

УДК 539.3

© 2002 г. В.А. БАБЕШКО, П.В. СЫРОМЯТНИКОВ

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ СИМВОЛА ФУРЬЕ МАТРИЦЫ ГРИНА МНОГОСЛОЙНОГО ЭЛЕКТРОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Метод, разработанный ранее для изотропного многослойного полупространства с плоскопараллельными границами раздела слоев, обобщен на случай электроупругого многослойного полупространства. Однородные электроупругие слои и подстилающее полупространство могут обладать произвольной электроупругой анизотропией. Метод устойчив в том числе и в области высоких частот. В рамках метода сопоставлена применимость и корректность известных принципов излучения: принципа Зоммерфельда, принципа предельного поглощения и принципа, основанного на анализе поверхностей медленностей объемных волн. В отличие от изотропного случая, выбор условия излучения может иметь принципиальное значение.

В монографии [1] разработан устойчивый алгоритм построения символа Фурье матрицы Грина многослойного изотропного полупространства, не содержащий растущих экспонент ни на одном из этапов вычислений. Предлагаемый метод является обобщением данного алгоритма на случай электроупругих сред.

Рассматриваемые вопросы актуальны при теоретическом и численном анализе волновых процессов в многослойных упругих изотропных, анизотропных и электроупругих средах: в сейсмологии¹, акустоэлектронике [2], разработке композитных материалов и т.д.

Сейсмическая анизотропия отражает наличие порядка в среде, что может быть связано с различными направленными процессами в литосфере Земли: влиянием начальных напряжений, ориентацией кристаллов и структур, пустых и жидких включений и т.д. Наблюдения показывают более сложный характер сейсмической анизотропии по сравнению с традиционной поперечно-изотропной моделью. Удовлетворительное описание можно получить в рамках многослойной ортотропной (ортотромбической), поперечно-изотропной и изотропной модели.

С точки зрения акустоэлектроники интерес к тематике преобразователей с использованием многослойных структур [2, 3] объясняется их некоторыми новыми специфическими в сравнении с однородными подложками свойствами, перспективными в техническом отношении.

В первой части предлагаемой статьи подробно описан алгоритм построения символа матрицы Грина однородного полупространства с произвольной электроупругой анизотропией, основанный на формализме, аналогичном предложенному в [4, 5], и отличный от методов, разработанных в [1, 6, 7]. Особое внимание при этом уделено сопоставлению известных принципов излучения: принципа Зоммерфельда [1], принципа предельного поглощения [7] и принципа, основанного на анализе поверхностей медленностей объемных волн [8]. Во второй части описан собственно метод построения символа матрицы Грина многослойного пьезоэлектрического полупространства. В третьей части статьи приведены численные примеры для однородного электроупругого полупространства, в четвертой – для двухслойного электроупругого и трехслойного анизотропного полупространства.

¹ Сейсмическая анизотропия. Результаты. Проблемы. Возможности. – Второе Международное Рабочее Сопоставление. – Программа и тезисы докладов. Москва; 1986. 77 с.

1. Постановка задачи. Символ Фурье матрицы Грина однородного электроупругого полупространства. Пусть пьезоэлектрическое полупространство занимает объем $-\infty \leq x_1, x_2 \leq \infty, x_3 \leq 0$, вакуум $-\infty \leq x_1, x_2 \leq \infty, x_3 \geq 0$. Гармонические колебания среды возбуждаются поверхностными механическими и / или электрическими нагрузками, действующими в ограниченной области Ω плоскости $x_3 = 0$.

В квазистатическом приближении [9] электроупругие гармонические колебания пьезоэлектрической среды описываются следующими уравнениями (общий множитель $\exp(-i\omega t)$ всюду опущен):

$$\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} + \rho \omega^2 u_j = 0, \quad \sigma_{ji} = C_{ji}^{kn} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - e_{kji} E_k, \quad \frac{\partial D_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.1)$$

$$D_j = e_{jkn} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} + \varepsilon_{jk} E_k, \quad E_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (i, j, k, n = \overline{1,3})$$

Здесь σ_{ij} – тензор напряжений, \mathbf{u} – вектор перемещений, \mathbf{D} – вектор электрической индукции, C_{kn}^{ij} – тензор модулей упругости, e_{kji} – пьезоэлектрический тензор, ε_{ij} – тензор диэлектрической проницаемости, ρ – плотность пьезоэлектрика, ω – круговая частота, \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля, ϕ – электрический потенциал.

Электрический потенциал в вакууме ϕ^0 удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla \phi^0 = 0 \quad (1.2)$$

$$E_i^0 = -\partial \phi^0 / \partial x_i, \quad D_i^0 = \varepsilon_0 E_i^0, \quad x_3 > 0 \quad (i = \overline{1,3})$$

Здесь E^0 – напряженность электрического поля в вакууме, \mathbf{D}^0 – вектор электрической индукции в вакууме, ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума.

Граничные условия в плоскости $x_3 = 0$ имеют вид

$$\phi^0 = \phi, \quad -\infty \leq x_1, x_2 \leq \infty \quad (1.3)$$

$$D_3 - D_3^0 = e_{3kn} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \varepsilon_{3k} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} + \varepsilon_0 \frac{\partial \phi^0}{\partial x_3} = 0 \quad (x_1, x_2) \in \overline{\Omega} \quad (1.4)$$

$$\sigma_{j3} = C_{kn}^{j3} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} + e_{kj3} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \overline{\Omega} \quad (j, k, n = \overline{1,3}) \quad (1.5)$$

Под штампами задаются смещения f_i и/или потенциал f_4 :

$$u_i = f_i, \quad \phi = f_4; \quad (x_1, x_2) \in \Omega \quad (i = \overline{1,3}) \quad (1.6)$$

Для однозначной разрешимости задачи (1.1) – (1.6) необходимо выполнение условий убывания на бесконечности

$$\mathbf{u}, \phi, \phi^0 \rightarrow 0, \quad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \rightarrow \infty \quad (1.7)$$

или условий излучения, описываемых ниже.

