МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2002

УДК 531.36

© 2002 г. М.В. ДЕРЯБИН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОУСКОРЕННЫХ ВРАЩЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Задача о движении тяжелого твердого тела в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости, которая совершает безвихревое движение и покоится на бесконечности, рассматривалась в работах С.А. Чаплыгина [1] и В.А. Стеклова [2]. В этих работах были найдены частные решения уравнений движения твердого тела в случаях, когда тело имеет плоскость симметрии или ось винтовой симметрии (т.е. вид тела не меняется при повороте вокруг этой оси на 180° см. [1]), и был поставлен вопрос об устойчивости таких движений. Для случая, когда твердое тело имеет три взаимно ортогональные плоскости симметрии, вопрос об устойчивости решен в [3]. В настоящей работе рассматривается случай, когда твердое тело имеет три взаимно ортогональные оси винтовой симметрии и исследуется устойчивость по первому приближению равноускоренных вращений такого тела вокруг его осей симметрии.

1. Уравнения движения. Рассмотрим тяжелое твердое тело, движущееся в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости, которая совершает безвихревое движение и покоится на бесконечности. Известно, что в этом случае движение жидкости определяется движением твердого тела, а следовательно, конфигурационное пространство системы диффеоморфно евклидовой группе $E(3)$. Пусть $P\gamma$, где γ – единичный вертикальный вектор, P – равнодействующая силы тяжести и силы Архимеда. Будем считать, что обе силы приложены к одной точке, а константа P положительна. Пусть точка O твердого тела – это точка приложения силы $P\gamma$.

Пусть ω, $v \in R^3$ – угловая скорость тела и скорость точки O в подвижной системе координат e_1, e_2, e_3, связанной с телом. Поскольку кинетическая энергия системы – положительно определенная квадратичная форма, инвариантная относительно левых сдвигов на группе $E(3)$, то ее можно записать в виде

$$T = \tfrac{1}{2}\langle A\omega, \omega\rangle + \langle B\omega, v\rangle + \tfrac{1}{2}\langle Cv, v\rangle \tag{1.1}$$

где матрицы A, B и C постоянны, а симметричные матрицы A, C и $D = A - B^T C^{-1} B$ положительно определены [4, 5]. Уравнения движения системы удобно записать в подвижной системе координат e_1, e_2, e_3. В результате получаем уравнения Кирхгофа [4]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega} + \omega \times \frac{\partial T}{\partial \omega} + v \times \frac{\partial T}{\partial v} = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} + \omega \times \frac{\partial T}{\partial v} = -P\gamma$$

Эти уравнения следует дополнить уравнениями Пуассона

$$\dot{\gamma} + \omega \times \gamma = 0 \tag{1.3}$$

Пусть подвижная система координат e_1, e_2, e_3 выбрана так, что координатные векторы совпадают с осями винтовой симметрии тела. Тогда матрицы A, B и C – диагональные [1, 2]. Частные решения, найденные в [1, 2], – это такие движения, при которых одна из осей e_1, e_2, e_3 вертикальна, тело равноускоренно падает вниз и равноускоренно вращается вокруг этой оси.

2. Линеаризация уравнений движения. Уравнения (1.2) допускают три интеграла количества движения:

$$\langle \partial T/\partial v, \alpha\rangle = a_1, \ \langle \partial T/\partial v, \beta\rangle = a_2, \ \langle \partial T/\partial v, \gamma\rangle = a_3 - Pt$$

Здесь α и β – постоянные векторы, лежащие в горизонтальной плоскости и записанные в подвижной системе координат; их компоненты удовлетворяют уравнениям Пуассона $\dot{\alpha} + \omega\times\alpha = 0$, $\dot{\beta} + \omega\times\beta = 0$.

Будем считать, что константы a_1, a_2, a_3 равны нулю. Тогда $\partial T/\partial v = -Pt\gamma$; откуда скорость v будет равна

$$v = -Pt\,C^{-1}\gamma - C^{-1}B\omega \tag{2.1}$$

Подставим выражение (2.1) в первое уравнение системы (1.2):

$$D\dot{\omega} + \omega\times D\omega - PBC^{-1}\gamma - PtBC^{-1}\gamma - Pt\omega\times(BC^{-1}\gamma) +$$
$$+P^2t^2(C^{-1}\gamma)\times\gamma + Pt(BC^{-1}\omega)\times\gamma = 0 \tag{2.2}$$

где матрица D определена в п. 1. Соотношения (1.3)–(2.2) образуют замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введем следующие обозначения: p, q, r – компоненты угловой скорости ω; γ_1, γ_2, γ_3 – компоненты единичного вектора γ. Матрицы B, C и D – диагональные, их диагональные элементы обозначим через $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ и d_1, d_2, d_3 соответственно. Необходимо напомнить, что c_1 и d_1 положительны.

