_1)} \left(C_{mndb}^{(f_1)} N_{db\chi\tau}^{(f_1)} - \sum_{f_2=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_2}(\xi) C_{mndb}^{(f_2)} N_{db\chi\tau}^{(f_2)} \right) A_{\omega\alpha\beta}^{-1} \chi\tau\varphi\psi$$

$$k_{ij\alpha\beta}^{(e)}(\xi) = \sum_{f=1}^{F+1} \bar{\omega}_f(\xi) A_{ij\alpha\beta}^{(f)} + \sum_{f_1=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_1}(\xi) N_{ij\omega\tau}^{(f_1)} \left(N_{mn\chi\tau}^{(f_1)} - \sum_{f_2=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_2}(\xi) N_{mn\chi\tau}^{(f_2)} \right) A_{\omega\alpha\beta}^{-1} \chi\tau\varphi\psi \quad (2.37)$$

с учетом разложений (2.31)–(2.35).

В (2.31), (2.35) и (2.36), (2.37) \mathbf{A}^{-1} – тензор, обратный \mathbf{A} (2.33) и для которого выполняется равенство

$$A_{ij\alpha\beta}^{-1} A_{\alpha\beta pq} = E_{ijpq} E_{mndb} \quad (2.38)$$

где $E_{ijmn} = \frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})$ – единичный тензор, δ_{ij} – символы Кронекера. Можно показать [1], что тензоры концентраций осредненных деформаций $\mathbf{N}^{(f)}$ (2.32), (2.36) и (2.37) связаны между собой зависимостью

$$\sum_{f=1}^{F+1} \nu_f N_{ijmn}^{(f)} = E_{ijmn} \quad (2.39)$$

полученной на основе равенства

$$\sum_{f=1}^{F+1} \nu_f \varepsilon_{ij}^{(f)} = \varepsilon_{ij}^* \quad (2.40)$$

где относительное объемное содержание f -й фазы в композите ν_f (1.6).

Аналогично (2.39), получим формулу, связывающую между собой тензоры концентраций дисперсий $\mathbf{A}^{(f)}$ на f -й фазе (2.34). Из равенства

$$\sum_{f=1}^{F+1} \nu_f \langle \epsilon'_{ij} \epsilon'_{mn} \rangle_f = \left[E_{ij\omega\alpha} E_{mn\chi\tau} + \left(E_{ij\alpha\beta} E_{mn\varphi\psi} - \sum_{f=1}^{F+1} \nu_f N_{ij\alpha\beta}^{(f)} N_{mn\varphi\psi}^{(f)} \right) A_{\alpha\beta\omega\tau}^{-1} \right] \langle \epsilon'_{\omega\tau} \epsilon'_{\chi\tau} \rangle \quad (2.41)$$

следует зависимость вида

$$\sum_{f=1}^{F+1} \nu_f A_{mn\chi\tau}^{(f)} = E_{ij\omega\alpha} E_{mn\chi\tau} + \left(E_{ij\alpha\beta} E_{mn\varphi\psi} - \sum_{f=1}^{F+1} \nu_f N_{ij\alpha\beta}^{(f)} N_{mn\varphi\psi}^{(f)} \right) A_{\alpha\beta\omega\tau}^{-1} \quad (2.42)$$

между тензорами $\mathbf{A}^{(f)}$ с учетом (2.39).

Таким образом, из равенств (2.29) и разложений (2.36), (2.37) следует выражение для поля

$$a_{ij\nu\mu}(\xi) = \left[\sum_{f=1}^{F+1} \bar{\omega}_f(\xi) C_{ijpq}^{(f)} C_{mndb}^{(f)} A_{pq\alpha\beta}^{(f)} + \sum_{f_1=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_1}(\xi) C_{ijpq}^{(f_1)} N_{pq\omega\alpha}^{(f_1)} \left(C_{mndb}^{(f_1)} N_{db\chi\tau}^{(f_1)} - \sum_{f_2=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_2}(\xi) C_{mndb}^{(f_2)} N_{db\chi\tau}^{(f_2)} \right) A_{\omega\alpha\beta}^{-1} \right] k_{\alpha\beta\nu\mu}^{(\epsilon)-1}(\xi) \quad (2.43)$$

где $\mathbf{k}^{(\epsilon)-1}$ – тензор, обратный тензору $\mathbf{k}^{(\epsilon)}$ (2.37). Например, когда точка ξ лежит в области f -й фазы $\nu_{(f)}$ одиночного формального включения ν осредненной задачи, тогда имеем $\bar{\omega}_f = 1$ (1.9) и значения тензора \mathbf{a} (2.43) равны

$$a_{ijpq}^{(f)} = C_{ijpq}^{(f)} C_{mndb}^{(f)} \quad (f = \bar{1}, \bar{F}) \quad (2.44)$$

Таким образом, задача вычисления, например, в области f -й фазы включений композита полей дисперсий, корреляционных моментов деформаций $\mathbf{D}^{(\epsilon)}(\xi)$ и напряжений $\mathbf{D}^{(\sigma)}(\xi)$ при известных значениях безусловных дисперсий деформаций $\langle \epsilon' \epsilon' \rangle$ для заданного однородного поля макродеформаций ϵ^* композита сводится к решению осредненной краевой задачи (2.10) с граничными условиями (2.9), которую, например, без учета объемных сил $\mathbf{f}(\xi)$ (2.11) можно записать относительно приведенного поля центральных моментов перемещений $\tilde{\mathbf{u}}(\xi)$ в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[a_{ijpq}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_b} \tilde{u}_{pq}(\xi) \right] = 0 \quad (2.45)$$

с граничными условиями

$$\tilde{u}_{pq} = \langle \epsilon'_{pq} \epsilon'_{db} \rangle \xi_b \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty \quad (2.46)$$

где приведенное поле центральных моментов перемещений

$$\tilde{u}_{pq}(\xi) \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_q^{(1)}} D_{pd}^{(u)}(\xi_1, \xi) |_{\xi_1 \rightarrow \xi} \quad (2.47)$$

Например, центральные моменты деформаций $\mathbf{D}^{(\epsilon)}(\xi)$ и их осредненные по области f -й фазы включений композита значения $\langle \epsilon' \epsilon' \rangle_f$ могут быть рассчитаны через решения $\tilde{\mathbf{u}}(\xi)$ по соответствующим формулам

$$D_{ijmn}^{(\epsilon)}(\xi) = \tilde{u}_{(ij)(mn)}(\xi) \quad (2.48)$$

$$\langle \epsilon_{ij}^{\circ} \epsilon_{mn}^{\circ} \rangle_f = \frac{1}{|v_{(f)}| v_{(f)}} \int D_{ijmn}^{(\epsilon)}(\xi) d\xi \quad (2.49)$$

где $|v_{(f)}|$ – объем области $v_{(f)}$ f -й фазы одиночного формального включения v . Соответствующие (2.33) значения центральных моментов напряжений

$$\langle \sigma_{ij}^{\circ} \sigma_{mn}^{\circ} \rangle_f = \frac{1}{|v_{(f)}| v_{(f)}} \int D_{ijmn}^{(\sigma)}(\xi) d\xi = a_{ijpq}^{(f)} \langle \epsilon_{pq}^{\circ} \epsilon_{db}^{\circ} \rangle_f$$

с учетом (2.28) и (2.44).