Методами преобразований Фурье краевая задача (1.1) – (1.7) приводится к решению систем двумерных интегральных уравнений [10] следующего вида:

$$\iint_{\Omega} k_{ij}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q_j(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = f_i(x_1, x_2) \quad (1.8)$$

$$(x_1, x_2) \in \Omega \quad (i, j = \overline{1,4})$$

$$\mathbf{k}(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (1.9)$$

$$\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) = F_{x_1 x_2} [\mathbf{k}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{k}(x_1, x_2) \exp(i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) dx_1 dx_2 \quad (1.10)$$

где q_1, q_2, q_3 – контактные напряжения, q_4 – плотность поверхностных зарядов; \mathbf{k} – матрица Грина полупространства; \mathbf{K} – двукратное преобразование Фурье \mathbf{k} по x_1, x_2 (символ матрицы Грина), Γ_1, Γ_2 – контуры интегрирования, частично отклоняющиеся от вещественных осей при обходе точек ветвления и полюсов \mathbf{K} в соответствии с принципом предельного поглощения [7].

Опишем схему построения матрицы Грина, которая позволяет получить интегральное уравнение (1.8). Применяя двукратное преобразование Фурье к уравнениям (1.1), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно четырехкомпонентного вектора:

$\bar{\mathbf{U}} = F_{x_1 x_2} [\mathbf{u}] = \{U_1; U_2; U_3; U_4\}$ – символа вектора перемещений $\{U_1, U_2, U_3\}$ и потенциала $\Phi = U_4$:

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{U}} + i\mathbf{B}\bar{\mathbf{U}}' - \mathbf{G}\bar{\mathbf{U}}'' = 0 \quad (1.11)$$

$$A_{js} = -C_{rj}^{ns} \alpha_r \alpha_n + \delta_{js} \rho \omega^2 \quad (r, n = 1, 2; j, k, s, m = \overline{1, 3}) \quad (1.12)$$

$$A_{p4} = A_{4p} = -e_{rpn} \alpha_n \alpha_r, \quad A_{44} = \varepsilon_{nr} \alpha_n \alpha_r$$

$$B_{jk} = -\alpha_n (C_{3j}^{kn} + C_{nj}^{k3}), \quad G_{jk} = -C_{3j}^{3k}$$

$$B_{m4} = B_{4m} = -\alpha_n (e_{3mn} + e_{nm3}), \quad G_{m4} = G_{4m} = -e_{3m3}$$

$$B_{44} = 2\alpha_n \varepsilon_{3n}, \quad G_{44} = \varepsilon_{33}$$

Здесь $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{G}$ – симметричные матрицы, δ_{js} – символ Кронекера. Умножая выражение (1.11) слева на \mathbf{G}^{-1} относительно вектора $\bar{\mathbf{U}} = \{U_1, \dots, U_4, U_1', \dots, U_4'\}$ можно получить систему первого порядка

$$d\bar{\mathbf{U}}/dx_3 = \mathbf{M}\bar{\mathbf{U}} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{M} = \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{O} & \vdots & \mathbf{I} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{G}^{-1}\mathbf{A} & \vdots & i\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B} \end{array} \right\| \quad (1.14)$$

где \mathbf{I}, \mathbf{O} – единичная и нулевая матрицы.

Решение системы (1.13) приводит к проблеме на собственные значения вида:

$$(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{h} = 0 \quad (1.15)$$

Образуем из собственных чисел λ_i и собственных векторов h_i матрицы \mathbf{M} (1.14) матрицу \mathbf{L} :

$$\mathbf{L}(x_3) = \{\mathbf{h}_1 \exp(\lambda_1 x_3), \dots, \mathbf{h}_8 \exp(\lambda_8 x_3)\} \quad (1.16)$$

столбцы которой являются фундаментальной системой решений (1.13) (предполагается, что канонический вид \mathbf{M} не содержит жордановых клеток выше первого порядка, кратность λ_i при этом может быть произвольной).

Проблема (1.15) может быть сведена к эквивалентной проблеме с вещественной матрицей $\tilde{\mathbf{M}}$:

$$(\tilde{\mathbf{M}} - \tilde{\lambda} \mathbf{I})\tilde{\mathbf{h}} = 0 \quad (1.17)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \vdots & \mathbf{I} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{A} & \vdots & \mathbf{G}^{-1}\mathbf{B} \end{vmatrix} \quad (1.18)$$

$$\tilde{\lambda} = -i\lambda, \quad \tilde{\mathbf{h}} = \begin{vmatrix} i\mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{vmatrix} \mathbf{h} \quad (1.19)$$

Матрица \mathbf{K} является решением вспомогательной задачи: \mathbf{K} должна удовлетворять матричному уравнению (1.11), однородным граничным условиям на поверхности слоя $x_3 = 0$:

$$\mathbf{R} \begin{vmatrix} \mathbf{K}(0) \\ \mathbf{K}'_{x_3}(0) \end{vmatrix} = \mathbf{I} \quad (1.20)$$

(матрица \mathbf{R} описывается далее) и в соответствии с условием (1.7) стремиться к нулю при $x_3 \rightarrow \infty$

$$\lim_{x_3 \rightarrow -\infty} \mathbf{K}(x_3) = 0 \quad (1.21)$$

Последнее условие означает, что из восьми решений (1.16) необходимо оставить четыре, которые удовлетворяют условию убывания на бесконечности (в частности, при $x_3 \rightarrow -\infty$) или одному из принципов излучения, рассматриваемых ниже.