Рассмотрим частное решение системы (1.3)–(2.2): равноускоренное вращение вокруг оси e_2 (см. [1, 2]):

$$\gamma_1 = 0,\ \ \gamma_2 = 1,\ \ \gamma_3 = 0,\ \ p = 0,\ \ q = Pb_2c_2^{-1}t/d_2,\ \ r = 0 \tag{2.3}$$

Такие решения, вообще говоря, не устойчивы по Ляпунову (см. [2]). Рассмотрим устойчивость этого решения только по отношению к переменным γ_1, γ_3, т.е. будем искать условия, при которых ось вращения остается вертикальной. В дальнейшем устойчивость решения (2.3) будем понимать именно в этом смысле. Линеаризуем систему (2.2) в окрестности решения (2.3). Величины p, q, r и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ теперь считаются малыми

$$d_1\dot{p} + \frac{Pt}{d_2}(d_3b_2c_2^{-1} - d_2(b_1c_1^{-1} + b_3c_3^{-1}))r + P^2t^2\,\frac{b_2^2c_2^{-2}}{d_2}\gamma_3 +$$
$$+P^2t^2\left(\frac{b_2c_2^{-1}(b_1c_1^{-1} - b_3c_3^{-1} + b_2c_2^{-1})}{d_2} - (c_3^{-1} - c_2^{-1})\right)\gamma_3 - Pb_1c_1^{-1}\gamma_1 = 0$$

$$d_3\dot{r} + \frac{Pt}{d_2}(-d_1b_2c_2^{-1} + d_2(b_1c_1^{-1} + b_3c_3^{-1}))p - P^2t^2\,\frac{b_2^2c_2^{-2}}{d_2}\gamma_1 +$$
$$+P^2t^2\left(\frac{b_2c_2^{-1}(b_1c_1^{-1} - b_3c_3^{-1} - b_2c_2^{-1})}{d_2} + (c_1^{-1} - c_2^{-1})\right)\gamma - Pb_3c_3^{-1}\gamma_3 = 0$$

$$\dot{\gamma}_1 = r - \frac{Pb_2c_2^{-1}}{d_2}t\gamma_3,\ \ \dot{\gamma}_3 = -p + \frac{Pb_2c_2^{-1}}{d_2}t\gamma_1 \tag{2.4}$$

В линеаризованных уравнениях переменные q, γ_2 и p, r, γ_1, γ_3 разделяются; поскольку интерес представляет устойчивость по переменным γ_1, γ_3, то уравнения для q и γ_2 не рассматриваются.

3. Необходимые условия устойчивости. Система (2.4) может быть записана в виде

$$\dot{X} = tF_1X + t^2G_1Y + H_1Y, \quad \dot{Y} = F_2X + tG_2Y \tag{3.1}$$

где $X = (p, q)^T$, $Y = (\gamma_1, \gamma_2)^T$, а F, G и H – постоянные матрицы. Сделаем замену переменных $\tilde{X} = X$, $\tilde{Y} = tY$. В новых переменных уравнения (3.1) примут вид

$$\dot{\tilde{X}} = tF_1\tilde{X} + tG_1\tilde{Y} + 1/tH_1\tilde{Y}, \quad \dot{\tilde{Y}} = tF_2\tilde{X} + tG_2\tilde{Y} + 1/t\tilde{Y} \tag{3.2}$$

Предположим, что все собственные значения матрицы

$$M = \begin{Vmatrix} F_1 & G_1 \\ F_2 & G_2 \end{Vmatrix}$$

различны (это общий случай). Тогда, как показано в [6], решение системы (3.2) можно искать в виде следующих формальных рядов:

$$\tilde{X}(t) = t^{\chi}(X_0 + X_1/t + X_2/t^2 + \ldots)\exp(\beta t^2/2 + \gamma t) \tag{3.3}$$

$$\tilde{Y}(t) = t^{\chi}(Y_0 + Y_1/t - Y_2/t^2 + \ldots)\exp(\beta t^2/2 + \gamma t)$$

Здесь β, γ и χ – скалярные величины (вообще говоря, комплексные).

Подставим выражение (3.3) в уравнения (3.2) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях t. После простых алгебраических вычислений получаем, что β – собственное значение матрицы M, а $\gamma = 0$. Отсюда находим необходимые условия устойчивости нулевого решения системы (3.2), а следовательно, и (2.4): $\mathrm{Re}\,\beta < 0$, т.е. собственные значения матрицы M не должны лежать в правой полуплоскости на комплексной плоскости.

Характеристическое уравнение $\det\|M - E\beta\| = 0$ имеет вид

$$\beta^4 + (R + Q + S^2)\beta^2 + QR = 0 \tag{3.4}$$

$$Q = \frac{P^2}{4d_3d_2^2}(2d_2b_1b_2c_1^{-1}c_2^{-1} - (d_1 + d_2)b_2^2c_2^{-2} + d_2^2(c_1^{-1} - c_2^{-1}))$$

$$R = \frac{P^2}{4d_1d_2^2}(2d_2b_2b_3c_2^{-1}c_3^{-1} - (d_2 + d_3)b_2^2c_2^{-2} + d_2^2(c_3^{-1} - c_2^{-1})) \tag{3.5}$$

$$S = \frac{P}{2d_2\sqrt{d_1d_3}}(d_2(b_1c_1^{-1} + b_3c_3^{-1}) - b_2c_2^{-2}(d_1 + d_3))$$

Уравнение (3.4) – биквадратное, поэтому для того чтобы система (2.4) была устойчива, все собственные значения должны лежать на мнимой оси. Для этого необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$QR > 0, \quad R + Q + S^2 > 0, \quad (R + Q + S^2)^2 - 4RQ > 0$$

Здесь неравенства строгие, так как предполагалось, что все собственные значения различны.