Компоненты тензоров $A^{(f)}$ являются параметрами самосогласования при решении краевой задачи (2.45) с граничными условиями (2.46), так как от $A^{(f)}$ зависит поле $a(\xi)$ в (2.45) и $A^{(f)}$ связаны с решением этой задачи $\tilde{u}(\xi)$ зависимостью

$$A_{ijpq}^{(f)} \langle \epsilon'_{pq} \epsilon'_{db} \rangle = \frac{1}{|v_{(f)}| v_{(f)}} \int \tilde{u}_{(ij)}^{(m,n)}(\xi) d\xi \quad (2.50)$$

с учетом (2.34) и (2.49).

Рассмотрим расчет центральных моментов перемещений

$$D^{(u)}(\xi) \equiv D^{(u)}(\xi, \xi)$$

через найденное решение для $\tilde{u}(\xi)$ краевой задачи (2.45), (2.46). Из формулы (2.47) следует равенство

$$\frac{\partial}{\partial \xi_q} D_{pd}^{(u)}(\xi) = \tilde{u}_{pq}^{(u)}(\xi) + \tilde{u}_{dq}^{(u)}(\xi) \quad (2.51)$$

после интегрирования которого с учетом равенства $D^{(u)}(0) = 0$ получим, аналогично известным формулам Чезаро, искомое решение

$$D^{(u)}(\xi) = \int_0^{\xi_1} (D_{,1}^{(u)}(\xi'))_{\xi_2=\xi_3=0} d\xi'_1 + \int_0^{\xi_2} (D_{,2}^{(u)}(\xi'))_{\xi_1=\xi_1, \xi_3=0} d\xi'_2 + \int_0^{\xi_3} (D_{,3}^{(u)}(\xi'))_{\xi_1=\xi_1, \xi_2=\xi_2} d\xi'_3$$

или с учетом (2.35):

$$D_{pd}^{(u)}(\xi) = \int_0^{\xi_1} \left(\tilde{u}_{pd}^{(u)}(\xi') + \tilde{u}_{d1}^{(u)}(\xi') \right)_{\xi_2=\xi_3=0} d\xi'_1 + \int_0^{\xi_2} \left(\tilde{u}_{p2}^{(u)}(\xi') + \tilde{u}_{d2}^{(u)}(\xi') \right)_{\xi_1=\xi_1, \xi_3=0} d\xi'_2 + \int_0^{\xi_3} \left(\tilde{u}_{p3}^{(u)}(\xi') + \tilde{u}_{d3}^{(u)}(\xi') \right)_{\xi_1=\xi_1, \xi_2=\xi_2} d\xi'_3 \quad (2.52)$$

При $|\xi| \rightarrow \infty$ для поля $D^{(u)}(\xi)$ будет выполняться равенство (2.9) вида $D_{pd}^{(u)} = \langle \epsilon'_{pq} \epsilon'_{db} \rangle \xi_q \xi_b$.

3. Сферопластик. Пусть $C^{(f)}$ и C^* – изотропные в пространстве R^3 тензоры с разложениями

$$C_{ijmn}^{(f)} = 3K_{(f)} V_{ijmn} + 2G_{(f)} D_{ijmn} \quad (3.1)$$

$$C_{ijmn}^* = 3K^* V_{ijmn} + 2G^* D_{ijmn}$$

$$V_{ijmn} = 1/3 \delta_{ij} \delta_{mn}, \quad D_{ijmn} = 1/2 (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm} - 2/3 \delta_{ij} \delta_{mn}) \quad (3.2)$$

где V , D – соответственно объемный и девiatorный тензоры; $K_{(f)}$, $G_{(f)}$ – объемный модуль и модуль сдвига f -й фазы для $f = \overline{1, F+1}$; K^* , G^* – эффективные объемный

модуль и модуль сдвига композита. Из условия изотропии тензоров (3.1) следует изотропия тензоров концентраций осредненных деформаций $N^{(f)}$ (2.32) на f -й фазе композита

$$N_{ijmn}^{(f)} = n_V^{(f)} V_{ijmn} + n_D^{(f)} D_{ijmn} \quad (3.3)$$

где $n_V^{(f)}$, $n_D^{(f)}$ – коэффициенты концентраций соответственно объемной и сдвиговой деформаций на f -й фазе.

Тензор концентраций осредненных центральных моментов деформаций $A^{(f)}$ на f -й фазе композита будем искать в виде

$$A_{ijpq\ mndb}^{(f)} = a_{VV}^{(f)} V_{ijpq} V_{mndb} + a_{VD}^{(f)} V_{ijpq} D_{mndb} + a_{DV}^{(f)} D_{ijpq} V_{mndb} + a_{DD}^{(f)} D_{ijpq} D_{mndb} \quad (3.4)$$

через константы разложения $a_{VV}^{(f)}$, ..., $a_{DD}^{(f)}$. Из (2.42), (3.3) и (3.4) следует, что тензор A можно представить аналогичным (3.4) разложением

$$A_{ijpq\ mndb} = a_{VV} V_{ijpq} V_{mndb} + a_{VD} V_{ijpq} D_{mndb} + a_{DV} D_{ijpq} V_{mndb} + a_{DD} D_{ijpq} D_{mndb} \quad (3.5)$$

Константы a_{VV} , ..., a_{DD} считаем известными, так как тензор A введен в (2.33) через известные величины $\langle \epsilon' \epsilon' \rangle$ (1.1) и ϵ^* .

Таким образом, из разложений (3.1)–(3.5) следует, что для рассматриваемого случая тензорное поле $a(\xi)$ в постановке осредненной краевой задачи (2.45) и (2.46) можно представить в виде

$$a_{ijpq\ mndb}(\xi) = 9\bar{a}_{VV}(\xi) V_{ijpq} V_{mndb} + 6\bar{a}_{VD}(\xi) V_{ijpq} D_{mndb} + 6\bar{a}_{DV}(\xi) D_{ijpq} V_{mndb} + 4\bar{a}_{DD}(\xi) D_{ijpq} D_{mndb} \quad (3.6)$$

$$\bar{a}_{VV}(\xi) = k_{VV}^{(\sigma)}(\xi) / k_{VV}^{(\epsilon)}(\xi), \quad \bar{a}_{VD}(\xi) = k_{VD}^{(\sigma)}(\xi) / k_{VD}^{(\epsilon)}(\xi) \quad (3.7)$$

$$\bar{a}_{DV}(\xi) = k_{DV}^{(\sigma)}(\xi) / k_{DV}^{(\epsilon)}(\xi), \quad \bar{a}_{DD}(\xi) = k_{DD}^{(\sigma)}(\xi) / k_{DD}^{(\epsilon)}(\xi)$$

Поля $k_{VV}^{(\sigma)}(\xi)$, ..., $k_{DD}^{(\sigma)}(\xi)$ в (3.7) введены через возможное разложение тензорного поля $k^{(\sigma)}(\xi)$ (2.36) вида

$$k_{ijpq\ mndb}^{(\sigma)}(\xi) = 9k_{VV}^{(\sigma)}(\xi) V_{ijpq} V_{mndb} + 6k_{VD}^{(\sigma)}(\xi) V_{ijpq} D_{mndb} + 6k_{DV}^{(\sigma)}(\xi) D_{ijpq} V_{mndb} + 4k_{DD}^{(\sigma)}(\xi) D_{ijpq} D_{mndb}$$