Очевидно, что решение (1.13):

$$\mathbf{U}_m = \mathbf{h}_m \exp(\lambda_m x_3) \quad (1.22)$$

с $\text{Re} \lambda_m < 0$ не удовлетворяет условию (1.7) при $x_3 \rightarrow -\infty$ и его необходимо отбросить, те же \mathbf{U}_m , для которых $\text{Re} \lambda_m > 0$, удовлетворяют (1.7).

При $\text{Re} \lambda_m = 0$ ситуация сложнее и необходимо привлечь принципы излучения.

Согласно принципу Зоммерфельда [1], условиям убывания или излучения удовлетворяют те решения \mathbf{U}_m (1.22), для которых выполняется (в случае полупространства $x_3 \leq 0$) соотношение

$$\left. \begin{array}{l} \text{Re} \lambda_m > 0 \quad (\text{Re} \lambda_m \neq 0) \\ \text{Im} \lambda_m < 0 \quad (\text{Re} \lambda_m = 0) \end{array} \right\} \leftrightarrow x_3 \leq 0 \quad (1.23)$$

Те λ_m , которые не удовлетворяют данным условиям, очевидно будут удовлетворять обратным к ним

$$\left. \begin{array}{l} \text{Re} \lambda_m < 0 \quad (\text{Re} \lambda_m \neq 0) \\ \text{Im} \lambda_m > 0 \quad (\text{Re} \lambda_m = 0) \end{array} \right\} \leftrightarrow x_3 \geq 0 \quad (1.24)$$

формулирующим условия убывания или излучения для полупространства, занимающего объем $-\infty \leq x_1, x_2 \leq \infty, 0 \geq x_3$.

Характеристический многочлен матрицы $\tilde{\mathbf{M}}$ (1.18):

$$\det(\tilde{\mathbf{M}} - \tilde{\lambda}\mathbf{I}) = \sum_{j=0}^8 a_j \tilde{\lambda}^j = \det(\mathbf{A} - \tilde{\lambda}\mathbf{B} + \tilde{\lambda}^2\mathbf{G}) / \det(\mathbf{G}) \quad (1.25)$$

как многочлен восьмой степени с действительными коэффициентами может иметь четное число чисто действительных корней и комплексно сопряженных. В силу (1.19) чисто действительным $\tilde{\lambda}_j$ соответствуют чисто мнимые λ_j , комплексно сопряженной паре $\tilde{\lambda}_j$ соответствует пара λ_j с разными знаками действительной части: одно из них будет удовлетворять (1.23), другое – (1.24).

Таким образом, любой набор корней (1.25) имеет равное число λ с положительной и отрицательной действительной частью, однако, чисто мнимых решений разных знаков может быть разное число и они могут быть сопряжены (но общее их число четно). Это обстоятельство отмечается в работах [11, 12] для чисто упругого случая, когда плоскость среза кристалла не является плоскостью симметрии. Там же указывается на способ отбора чисто мнимых λ , связанный с направлением нормали к поверхности $\text{Im}\lambda$, определяющим в свою очередь направление переноса энергии [8].

Именно, если угол между внешней нормалью n к поверхности $\text{Im}\lambda_j$ и осью OX_3 обозначить через $n_{x_3}(\text{Im}\lambda_j)$, то условия

$$\left. \begin{array}{l} \text{Re}\lambda_j > 0 \quad (\text{Re}\lambda_j \neq 0) \\ n_{x_3}(\text{Im}\lambda_j) > \frac{1}{2}\pi \quad (\text{Re}\lambda_j = 0) \end{array} \right\} \leftrightarrow x_3 \leq 0 \quad (1.26)$$

определяют принцип отбора λ_j для полупространства $x_3 \leq 0$, а условия

$$\left. \begin{array}{l} \text{Re}\lambda_j < 0 \quad (\text{Re}\lambda_j \neq 0) \\ n_{x_3}(\text{Im}\lambda_j) < \frac{1}{2}\pi \quad (\text{Re}\lambda_j = 0) \end{array} \right\} \leftrightarrow x_3 \geq 0 \quad (1.27)$$

определяют принцип отбора λ_j для полупространства $x_3 \geq 0$. Случай $n_{x_3}(\text{Im}\lambda_j) = \frac{1}{2}\pi$ соответствует кратному значению λ_j .

Для отбора чисто мнимых λ_m можно также использовать принцип предельного поглощения [7]: введение комплексной частоты $\omega_\varepsilon = \omega^2 + i\varepsilon\omega/\rho$, ($\varepsilon > 0$), соответствующей малому внутреннему трению, придает всем возмущенным $\lambda_m(\varepsilon)$ ненулевую действительную часть для любых α_1, α_2 . В конечном решении оставляются λ_m , являющиеся соответствующими пределами $\lambda_m(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Сами же $\lambda_m(\varepsilon)$ определяются из (1.23), (1.24), так как $\text{Re}\lambda_m(\varepsilon) \neq 0$. Итак, согласно принципу предельного поглощения, условия, определяющие принцип отбора λ_j для полупространства $x_3 \leq 0$, формулируются следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Re}\lambda_m(\varepsilon) > 0, \quad \varepsilon > 0 \\ \lambda_m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\lambda_m(\varepsilon)) \end{array} \right\} \leftrightarrow x_3 \leq 0 \quad (1.28)$$

а условия

$$\left. \begin{array}{l} \text{Re}\lambda_m(\varepsilon) < 0, \quad \varepsilon > 0 \\ \lambda_m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\lambda_m(\varepsilon)) \end{array} \right\} \leftrightarrow x_3 \geq 0 \quad (1.29)$$

определяют принцип отбора λ_j для полупространства $x_3 \geq 0$.