Замечание 1. Первое из двух условий устойчивости фактически означает, что если твердое тело "достаточно близко" к симметричному, и соответствующее движение симметричного тела устойчиво, то и движение исходного осесимметричного тела также будет устойчивым.

Примером может служить пропеллер с двумя лопастями, который тонет так, что его ось вращения вертикальна. Такое положение оси вращения будет устойчивым, если "угол атаки" у лопастей пропеллера достаточно мал (можно считать, что если угол равен нулю, т.е. лопасти горизонтальные, то "пропеллер" имеет три взаимно ортогональные плоскости симметрии).

Другое условие устойчивости, напротив, означает, что тело "достаточно далеко" от симметричного.

Если выполнены неравенства $Q > 0$ и $R > 0$, то последние два неравенства выполняются автоматически. При $Q < 0$ и $R < 0$ это уже не так. Таким образом, нулевое решение системы (2.4) устойчиво только тогда, когда либо

$$Q > 0, R > 0 \tag{3.6}$$

либо

$$Q < 0,\ \ R < 0,\ \ R + Q + S^2 > 2\sqrt{RQ} \tag{3.7}$$

где R, Q и S имеют вид (3.5).

Замечание 2. В случае, когда твердое тело обладает тремя взаимно ортогональными плоскостями симметрии, матрица B в кинетической энергии (1.1) – нулевая. Полагая формально коэффициенты b_i равными нулю в условиях устойчивости (3.6) и (3.7), получаем, что (3.6) совпадает с необходимыми и достаточными условиями устойчивости, полученными в [3], а (3.7) не выполняется.

4. О достаточных условиях устойчивости. Для получения достаточных условий устойчивости нулевого решения системы (3.2) кроме полученных неравенств (3.6) и (3.7) необходимо еще учитывать величину χ в разложении решения в ряд (3.3): нулевое решение устойчиво, если $\operatorname{Re}\chi \leqslant 1$.

Поскольку предполагаются, что все собственные значения матрицы M различны (см. п. 3), ее можно привести к диагональному виду, и уравнения (3.2) запишутся в виде

$$\dot{Z} = (tK + 1/tL)Z \tag{4.1}$$

здесь матрица K – диагональная. Представляя решение системы (4.1) в виде формального ряда

$$Z(t) = t^{\chi}(Z_0 + Z_1/t + Z_2/t^2 + \ldots)\exp(\beta t^2/2 + \gamma t) \tag{4.2}$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, аналогично п. 3 получаем, что β – один из диагональных элементов матрицы K, $\gamma = 0$, а вектора Z_0, Z_1 – собственные векторы матрицы K, соответствующие собственному значению β. Пусть $\beta = K_{ii}$, тогда все компоненты векторов Z_0, Z_1, кроме i-й, равны нулю. Приравнивая коэффициенты при $t^{\chi-1}$ в уравнении (4.1), получим в i-й строке $\chi Z_0^i + \beta Z_2^i = K_{ii}Z_2^i + L_{ii}Z_0^i$.

Поскольку $\beta = K_{ii}$, получаем, что χ – это i-й диагональный элемент матрицы L. Итак, достаточное условие устойчивости имеет вид $\operatorname{Re} L_{ii} \leqslant 0$.

Замечание 3. Приведение матрицы M к диагональному виду и последующее вычисление матрицы L в общем случае достаточно трудоемкая задача. Однако в некоторых случаях необходимые условия устойчивости будут также и достаточными, например, если коэффициенты b_i матрицы B кинетической энергии достаточно малы по сравнению с коэффициентами матрицы A и C. Это означает, что винт не сильно "закручен". Действительно, при $B = 0$ известен явный вид асимптотики решения (см. [3, 7]), из которого следует, что у матрицы L по диагонали стоят 1/2 (это можно проверить непосредственными вычислениями). Если b_i достаточно малы, то у матрицы L диагональные элементы будут мало отличаться от $1/2$, т.е. выполнены достаточные условия устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-01096).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полное собр. соч. Л.: Изд-во АН СССР. 1933. Т. 1. С. 133–150.
2. *Стеклов В.А.* О движении тяжелого твердого тела в жидкости // Сообщ. Харьк. маш. о-ва. Сер. 2. 1889. Т. 2. № 5–6. С. 209–235.
3. *Козлов В.В.* Об устойчивости положений равновесия в нестационарном силовом поле // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 12–19.
4. *Kirghoff G.* Uber die Bewegung eines Rotationskorpers in einer Flussigkeit // J. Reine und Angewandte Math. 1870. Bd. 71. S. 237–262.
5. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
6. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с.
7. *Козлов В.В.* О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 5. С. 10–17.

Москва

Поступила в редакцию
4.10.1999