через скалярные поля

$$k_{VV}^{(\sigma)}(\xi) = \sum_{f=1}^{F+1} \bar{\omega}_f(\xi) (K_{(f)})^2 a_{VV}^{(f)} + \quad (3.8)$$

$$+ \sum_{f_1=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_1}(\xi) K_{(f_1)} n_V^{(f_1)} \left(K_{(f_1)} n_V^{(f_1)} - \sum_{f_2=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_2}(\xi) K_{(f_2)} n_V^{(f_2)} \right) \frac{1}{a_{VV}}$$

$$k_{VD}^{(\sigma)}(\xi) = \sum_{f=1}^{F+1} \bar{\omega}_f(\xi) K_{(f)} G_{(f)} a_{VD}^{(f)} + \quad (3.9)$$

$$+ \sum_{f_1=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_1}(\xi) K_{(f_1)} n_V^{(f_1)} \left(G_{(f_1)} n_D^{(f_1)} - \sum_{f_2=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_2}(\xi) G_{(f_2)} n_D^{(f_2)} \right) \frac{1}{a_{VD}}$$

$$k_{DV}^{(\sigma)}(\xi) = \sum_{f=1}^{F+1} \bar{\omega}_f(\xi) G_{(f)} K_{(f)} a_{DV}^{(f)} + \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{f_1=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_1}(\xi) G_{(f_1)} n_D^{(f_1)} \left(K_{(f_1)} n_V^{(f_1)} - \sum_{f_2=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_2}(\xi) K_{(f_2)} n_V^{(f_2)} \right) \frac{1}{a_{DV}} \\
k_{DD}^{(\sigma)}(\xi) & = \sum_{f=1}^{F+1} \bar{\omega}_f(\xi) (G_{(f)})^2 a_{DD}^{(f)} + \\
& + \sum_{f_1=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_1}(\xi) G_{(f_1)} n_D^{(f_1)} \left(G_{(f_1)} n_D^{(f_1)} - \sum_{f_2=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_2}(\xi) G_{(f_2)} n_D^{(f_2)} \right) \frac{1}{a_{DD}}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Аналогично (3.8)–(3.11) скалярные поля $k_{VV}^{(\varepsilon)}(\xi), \dots, k_{DD}^{(\varepsilon)}(\xi)$ в (3.7) введены через разложение тензорного поля $\mathbf{k}^{(\varepsilon)}(\xi)$ (2.37) вида

$$\begin{aligned}
k_{mndb}^{(\varepsilon)}(\xi) & = k_{VV}^{(\varepsilon)}(\xi) V_{ijpq} V_{mndb} + k_{VD}^{(\varepsilon)}(\xi) V_{ijpq} D_{mndb} + k_{DV}^{(\varepsilon)}(\xi) D_{ijpq} V_{mndb} + k_{DD}^{(\varepsilon)}(\xi) D_{ijpq} D_{mndb} \\
k_{VV}^{(\varepsilon)}(\xi) & = \sum_{f=1}^{F+1} \bar{\omega}_f(\xi) a_{VV}^{(f)} + \sum_{f_1=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_1}(\xi) n_V^{(f_1)} \left(n_V^{(f_1)} - \sum_{f_2=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_2}(\xi) n_V^{(f_2)} \right) \frac{1}{a_{VV}}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$k_{VD}^{(\varepsilon)}(\xi) = \sum_{f=1}^{F+1} \bar{\omega}_f(\xi) a_{VD}^{(f)} + \sum_{f_1=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_1}(\xi) n_V^{(f_1)} \left(n_D^{(f_1)} - \sum_{f_2=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_2}(\xi) n_D^{(f_2)} \right) \frac{1}{a_{VD}} \tag{3.13}$$

$$k_{DV}^{(\varepsilon)}(\xi) = \sum_{f=1}^{F+1} \bar{\omega}_f(\xi) a_{DV}^{(f)} + \sum_{f_1=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_1}(\xi) n_D^{(f_1)} \left(n_V^{(f_1)} - \sum_{f_2=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_2}(\xi) n_V^{(f_2)} \right) \frac{1}{a_{DV}} \tag{3.14}$$

$$k_{DD}^{(\varepsilon)}(\xi) = \sum_{f=1}^{F+1} \bar{\omega}_f(\xi) a_{DD}^{(f)} + \sum_{f_1=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_1}(\xi) n_D^{(f_1)} \left(n_D^{(f_1)} - \sum_{f_2=1}^{F+1} \bar{\omega}_{f_2}(\xi) n_D^{(f_2)} \right) \frac{1}{a_{DD}} \tag{3.15}$$

Отметим, что, например, тензор \mathbf{A}^{-1} в (2.36), (2.37) и (2.38), обратный тензору \mathbf{A} (3.5), можно представить через разложение

$$\mathbf{A}_{mndb}^{-1} = \frac{1}{a_{VV}} V_{ijpq} V_{mndb} + \frac{1}{a_{VD}} V_{ijpq} D_{mndb} + \frac{1}{a_{DV}} D_{ijpq} V_{mndb} + \frac{1}{a_{DD}} D_{ijpq} D_{mndb}$$

Решение краевой задачи (2.45), (2.46) для поля $\tilde{\mathbf{u}}(\xi)$ не должно зависеть от численных значений свободных индексов i, j в уравнении (2.45); однако неучитывание объемных сил $\mathbf{f}(\xi)$ (2.11) в (2.45) и использование приближенного представления (3.4) для тензора $\mathbf{A}^{(f)}$ при вычислении поля $\mathbf{a}(\xi)$ в (2.45) может привести к некоторой зависимости решения $\tilde{\mathbf{u}}(\xi)$ от выбора значений i, j .

Рассмотрим вычисление полей центральных моментов деформаций $\mathbf{D}^{(\varepsilon)}(\xi)$ и напряжений $\mathbf{D}^{(\sigma)}(\xi)$ для частных случаев, например, расчет полей

$$D_{iimn}^{(\varepsilon)}(\xi) = \sum_{i=1}^3 D_{iimn}^{(\varepsilon)}(\xi) \tag{3.16}$$

$$D_{iimn}^{(\sigma)}(\xi) = \sum_{i=1}^3 D_{iimn}^{(\sigma)}(\xi) \tag{3.17}$$

Для рассматриваемого случая (3.16), (3.17) запишем уравнения (2.29) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[a_{mndb}^{ijpq}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_b} \tilde{u}_{pq}(\xi) \right] = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[a_{mndb}^{1111}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_b} \left(\tilde{u}_{11}^I(\xi) + \tilde{u}_{22}^I(\xi) + \tilde{u}_{33}^I(\xi) \right) + 2a_{mndb}^{1122}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_b} \left(\tilde{u}_{11}^I(\xi) + \tilde{u}_{22}^I(\xi) + \tilde{u}_{33}^I(\xi) \right) \right] = 0 \quad (3.18)$$

С учетом симметрии поля $\mathbf{a}(\xi)$ (3.6) $a_{mndb}^{1111} = a_{mndb}^{2222} = a_{mndb}^{3333}$, $a_{mndb}^{1122} = a_{mndb}^{1133} = a_{mndb}^{2211} = a_{mndb}^{2233} = a_{mndb}^{3322} = a_{mndb}^{3311}$.