Далее, уравнение (1.20) соответствует следующим граничным условиям:

$$F_{x_1 x_2}[\sigma_{j3}] = 1, \quad F_{x_1 x_2}[D_3 - D_3^0] = 1, \quad x_3 = 0 \quad (j = \overline{1,3}) \quad (1.30)$$

Матрица \mathbf{R} в (1.20) получена преобразованием $F_{x_1 x_2}$ из выражений (1.2)–(1.5):

$$R_{jk} = -i\alpha_n C_{j3}^{kn}, \quad R_{j(k+4)} = C_{j3}^{k3} \quad (1.31)$$

$$R_{j4} = -i\alpha_n e_{nj3}, \quad R_{j8} = e_{3j3}$$

$$R_{4j} = -i\alpha_n e_{3nj}, \quad R_{44} = -\alpha\varepsilon_0 + i\varepsilon_{3n}\alpha_n$$

$$R_{48} = -\varepsilon_{33}, \quad R_{4(k+4)} = e_{33k}$$

$$\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \quad (j, k = \overline{1,3}; n = 1, 2)$$

Будем искать \mathbf{K} в виде линейных комбинаций столбцов \mathbf{L} :

$$K_{ij} = L_{in}(x_3)N_{nj} \quad (i, j, n = \overline{1,4}) \quad (1.32)$$

с неизвестной матрицей \mathbf{N} .

Уравнение для матрицы \mathbf{N} имеет вид

$$R_{jk}L_{ki}(0)N_{im} = \delta_{jm} \quad (i, j, m = \overline{1,4}; k = \overline{1,8}) \quad (1.33)$$

Обозначим через $\mathbf{\Delta}$ матрицу с элементами

$$\Delta_{jk} = R_{jn}L_{nk}(0) \quad (j, k = \overline{1,4}; n = \overline{1,8}) \quad (1.34)$$

Из формул (1.33), (1.34) \mathbf{N} выражается следующим образом:

$$\mathbf{N} = \mathbf{\Delta}^{-1} \quad (1.35)$$

что и завершает построение \mathbf{K} для однородного полупространства.

2. Символ Фурье матрицы Грина многослойного полупространства. Пусть полупространство представляет собой однородные слои $\{-\infty \leq x_1, x_2 \leq \infty; z_{n+1} \leq z \leq z_n; n = \overline{1, N}; z_1 = 0; z_{N+1} = -\infty\}$ (в данном пункте обозначим $x_3 = z$) с упругими, электроупругими, диэлектрическими тензорами $C_{ijnk}^{(n)}$, $e_{ijk}^{(n)}$, $\epsilon_{ij}^{(n)}$ и плотностью $\rho^{(n)}$.

В каждом слое искомым вектор \mathbf{U}_n , имеющий вид, аналогичный (1.22), можно представить следующим образом:

$$\mathbf{U}_n = \sum_{s=1}^8 t_{n,s} \mathbf{h}_{n,x} \exp(\lambda_{n,s} z) \quad (n = \overline{1, N}) \quad (2.1)$$

В соответствии с условиями (1.21) и (1.28) при $n = N$ полагаем

$$t_{N,5} = t_{N,6} = t_{N,7} = t_{N,8} = 0 \quad (2.2)$$

На границах раздела слоев условия непрерывности смещений, потенциала, напряжений и нормальной компоненты электрической индукции в матричной форме принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_n \mathbf{U}_n(z_{n+1}) &= \mathbf{R}_{n+1} \mathbf{U}_{n+1}(z_{n+1}) \\ U_{n,j}(z_{n+1}) &= U_{n+1,j}(z_{n+1}) \quad (j = \overline{1,4}; n = \overline{1, N-1}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где \mathbf{R}_n определяется из (1.31). Для всех плоскостей раздела, отличных от $z = 0$, соответствующая компонента $R_{n,44} = i\epsilon_{3m}^{(n)}\alpha_m$ ($m = \overline{1,2}; n = \overline{1, N}$); в выражении $R_{1,44}$, соответствующем $z_1 = 0$, присутствует добавочный член $(-\alpha\epsilon_0)$: $R_{1,44} = -\alpha\epsilon_0 + i\epsilon_{3m}^{(1)}\alpha_m$, что определяется требованиями (1.3), (1.4).

Относительно неизвестных векторов \mathbf{t}_n равенства (2.3) приводят к линейным алгебраическим уравнениям

$$\mathbf{C}_n(z_{n+1})\mathbf{t}_n - \mathbf{C}_{n+1}(z_{n+1})\mathbf{t}_{n+1} = 0 \quad (n = \overline{1, N-1}) \quad (2.4)$$

с матрицами $\mathbf{C}_n(z)$ размерности 8×8 :

$$\mathbf{C}_n(z) = \begin{vmatrix} \mathbf{R}_n \mathbf{H}_n \\ \tilde{\mathbf{H}}_n \end{vmatrix} \mathbf{E}^{(n)}(z) = \mathbf{C}_n(0) \mathbf{E}^{(n)}(z) \quad (2.5)$$

$$H_{n,ij} = h_{ij} \quad (i, j = \overline{1,8}); \quad \tilde{H}_{n,ij} = h_{ij} \quad (i = \overline{1,4}; j = \overline{1,8}) \quad (2.6)$$

экспонент из матриц C_n :

$$C_n(z_{n+1})\mathbf{t}_n = \exp(\lambda_{n,1}z_{n+1})C_n(0)\tilde{S}_n$$

$$C_{n+1}(z_{n+1})\mathbf{t}_{n+1} = \exp(\lambda_{n+1,1}z_{n+1})C_{n+1}(0)E_{n+1}\tilde{S}_{n+1} \quad (2.17)$$

где E_{n+1} диагональная матрица 8×8 с элементами (E_N – матрица 4×4):

$$e_{ii} = \exp((\lambda_{n+1,1} - \lambda_{n+1,i})(z_{n+2} - z_{n+1})) \quad (i = \overline{1,8}) \quad (2.18)$$

Так как $\operatorname{Re} \lambda_{n+1,1} \geq \operatorname{Re} \lambda_{n+1,j}$, и $z_{n+2} - z_{n+1} < 0$, то элементы E_{n+1} по модулю не превышают единицы.

Ниже описывается аналогичный приведенному в [1] алгоритм построения символа матрицы Грина, полученный на основе указанной замены и не содержащий растущих экспонент ни на одном из этапов.

$$D_n = C_n^{-1}(0)C_{n+1}(0)E_{n+1} \quad (n = \overline{1, N-1}) \quad (N \geq 2) \quad (2.19)$$

$$D = D_1 D_2 \dots D_{N-2} D_{N-1}, \quad S_N = (SGD)^{-1} \mathbf{e}_k = D_N \mathbf{e}_k \quad (k = \overline{1,4})$$

$$S_n = D_n S_{n+1} \quad (n = \overline{N-1,1}), \quad U_n(z) = H_n Y_n(z) S_n$$

Здесь матрица Y_n имеет размерность 8×8 (матрица Y имеет размерность 4×4):

$$y_{ii} = \exp((\lambda_{n,i}z + (\lambda_{n,1} - \lambda_{n,i})z_{n+1} - \sum_n)) \quad (i = \overline{1,8}) \quad (2.20)$$

$$\sum_n = \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_{k+1,1} - \lambda_{k,1})z_{k+1}, \quad \sum_1 = 0$$

$$S_n = \tilde{S}_n \exp(\sum_n)$$

матрица H_n определена в (2.6), а G – в (2.16) со значением $n = 1$.

Последнюю формулу (2.19) можно записать следующим образом:

$$U_n(z) = H_n Y_n(z) D_n D_{n+1} \dots D_{N-1} D_N \mathbf{e}_k \quad (2.21)$$

Вектору \mathbf{e}_k соответствует столбец матрицы Грина, поэтому для слоя n :

$$K(z) = H_n Y_n(z) D_n D_{n+1} \dots D_{N-1} D_N, \quad z_{n+1} \leq z \leq z_n \quad (2.22)$$

Обозначим через \tilde{D}_n матрицу

$$\tilde{D}_n(z) = \tilde{Y}_n D_n D_{n+1} \dots D_{N-1} D_N \quad (2.23)$$

где \tilde{Y}_n – диагональная матрица 8×8 с элементами

$$\tilde{y}_{ii} = \exp((\lambda_{n,1} - \lambda_{n,i})z_{n+1} - \sum_n) \quad (i = \overline{1,8}) \quad (2.24)$$

Теперь формула (2.22) приобретает окончательный вид

$$K(z) = K^{(n)}(z) = H_n E^{(n)}(z) \tilde{D}_n, \quad z_{n+1} \leq z \leq z_n \quad (2.25)$$

Символ вектор-функции Грина V для потенциала в вакууме над полупространством ($0 \leq z$) $\Phi^0 = F_{x_1 x_2}[\varphi^0]$ выражается из следующего соотношения:

$$\Phi^0(\alpha_1, \alpha_2, z) = V_m(\alpha_1, \alpha_2, z) Q_m(\alpha_1, \alpha_2) K_{4m}^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2, z) |_{z=0} \exp(-\alpha z) Q_m(\alpha_1, \alpha_2) \quad (2.26)$$

$$(m = \overline{1,4})$$

Через \mathbf{K} и $Q_j = F_{x_1 x_2} [q_j]$ можно записать интегральное представление решения задачи (1.1)–(1.7) для многослойного полупространства

$$u_m(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Gamma_1 \Gamma_2} K_{mj}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) Q_j(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (2.27)$$

$$(m, j = \overline{1, 4})$$

Свойства \mathbf{K} и методы решения систем, аналогичных (1.8), исследуются в [6, 1, 7, 10].

3. Численные примеры для однородного полупространства. Рассмотрим действие принципов излучения (1.23), (1.24), (1.26)–(1.29) при построении матрицы Грина однородного или многослойного пьезоэлектрического полупространства для случая Y -среза ниобата лития (LiNbO_3) в качестве подстилающего полупространства. В данной работе использовались следующие значения материальных констант [9]: $C_{11} = 2.03$, $C_{12} = 0.53$, $C_{13} = 0.75$, $C_{14} = 0.09$, $C_{33} = 2.45$, $C_{44} = 0.6 \times 10^{11}$ Н/м², $e_{15} = 3.7$, $e_{22} = 2.5$, $e_{31} = 0.2$, $e_{33} = 1.3$ Кл/м², $\epsilon_{11} = 38.9$, $\epsilon_{33} = 25.7$, $\epsilon_0 = 0.885 \times 10^{-11}$ Ф/м, $\rho = 4700$ кг/м³.

В выбранной для данного кристалла кристаллофизической системе координат ось OX_1 совпадает с осью OZ , ось OX_3 – с осью OY , ось OX_2 – с осью OX .