Таким образом, на основе формул (3.18) и (2.46) приходим к постановке относительно поля перемещений

$$\tilde{u}_d^I(\xi) \equiv \tilde{u}_{ii}^I(\xi) = \tilde{u}_{11}^I(\xi) + \tilde{u}_{22}^I(\xi) + \tilde{u}_{33}^I(\xi) \quad (3.19)$$

первой осредненной краевой задачи теории упругости

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[a_{mndb}^I(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_b} \tilde{u}_d^I(\xi) \right] = 0 \quad (3.20)$$

с граничными условиями

$$\tilde{u}_d^I = \langle \varepsilon'_V \varepsilon'_{db} \rangle \xi_b \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty \quad (3.21)$$

$$\varepsilon'_V(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon'_{ii}(\mathbf{r}) = \varepsilon_V(\mathbf{r}) - \varepsilon_V^* \quad (3.22)$$

где $\varepsilon'_V(\mathbf{r})$ – пульсации относительного изменения объема в произвольной точке \mathbf{r} композита, ε_V^* – относительное изменение макрообъема композита.

Поле упругих свойств $\mathbf{a}^I(\xi)$ в (3.20):

$$a_{mndb}^I(\xi) \equiv a_{11ii}^I(\xi) = a_{1111}^I(\xi) + 2a_{1122}^I(\xi)$$

или

$$a_{mndb}^I(\xi) = 9\bar{a}_{VV}(\xi)V_{mndb} + 6\bar{a}_{VD}(\xi)D_{mndb} \quad (3.23)$$

с учетом разложения (3.6), так как выполняются равенства (3.2) $V_{11ii} = 1$, $D_{11ii} = 0$.

Поля деформаций $\tilde{\varepsilon}^I(\xi)$ и напряжений $\tilde{\sigma}^I(\xi)$, соответствующие решению для поля перемещений $\tilde{\mathbf{u}}^I(\xi)$ осредненной краевой задачи теории упругости (3.20) и (3.21), можно рассчитать по формулам

$$\tilde{\varepsilon}_{db}^I(\xi) = \tilde{u}_{(d,b)}^I(\xi) \quad (3.24)$$

$$\tilde{\sigma}_{mn}^I(\xi) = a_{mndb}^I(\xi) \tilde{\varepsilon}_{db}^I(\xi) \quad (3.25)$$

Искомые поля центральных моментов деформаций $D_{iimn}^{(\varepsilon)}(\xi)$ (3.16) и напряжений $D_{iimn}^{(\sigma)}(\xi)$ (3.17) рассчитываются через решение $\tilde{\mathbf{u}}^I(\xi)$ осредненной краевой задачи (3.20) и (3.21) по формулам

$$D_{iimn}^{(\varepsilon)}(\xi) \equiv \tilde{\varepsilon}_{mn}^I(\xi)$$

$$D_{iimn}^{(\sigma)}(\xi) \equiv \tilde{\sigma}_{mn}^I(\xi) = a_{mndb}^I(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_b} \tilde{u}_d^I(\xi)$$

с учетом зависимостей (3.24) и (3.25).

Определим связь коэффициентов $a_{VV}^{(f)}$ и $a_{VD}^{(f)}$ разложения (3.4) с решением $\bar{\mathbf{u}}^I(\xi)$ осредненной краевой задачи (3.20), (3.21). Из формулы (2.50) с учетом (3.19), (3.24) получим

$$A_{iipq}^{(f)} \langle \varepsilon'_{pq} \varepsilon'_{db} \rangle = \frac{1}{|\mathbf{v}_{(f)}|_{\mathbf{v}_{(f)}}} \int \bar{\varepsilon}_{mn}^I(\xi) d\xi \quad (3.26)$$

Компоненты тензора $\mathbf{A}^{(f)}$ в левой части уравнения (3.26):

$$A_{iipq}^{(f)} = \delta_{pq} (a_{VV}^{(f)} V_{mndb} + a_{VD}^{(f)} D_{mndb}) \quad (3.27)$$

так как в разложении (3.4) выполняются равенства $V_{iipq} = \delta_{pq}$, $D_{iipq} = 0$ для тензоров \mathbf{V} и \mathbf{D} (3.2).

Таким образом, левая часть равенства (3.26) может быть преобразована к виду

$$A_{iipq}^{(f)} \langle \varepsilon'_{pq} \varepsilon'_{db} \rangle = (a_{VV}^{(f)} V_{mndb} + a_{VD}^{(f)} D_{mndb}) \langle \varepsilon'_{ii} \varepsilon'_{db} \rangle \quad (3.28)$$

следовательно формула (3.26) с учетом (3.2), (3.22), (3.27) и (3.28) примет вид

$$\frac{1}{3} a_{VV}^{(f)} \delta_{mn} \langle \varepsilon'_{ii} \varepsilon'_{db} \rangle + a_{VD}^{(f)} D_{mndb} \langle \varepsilon'_{ii} \varepsilon'_{db} \rangle = \frac{1}{|\mathbf{v}_{(f)}|_{\mathbf{v}_{(f)}}} \int \bar{\varepsilon}_{mn}^I(\xi) d\xi \quad (3.29)$$

Заменив в (3.29) свободные индексы mn последовательно на tt и, например, на 12, получим

$$a_{VV}^{(f)} \langle \varepsilon'_{ii} \varepsilon'_{ii} \rangle = \frac{1}{|\mathbf{v}_{(f)}|_{\mathbf{v}_{(f)}}} \int \bar{\varepsilon}_{ii}^I(\xi) d\xi$$

$$\frac{1}{2} a_{VD}^{(f)} \langle \varepsilon'_{ii} \gamma'_{12} \rangle = \frac{1}{|\mathbf{v}_{(f)}|_{\mathbf{v}_{(f)}}} \int \bar{\varepsilon}_{12}^I(\xi) d\xi$$

В итоге приходим к выражениям

$$a_{VV}^{(f)} = \int_{\mathbf{v}_{(f)}} \bar{\varepsilon}_{ii}^I(\xi) d\xi / (|\mathbf{v}_{(f)}| \langle \varepsilon'_{ii} \varepsilon'_{ii} \rangle) \quad (3.30)$$

$$a_{VD}^{(f)} = \int_{\mathbf{v}_{(f)}} \bar{\gamma}_{12}^I(\xi) d\xi / (|\mathbf{v}_{(f)}| \langle \varepsilon'_{ii} \gamma'_{12} \rangle) \quad (3.31)$$

где $\bar{\varepsilon}_{ii}^I \equiv \bar{\varepsilon}_{ii}^I$ – величина относительного изменения объема в точке ξ расчетной области осредненной краевой задачи (3.20), (3.21).

Таким образом, коэффициенты $a_{VV}^{(f)}$ и $a_{VD}^{(f)}$ в качестве параметров самосогласования входят в скалярные поля соответственно $\bar{a}_{VV}(\xi)$ и $\bar{a}_{VD}(\xi)$ (3.7), (3.8), (3.9), (3.12) и (3.13), формирующих поле упругих свойств $\mathbf{a}^I(\xi)$ (3.23) первой осредненной краевой задачи теории упругости (3.20), (3.21); при этом коэффициенты $a_{VV}^{(f)}$ и $a_{VD}^{(f)}$ вычисляются по формулам (3.30) и (3.31) через решение этой же краевой задачи, что приводит к ее физической нелинейности.