Обозначим четыре решения, удовлетворяющие условиям излучения (1.28) или (1.26) в нижней полуплоскости через λ_i^- и через λ_i^+ , удовлетворяющие (1.29) или (1.27), в верхней полуплоскости. Обозначим через κ_i границы областей проекций на плоскость $O\alpha_1\alpha_2$ чисто мнимых поверхностей $\text{Im} \lambda_i^\pm$, через κ_i^0 – линии пересечения $\text{Im} \lambda_i^\pm$ с плоскостью $O\alpha_1\alpha_2$. Начиная со значения $\alpha = \kappa_i$ мнимые части $\text{Im} \lambda_i^+ = \text{Im} \lambda_i^-$ и появляются действительные части противоположных знаков $\text{Re} \lambda_i^+ = -\text{Re} \lambda_i^-$.

Для $\alpha \rightarrow \infty$ асимптотически λ_i^\pm приближаются к некоторым комплексным прямым. Для λ_i с ненулевой действительной частью всегда имеется λ_i с действительной частью противоположного знака ($\text{Re} \lambda_i$ соответствует мнимой части корня многочлена (1.25), имеющего комплексносопряженную пару).

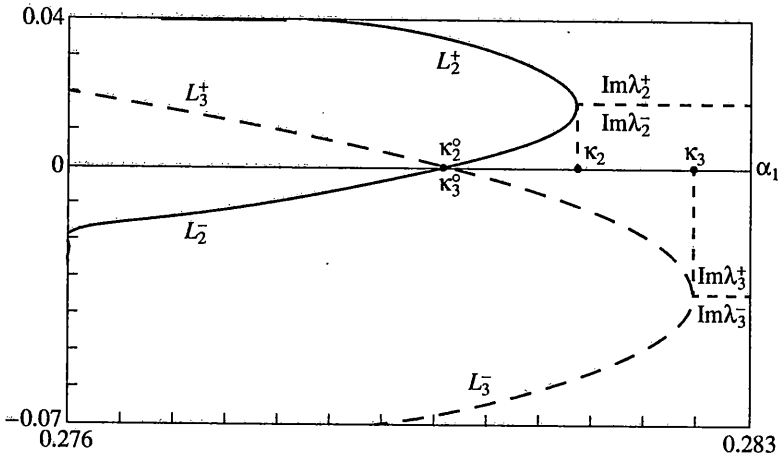
На фиг. 1 (YZ -срез) показаны медленности объемных волн L_i^\pm (или мнимые части λ_i^\pm для $\omega = 1$), L_1^\pm соответствует продольной волне, L_2^\pm соответствует квазипоперечной с поляризацией в плоскости симметрии $OYZ \leftrightarrow (OX_1X_3)$, L_3^\pm – квазипоперечной с поляризацией, перпендикулярной плоскости симметрии.

Остановимся на применимости принципа Зоммерфельда в формулировке (1.23), (1.24) и принципов (1.26)–(1.29) для данного случая.

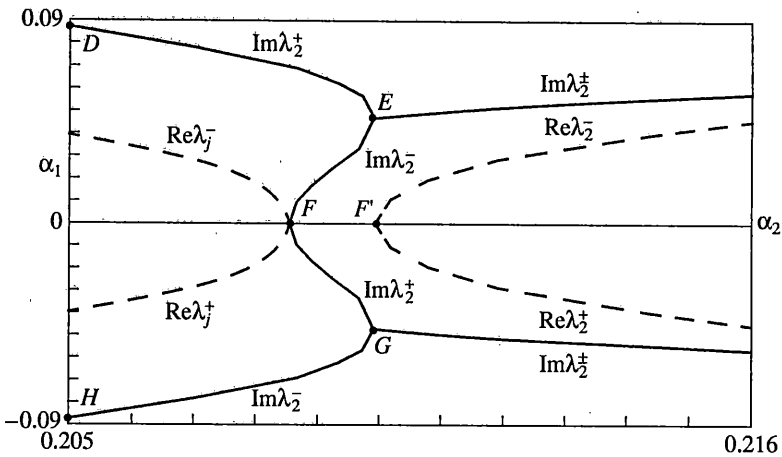
Согласно правилам (1.26)–(1.29) на участке $\kappa_2^0 \leq \alpha \leq \kappa_3$ необходимо выбрать значения L_2^-, L_3^- , что противоречит принципу Зоммерфельда (1.23): для получения решения \mathbf{K} (1.10) во всем диапазоне $\kappa_2^0 \leq \alpha \leq \kappa_3$, необходимо рассматривать меньшее значение $\text{Im} \lambda_2$ (обозначаемое L_2^-), которое может быть и положительным. В то же время из двух отрицательных на данном участке значений L_3^\pm однозначный выбор λ_i^\pm согласно правилу (1.23)–(1.24) сделать нельзя.

Таким образом, в случае появления волновых чисел одного знака, соответствующих одному типу волн, однозначный выбор λ_j согласно принципу Зоммерфельда в формулировке (1.23), (1.24) в данном случае невозможен.

Согласно [11, 12] принцип Зоммерфельда (1.23), (1.24) применим, когда плоскость среза является плоскостью симметрии (так как для каждого λ_j существует $(-\lambda_j)$ с противоположным знаком). Однако и при таком условии принцип может не сраба-