Аналогично (3.16)–(3.31), могут быть определены поля центральных моментов деформаций $D_{12mn}^{(e)}(\xi)$, напряжений $D_{12mn}^{(\sigma)}(\xi)$ и константы $a_{DV}^{(f)}$ и $a_{DD}^{(f)}$ разложения (3.4). Уравнение (2.45) представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[a_{12pq}^{(e)}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_b} \bar{u}_{pq}(\xi) \right] = 0$$

ИЛИ

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[a_{1212}^{mndb}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_b} \left(\tilde{u}_{12}^d(\xi) + \tilde{u}_{21}^d(\xi) \right) \right] = 0 \quad (3.32)$$

с учетом симметрии (3.6) $a_{1212}^{mndb} = a_{1221}^{mndb}$. От (2.46), (3.32) перейдем к постановке относительно поля перемещений

$$\tilde{u}_d^{\text{II}}(\xi) \equiv \tilde{u}_{12}^d(\xi) + \tilde{u}_{21}^d(\xi) \quad (3.33)$$

второй осредненной краевой задачи теории упругости

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n} \left[a_{mndb}^{\text{II}}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_b} \tilde{u}_d^{\text{II}}(\xi) \right] = 0 \quad (3.34)$$

с граничными условиями

$$\tilde{u}_d^{\text{II}} = \langle \gamma'_{12} \epsilon'_{db} \rangle \xi_b \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty \quad (3.35)$$

Поле упругих свойств $a^{\text{II}}(\xi)$ в (3.34):

$$a_{mndb}^{\text{II}}(\xi) \equiv a_{1212}^{\text{II}}(\xi) = 3\bar{a}_{DV}(\xi)V_{mndb} + 2\bar{a}_{DD}(\xi)D_{mndb} \quad (3.36)$$

с учетом разложения (3.6), так как выполняются равенства (3.2) $V_{1212} = 0, D_{1212} = 1/2$.

Поля деформаций $\tilde{\epsilon}^{\text{II}}(\xi)$ и напряжений $\tilde{\sigma}^{\text{II}}(\xi)$, соответствующие решению для поля перемещений $\tilde{u}^{\text{II}}(\xi)$ осредненной краевой задачи теории упругости (3.34) и (3.35), можно рассчитать по формулам

$$\tilde{\epsilon}_{db}^{\text{II}}(\xi) = \tilde{u}_{(d,b)}^{\text{II}}(\xi) \quad (3.37)$$

$$\tilde{\sigma}_{mn}^{\text{II}}(\xi) = a_{mndb}^{\text{II}}(\xi) \tilde{\epsilon}_{db}^{\text{II}}(\xi) \quad (3.38)$$

Искомые поля центральных моментов деформаций и напряжений с учетом зависимостей (3.37) и (3.38) имеют вид

$$D_{12mn}^{(\epsilon)}(\xi) \equiv 1/2 \tilde{\epsilon}_{mn}^{\text{II}}(\xi), \quad D_{12mn}^{(\sigma)}(\xi) \equiv \tilde{\sigma}_{mn}^{\text{II}}(\xi) = a_{mndb}^{\text{II}}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_b} \tilde{u}_d^{\text{II}}(\xi)$$

Определим связь коэффициентов $a_{DV}^{(f)}$ и $a_{DD}^{(f)}$ разложения (3.4) с решением $\tilde{u}^{\text{II}}(\xi)$ осредненной краевой задачи (3.34), (3.35). Из формулы (2.50) с учетом (3.33) и (3.37) получим

$$A_{12pq}^{(f)} \langle \epsilon'_{pq} \epsilon'_{db} \rangle = \frac{1}{2 |\mathbf{v}_{(f)}| v_{(f)}} \int \tilde{\epsilon}_{mn}^{\text{II}}(\xi) d\xi \quad (3.39)$$

Левая часть формулы (3.39) может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} A_{12pq}^{(f)} \langle \epsilon'_{pq} \epsilon'_{db} \rangle &= 2A_{1212}^{(f)} \langle \epsilon'_{12} \epsilon'_{db} \rangle = A_{1212}^{(f)} \langle \gamma'_{12} \epsilon'_{db} \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left(a_{DV}^{(f)} V_{mndb} + a_{DD}^{(f)} D_{mndb} \right) \langle \gamma'_{12} \epsilon'_{db} \rangle \end{aligned}$$

Следовательно формула (3.39) примет вид

$$\frac{1}{3} a_{DV}^{(f)} \delta_{mn} \langle \gamma'_{12} \epsilon'_{db} \rangle + a_{DD}^{(f)} D_{mndb} \langle \gamma'_{12} \epsilon'_{db} \rangle = \frac{1}{|\mathbf{v}_{(f)}| v_{(f)}} \int \tilde{\epsilon}_{mn}^{\text{II}}(\xi) d\xi \quad (3.40)$$

Заменив в (3.40) свободные индексы mn последовательно на mt и на 12 , получим

$$a_{DV}^{(f)} = \int_{v(f)} \tilde{\varepsilon}_V^{\text{II}}(\xi) d\xi / (|\mathbf{v}_{(f)}| \langle \gamma'_{12} \varepsilon'_V \rangle) \quad (3.41)$$

$$a_{DD}^{(f)} = \int_{v(f)} \tilde{\gamma}_{12}^{\text{II}}(\xi) d\xi / (|\mathbf{v}_{(f)}| \langle \gamma'_{12} \gamma'_{12} \rangle) \quad (3.42)$$

Таким образом, коэффициенты $a_{DV}^{(f)}$ и $a_{DD}^{(f)}$ являются параметрами самосогласования второй осредненной краевой задачи теории упругости (3.34) и (3.35), так как поле упругих свойств $\mathbf{a}^{\text{II}}(\xi)$ зависит от коэффициентов $a_{DV}^{(f)}$ и $a_{DD}^{(f)}$ (3.7), (3.10), (3.11), (3.14), (3.15), (3.36) и вычисляются через решение этой же краевой задачи по формулам (3.41) и (3.42). Вторая осредненная краевая задача (3.34), (3.35) так же, как и первая (3.20), (3.21) является физически нелинейной. Отметим, что решения первой и второй осредненных краевых задач вычисляются независимо друг от друга.

После решения осредненных задач (3.20), (3.21) и (3.34), (3.35) относительно полей $\tilde{\mathbf{u}}^{\text{I}}(\xi)$ и $\tilde{\mathbf{u}}^{\text{II}}(\xi)$ и последующего вычисления коэффициентов $a_{DV}^{(f)}$, $a_{DD}^{(f)}$ (3.30), (3.31) и $a_{DV}^{(f)}$, $a_{DD}^{(f)}$ (3.41), (3.42) искомые осредненные по области f -й фазы композита центральные моменты деформаций с учетом (2.34) и (3.4) могут быть рассчитаны по формулам

$$\langle \varepsilon'_V \varepsilon'_V \rangle_f = a_{VV}^{(f)} \langle \varepsilon'_V \varepsilon'_V \rangle, \quad \langle \gamma'_{12} \gamma'_{12} \rangle_f = a_{DD}^{(f)} \langle \gamma'_{12} \gamma'_{12} \rangle$$

$$\langle \varepsilon'_V \gamma'_{12} \rangle_f = a_{VD}^{(f)} \langle \varepsilon'_V \gamma'_{12} \rangle \quad (3.43)$$

$$\langle \gamma'_{12} \varepsilon'_V \rangle_f = a_{DV}^{(f)} \langle \gamma'_{12} \varepsilon'_V \rangle \quad (3.44)$$

Из (3.43) и (3.44) следует свойство симметрии для коэффициентов

$$a_{VD}^{(f)} = a_{DV}^{(f)} \quad (3.45)$$

Однако, равенство (3.45) будет выполняться лишь приближенно, что обусловлено неучитыванием объемных сил $\mathbf{f}(\xi)$ (2.11) в (2.45) и принятой аппроксимацией (3.4) для тензора $\mathbf{A}^{(f)}$.

Расчетные схемы первой (3.20), (3.21) и второй (3.34), (3.35) осредненных краевых задач теории упругости – это одиночное включение с неоднородным переходным слоем в однородной неограниченной среде при заданном на бесконечности всестороннем растяжении или сдвиге. Упругие свойства этого одиночного включения \mathbf{v} , переходного слоя и неограниченной среды для первой и второй краевых задач различны и определяются соответственно полями $\mathbf{a}^{\text{I}}(\xi)$ (3.23) и $\mathbf{a}^{\text{II}}(\xi)$ (3.36). Упругие свойства фаз одиночного включения $\mathbf{v}_{(f)}$ ($f = \overline{1, F}$) и среды не равны соответственно упругим свойствам включений композита $\mathbf{C}^{(f)}$ и эффективным упругим свойствам композита \mathbf{C}^* , в отличие от расчетной схемы задачи эффективного модуля [1]. Под переходным слоем подразумевается локальная область неоднородности поля упругих свойств $\mathbf{a}^{\text{I}}(\xi)$ или $\mathbf{a}^{\text{II}}(\xi)$ осредненной краевой задачи вокруг одиночного включения \mathbf{v} . Размер переходного слоя соизмерим с радиусом корреляции случайной структуры композита. Упругие свойства переходного слоя учитывают особенности случайного взаимного расположения включений в композите. Граничные условия, а именно величины всестороннего растяжения или сдвига среды на бесконечности для первой и второй краевых задач также различны и рассчитываются по соответствующим формулам (3.21) или (3.35).

Отметим, что тензоры концентраций осредненных деформаций на фазах композита $\mathbf{N}^{(f)}$, входящие в определяющие соотношения первой и второй осредненных

краевых задач, определяются из решения соответствующей независимой осредненной краевой задачи обобщенного метода самосогласования [1] при расчете тензора эффективных упругих свойств C^* композита.

4. Численный расчет. Рассмотрим композит с полыми сферическими включениями, когда $F = 2$ и межфазные поверхности являются концентрическими сферическими поверхностями, $q \equiv R_1/R_2$ – отношение внутреннего радиуса включения R_1 к наружному R_2 . При $q = 0$ полость во включении отсутствует. Модули Юнга $E_{(f)}$ и коэффициенты Пуассона $\nu_{(f)}$ фаз включений ($f = \overline{1,2}$) равны: $E_{(1)} = \nu_{(1)} = 0$ и $E_{(2)} = 20 E_M$, $\nu_{(2)} = 0.2$; для матрицы модуль Юнга $E_M = 1$ ГПа и коэффициент Пуассона $\nu_M = 0.4$.

Представленный алгоритм расчета (3.1)–(3.45) предполагает, что тензор A (2.33) известен и при численных расчетах этот тензор зададим, например, в “нулевом” приближении

$$A_{ijpq} = \sum_{f=1}^{F+1} \nu_f N_{ijpq}^{(f)} N_{mndb}^{(f)} - E_{ijpq} E_{mndb} \quad (4.1)$$

что соответствует предположению о равенстве нулю центральных моментов деформаций в фазах композита. Отметим, что вид тензора A незначительно влияет на значения искомых тензоров $A^{(f)}$; действительные значения компонент тензора A должны быть несколько больше, чем это следует из формулы (4.1). Расчет тензоров $N^{(f)}$ приведен в [1].

В табл. 1 представлены результаты расчета при $q = 1.8$ параметров

Таблица 1

ν_0	$a_{VV}^{(2)}$	$a_{VD}^{(2)}$	$a_{DV}^{(2)}$	$a_{DD}^{(2)}$	d_V	d_D	$d_V^{(2)}(\kappa_V^{(2)})$	$d_D^{(2)}(\kappa_D^{(2)})$
0.2	0.418	0.204	0.176	0.095	0.048	0.093	0.020 (0.359)	0.009 (0.469)
0.3	0.490	0.236	0.218	0.116	0.070	0.137	0.034 (0.439)	0.016 (0.562)
0.4	0.530	0.256	0.258	0.135	0.089	0.179	0.047 (0.485)	0.024 (0.619)
0.5	0.478	0.251	0.288	0.149	0.106	0.220	0.051 (0.472)	0.033 (0.648)

самосогласования $a_{VV}^{(2)}, \dots, a_{DD}^{(2)}$, нормированных безусловных дисперсий

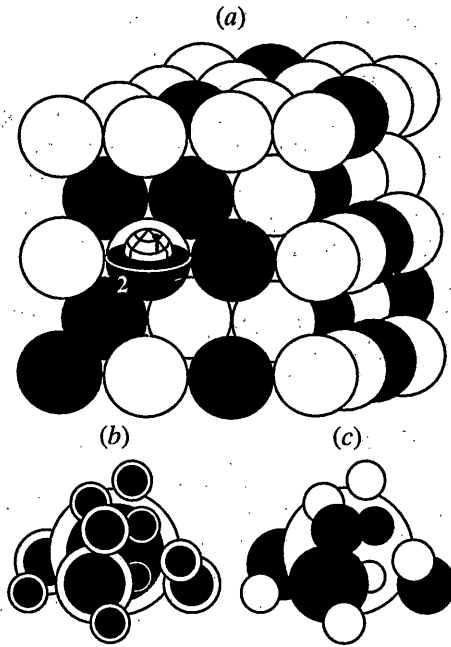
$$d_V \equiv \frac{\langle (\epsilon_V')^2 \rangle}{(\epsilon_V^*)^2}, \quad d_D \equiv \frac{\langle (\gamma_{12}')^2 \rangle}{(\gamma_{12}^*)^2}$$

и нормированных дисперсий

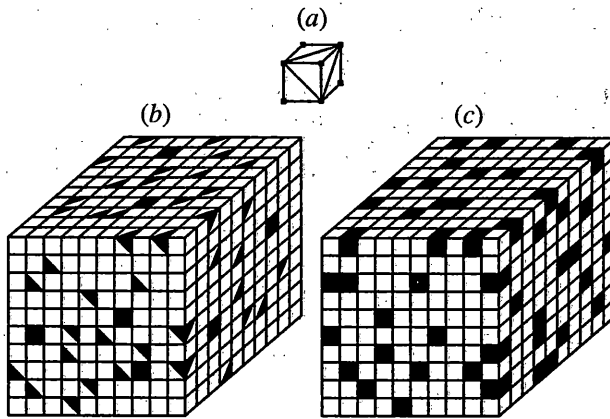
$$d_V^{(2)} \equiv \frac{\langle (\epsilon_V^\circ)^2 \rangle_2}{(\epsilon_V^*)^2}, \quad d_D^{(2)} \equiv \frac{\langle (\gamma_{12}^\circ)^2 \rangle_2}{(\gamma_{12}^*)^2}$$