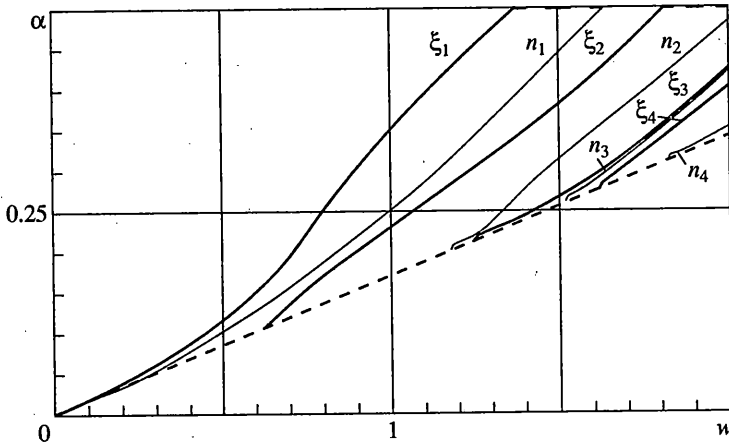
Фиг. 1



Фиг. 2

тывать. При рассмотрении фиг. 2, соответствующей случаю YX -среза, к этому требованию необходимо добавить достаточное (но не необходимое) условие выпуклости поверхностей медленности: действительно, хотя кривые λ_j локально симметричны относительно плоскости среза (точнее, симметричны относительно оси $O\alpha_2$, но в данном случае это непринципально, т.к. на оси $O\alpha_2$ отклонения от плоскости рисунка вектора пространственной нормали \mathbf{n} к поверхностям $\text{Im}\lambda_j$ не превышают 2.5° и не влияют на знак величины $(n_{x_3} - \pi/2)$, входящей в (1.26), (1.27)), на интервале (F, F') , где кривая (D, E, F, G, H) невыпукла, значениям $\text{Im}\lambda_2^-$ должен соответствовать участок кривой (F, G) , в то время как согласно принципам излучения (1.26) и (1.28) значениям $\text{Im}\lambda_2^-$ на интервале (F, F') соответствует участок (F, E) .

“Необходимость” выпуклости поверхностей медленности из применимости принципа Зоммерфельда не следует, так как для той же фиг. 2 принцип (1.23), (1.24) даст правильный результат, если плоскость среза повернуть, например, на $\pm 1/2\pi$ относительно оси OX_1 .



Фиг. 3

Таким образом, в случае строго выпуклых поверхностей медленности объемных волн для плоскостей среза, являющихся плоскостями симметрии кристалла, все три принципа дадут одинаковые результаты. При наличии особенностей указанных поверхностей необходимо привлечение либо принципа предельного поглощения (1.28), (1.29), либо принципа (1.26), (1.27), основанного на анализе кривизны поверхностей медленности.

Введение пьезоэффекта не вносит дополнительных проблем в отношении применения принципов излучения, поскольку два решения λ_4^+, λ_4^- , обусловленные наличием пьезоэффекта, для всех $\alpha \neq 0$ имеют действительные части противоположных знаков (при $\alpha = 0$, $\text{Im } \omega = 0$ появляются два нулевых собственных значения $\lambda_4^\pm = 0$ и шесть мнимых).

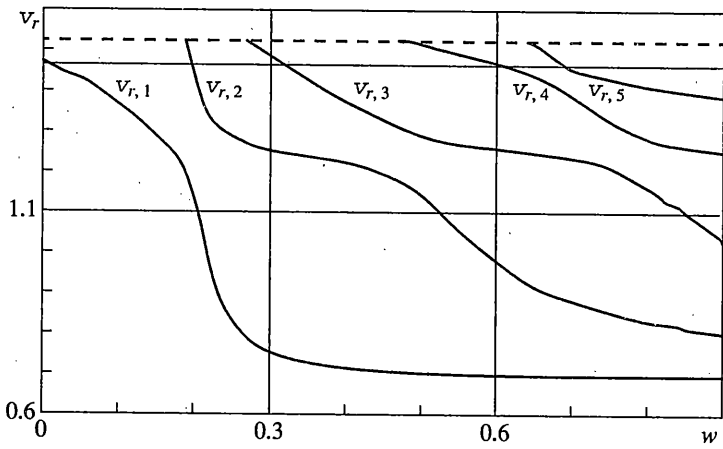
4. Численные примеры для многослойного полупространства. Приведенные в данном пункте расчеты носят модельный характер. В качестве примера из области акустоэлектроники рассматривалась структура из часто используемых в технике преобразователей на ПАВ материалов [3]: слой арсенида галлия (GaAs, Z-срез) на подложке (полупространстве) из сапфира ($\alpha - \text{Al}_2\text{O}_3$, Z-срез) со следующими значениями материальных констант [13]:

GaAs: $C_{11} = 1.188$, $C_{12} = 0.538$, $C_{44} = 0.594 \times 10^{11}$ Н/м², $\epsilon_{ii} = 11.094 \times 10^{-11}$ Ф/м, $e_{14} = 0.154$ Кл/м², $\rho = 5316$ кг/м³, $h = 10^{-2}$ м;

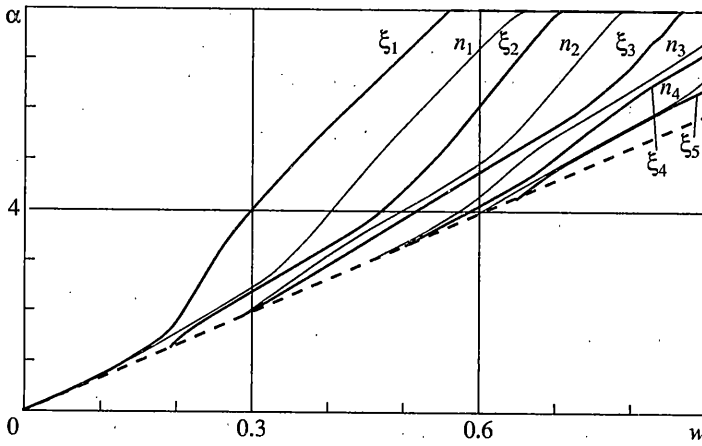
Al_2O_3 : $C_{11} = 4.968$, $C_{12} = 1.636$, $C_{13} = 1.109$, $C_{14} = 0.235$, $C_{33} = 4.981$, $C_{44} = 1.474 \times 10^{11}$ Н/м², $\epsilon_{11} = 7.6146$, $\epsilon_{33} = 9.3412 \times 10^{-11}$ Ф/м, $\rho = 3974$ кг/м³.