во 2-й жесткой фазе полого включения для модели случайной структуры, основанной на гексагональной плотно-упакованной укладке сферических ячеек (фиг. 1, а). На фиг. 1, а цифрами 1, 2 отмечены фазы включения. В круглых скобках в табл. 1 представлены соответствующие значения коэффициентов вариации деформаций (напряжений) во 2-й фазе включений

$$\kappa_V^{(2)} = \frac{\sqrt{\langle (\epsilon_V^\circ)^2 \rangle_2}}{n_V^{(2)} \epsilon_V^*}, \quad \kappa_D^{(2)} = \frac{\sqrt{\langle (\gamma_{12}^\circ)^2 \rangle_2}}{n_D^{(2)} \gamma_{12}^*} \quad (4.2)$$

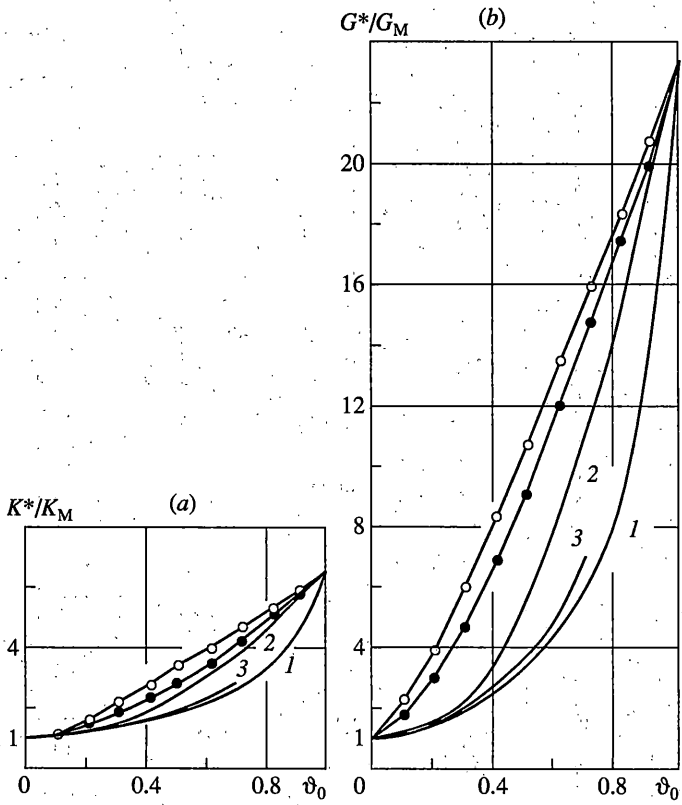


Фиг. 1

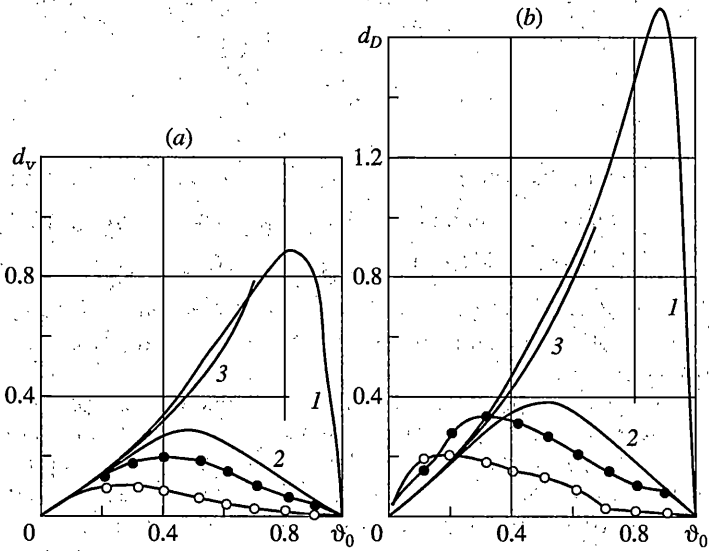


Фиг. 2

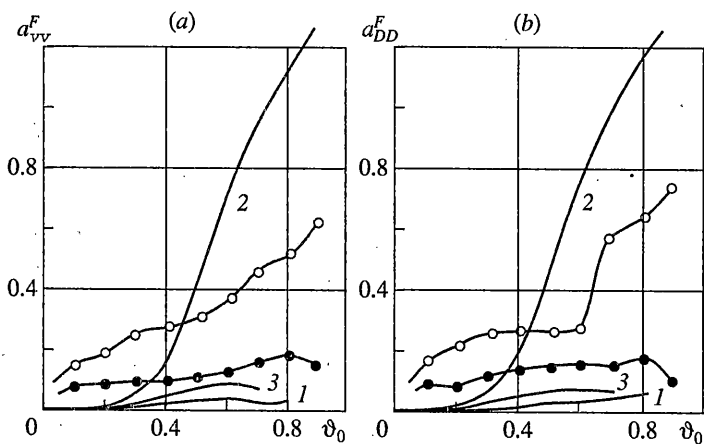
Для использованной модели случайной структуры композита (фиг. 1, *a*) вероятность появления свободных от включений ячеек рассчитывалась через заданную величину относительного объемного содержания полых сферических включений ν_0 в композите при минимальной гарантированной прослойке между включениями в 2% от радиуса ячейки. Значения величин ν_1 и ν_2 могут быть рассчитаны по формулам $\nu_1 = q^3 \nu_0$, $\nu_2 = (1 - q^3) \nu_0$. Все включения имеют одинаковые размеры, центры включений и соответствующих ячеек совпадают. При численном решении осредненных краевых задач переходный сферический слой дискретизировался на 50 тонких concentрических сферических слоев.



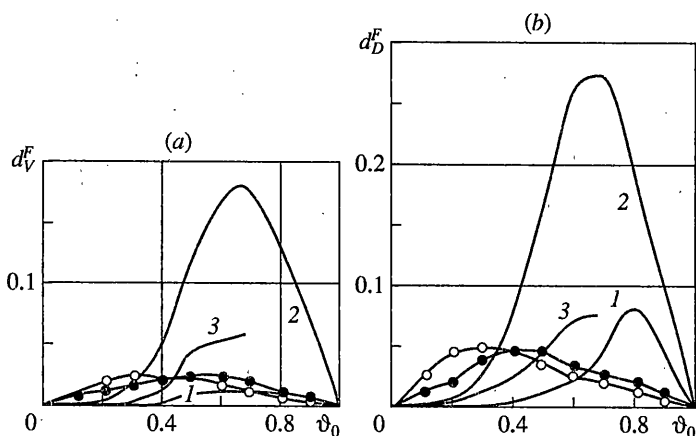
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Дисперсии напряжений $\langle\langle\sigma^\circ\rangle^2\rangle_2$ и $\langle\langle\tau_{12}^\circ\rangle^2\rangle_2$ могут быть рассчитаны через соответствующие численные значения дисперсий деформаций $\langle\langle\varepsilon_V^\circ\rangle^2\rangle_2$ и $\langle\langle\gamma_{12}^\circ\rangle^2\rangle_2$ по формулам $\langle\langle\sigma^\circ\rangle^2\rangle_2 = (K_{(2)})^2 \langle\langle\varepsilon_V^\circ\rangle^2\rangle_2$, $\langle\langle\tau_{12}^\circ\rangle^2\rangle_2 = (G_{(2)})^2 \langle\langle\gamma_{12}^\circ\rangle^2\rangle_2$; коэффициенты вариации $\varkappa_V^{(2)}, \varkappa_D^{(2)}$ (4.2) для деформаций ε_V и γ_{12} тождественны коэффициентам вариации соответствующих напряжений σ и τ_{12} во 2-й жесткой фазе полых сферических включений композита.