Кристаллофизические координаты совпадают с кристаллографическими координатами обоих кристаллов. В качестве характерных величин были взяты следующие: $l_0 = 10^{-3}$ м, $f_0 = 10^6$ Гц, $m_0 = 10^{-4}$ кг, $\varphi_0 = 10^8$ В. Для безразмерной частоты $w = \omega/f_0 = 2\pi f/f_0$ на фиг. 3 показаны полюса ξ_k (жирные линии) и нули n_k (тонкие линии) элемента матрицы $K_{33}^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2, w)|_{z=0}$ (2.25) для $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 0$. В данном случае ξ_k описывают волны релеевского типа, распространяющиеся вдоль оси OX_1 . Прямая штриховая линия, являющаяся прямой выхода нулей и полюсов, определяется скоростью сдвиговых волн в подложке. Фазовые скорости волн релеевского типа $v_{r,k} = v_0 w / \xi_k$ [км/с] изображены на фиг. 4.

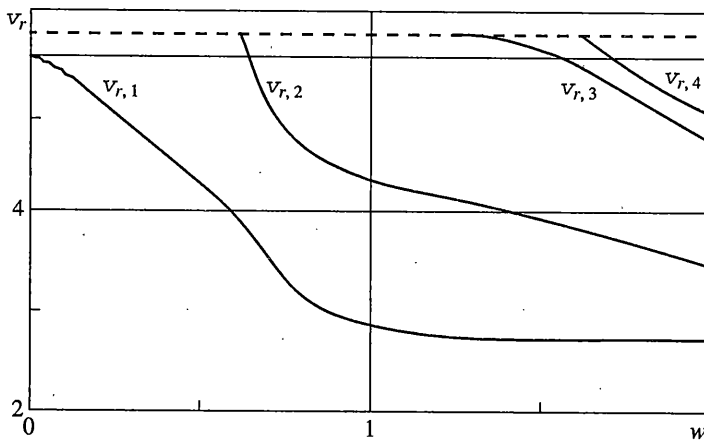
Аналогичные расчеты для анизотропной трехслойной модели земной поверхности показаны на фиг. 5, 6: верхний слой – изотропный, из нескальных компактных



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

пород, средний – ортотропный, моделируемый Z-срезом сульфидида сурьмы (SbSI) [13] и трансверсально-изотропное полупространство с упругими свойствами кристалла $Pb_5(GeO_4)(VO_4)_2$ [13]:

изотропный слой: $C_{11} = 0.045$, $C_{12} = 0.0225 \times 10^{11}$ Н/м², $\rho = 2000$ кг/м³, $h_1 = 10^3$ м;

SbSI: $C_{11} = 0.309$, $C_{12} = 0.096$, $C_{13} = 0.093$, $C_{23} = 0.158$, $C_{22} = 0.327$, $C_{33} = 0.495$, $C_{44} = 0.221$, $C_{55} = 0.092$, $C_{66} = 0.06 \times 10^{11}$ Н/м², $\rho = 5250$ кг/м³, $h_2 = 3 \cdot 10^3$ м;

$Pb_5(GeO_4)(VO_4)_2$: $C_{11} = 0.71$, $C_{12} = 0.21$, $C_{13} = 0.33$, $C_{33} = 0.84$, $C_{44} = 0.17 \times 10^{11}$ Н/м², $\rho = 7150$ кг/м³.

Здесь также кристаллофизические координаты совпадают с кристаллографическими. Характерные величины выбраны следующие: $l_0 = 10^3$ м, $f_0 = 10$ Гц, $m_0 = 10^{12}$ кг. Смысл всех обозначений на фиг. 5, 6 полностью соответствует обозначениям на фиг. 3, 4. Отметим, что в обоих случаях жесткости (импедансы) нижних слоев больше жесткости верхних.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (02-01-96403 р2000юг, 99-01-00787), российско-американского (CRDF) гранта REC-004.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
2. *Ghijssen W.J., Van den Berg P.M.* The computation of the acousto-electric field in multi-layered SAW devices. // IEEE Ultrason. Symp. Proc. N.Y.: 1985. V. 1. P. 198–202.
3. *Shiosaki T., Mikamura Y., Takeda F., Kawabata A.* High-coupling and high-velocity SAW using ZnO_4AlN films on glass substrate // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., Freqc. Contr. 1986. V. 33. № 3. P. 324–330.
4. *Stroh A.N.* Steady state problems in anisotropic elasticity // J. Math. Phys. 1962. V. 41. № 2. P. 77–103.
5. *Ingebrigtsen K.A., Tonning A.* Elastic surface waves in crystals // Phys. Rev. 1969. V. 184. № 3. P. 942–951.
6. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
7. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
8. *Auld B.A.* Acoustic Fields and Waves in Solids. N.Y.: Wiley, 1973. V. 1. 396 P.
9. *Дьелесан Э., Руайе Д.* Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424 с.
10. *Бабешко В.А.* Об интегральных уравнениях электроупругости, возникающих при расчете акустоэлектронных устройств // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302. № 4. С. 812–815.
11. *Fryer Gerard J., Frazer L. Neil.* Seismic waves in stratified anisotropic media // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1984. V. 78. № 3. P. 691–710.
12. *Garmany Jan.* Some properties of elastodynamic eigensolutions in stratified media // Geophys. J.R. Astron. Soc. 1983. V. 75. P. 565–569.
13. *Акустические кристаллы.* Справочник/Под ред. М.П. Шаскольской М.: Наука, 1982. 632 с.

Краснодар

Поступила в редакцию
23.05.2001