Для оценки точности разработанного подхода проводилось сравнение численных результатов обобщенного метода самосогласования для композитов с монодисперсными (фиг. 1, a) и полидисперсными (фиг. 1, b, c) структурами из шаровых включений при $q = 0$ с результатами метода конечных элементов для зернистых композитов, расчетные области которых изображены на фиг. 2, b, c. Представительная область (фиг. 2, b, c) в форме куба была представлена совокупностью 6000 конечных элементов (тетраэдров) на основе равномерной сетки из кубических ячеек, включающих в себя 6 тетраэдров (фиг. 2, a). В каждом тетраэдральном конечном элементе напря-

жения и деформации полагались однородными. Структура на фиг. 2, *b* получена присвоением произвольному тетраэдру из представительной области зернистого композита значений упругих свойств включений или матрицы соответственно с вероятностями ν_0 и $1 - \nu_0$, где ν_0 – относительное объемное содержание включений в композите. Аналогично, структура на фиг. 2, *c* получена присвоением произвольной кубической ячейке, включающей в себя 6 конечных элементов, из представительной области свойств включений с вероятностью ν_0 . Чистый сдвиг на макроуровне представительных областей задавали растяжением и сжатием вдоль осей r_1 и r_2 соответственно.

На фиг. 3–6 представлены результаты расчета эффективных упругих модулей (фиг. 3); нормированных безусловных дисперсий (фиг. 4), коэффициентов концентраций дисперсий на включениях (фиг. 5) и нормированные условные дисперсии на включениях (фиг. 6) для композитов с монодисперсными (фиг. 1, *a*) и полидисперсными (фиг. 1, *b, c*) структурами из шаровых включений при $q = 0$ и для зернистых композитов (фиг. 2, *b, c*); индекс $f = 2$ заменен на F . Светлые и темные точки обозначают на фиг. 3–6 зернистые структуры, изображенные на фиг. 2, *b, c* включениями в форме тетраэдров и на фиг. 2, *b, c* включениями в форме кубов соответственно. Кривые 1 и 2 построены для полидисперсных моделей структур (фиг. 1, *b, c*), которые соответствуют кусочно-постоянным аппроксимациям осредненных индикаторных функций

$$\bar{\omega}_1(\xi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\xi| \leq R_1 \\ 0, & R_1 < |\xi| \leq R \\ \nu_1, & |\xi| > R \end{cases}, \quad \bar{\omega}_2(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\xi| \leq R_1 \\ 1, & R_1 < |\xi| \leq R_2 \\ 0, & R_2 < |\xi| \leq R \\ \nu_2, & |\xi| > R \end{cases} \quad (4.3)$$

для аппроксимации 1 (фиг. 1, *b*) и

$$\bar{\omega}_1(\xi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\xi| \leq R_1 \\ 0, & R_1 < |\xi| \leq R_2 \\ \nu_1, & |\xi| > R_2 \end{cases}, \quad \bar{\omega}_2(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |\xi| \leq R_1 \\ 1, & R_1 < |\xi| \leq R_2 \\ \nu_2, & |\xi| > R_2 \end{cases}$$

для аппроксимации 2 (фиг. 1, *c*); величина R в (4.3) определяется из равенства $(R_2/R)^3 = \nu_0$. Случайной структуре на фиг. 1, *a* соответствует кривая 3 на фиг. 3–6 и дополнительно численные значения в табл. 2 для коэффициентов вариации объемных κ_V^F и сдвиговых κ_D^F деформаций, тождественных соответствующим коэффициентам вариации напряжений, во включениях композита.

Таблица 2

κ	$\nu_0 = 0.2$	$\nu_0 = 0.3$	$\nu_0 = 0.4$	$\nu_0 = 0.5$	$\nu_0 = 0.6$	$\nu_0 = 0.7$
κ_V^F	0.180	0.266	0.369	0.476	0.573	0.583
κ_D^F	0.405	0.540	0.650	0.724	0.771	0.784

Таким образом, структуры с тетраэдральными (фиг. 2, *b*), с кубическими (фиг. 2, *c*) и с полидисперсными шаровыми (фиг. 1, *c*) включениями при увеличении относительного объемного содержания включений ν_0 образуют кластеры; свойство “кластерности” более сильно проявляется для структуры с тетраэдральными, далее для

структур с кубическими и полидисперсными шаровыми включениями. В этой же последовательности имеем уменьшение эффективных жесткостей композитов на фиг. 3 и увеличение со сдвигом вправо максимальных значений для нормированных безусловных дисперсий на фиг. 4. Структуры с монодисперсными (фиг. 1, *a*) и полидисперсными (фиг. 1, *b*) шаровыми включениями кластеров из включений не образуют и сохраняют свойство матричности до предельно допустимых значений наполнения ν_0 и, как следствие, имеем для таких композитов сравнительно низкие значения на фиг. 3. Отметим, что значения K^* и G^* , рассчитанные методом конечных элементов (фиг. 3), лежат вблизи верхней границы Хашина-Штрикмана [4, 7], что обусловлено способностью моделируемых зернистых структур (фиг. 2) образовывать непрерывные кластеры при сравнительно небольших значениях ν_0 наполнения жесткой фазой и однородностью деформаций в пределах зерен (тетраэдральных конечных элементов).

На фиг. 5 рассчитанные для кластерных композитов на фиг. 1, *c* и фиг. 2, *b* значения коэффициентов концентраций дисперсий для тетраэдральных включений близки к значениям для полидисперсных шаровых включений (2). Для композитов с кубическими включениями, для которых свойство кластерности выражено менее сильно, чем для тетраэдральных включений, рассчитанные значения коэффициентов концентраций дисперсий лежат вблизи кривых (1) и (3) для матричных композитов.

Работа выполнена при финансовой поддержке по гранту РФФИ–Урал № 01-01-96479.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Паньков А.А. Анализ эффективных упругих свойств композитов со случайными структурами обобщенным методом самосогласования // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 3. С. 68–76.
2. Pan'kov A.A. A self-consistent statistical mechanics approach for determining effective elastic properties of composites // Theoret. and Appl. Fract. Mech. 1999. V. 31. № 3. P. 157–161.
3. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. 139 с.
4. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
5. Богачев И.Н., Вайнштейн А.А., Волков С.Д. Статистическое металловедение. М.: Металлургия, 1984. 176 с.
6. Соколкин Ю.В., Волкова Т.А. Многоточечные моментные функции распределения деформаций и напряжений в стохастических композитах // Механика композит. материалов. 1991. № 4. С. 662–669.
7. Композиционные материалы. Т. 2. Механика композиционных материалов // Под ред. Дж. Сендечки. М.: Мир, 1978. 564 с. (Composite materials: In 8 vols. (V. 2. Mechanics of Composite Materials. / Ed. by G.P. Sendeckyj. N.Y. Acad. Press, 1974))
8. Torquato S. Random heterogeneous media: microstructure and improved bounds on effective properties // Appl. Mech. Reviews. 1991. V. 44. № 2. P. 37–76.
9. Benveniste Y., Dvorak G.J., Chen T. Stress fields in composites with coated inclusions // Mech. of Mater. 1989. V. 7. № 4. P. 305–317.
10. Zhao Xing-Hua, Chen W.F. Influence of interface layer on microstructural stresses in mortar // Intern. J. Numer. Analyt. Methods in Geomech. 1996. V. 20. № 3. P. 215–228.

Пермь

Поступила в редакцию
14.02.2000