МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2002

УДК 531.53

 В.Ф. ЖУРАВЛЕВ

ОБОБЩЕННЫЙ МАЯТНИК ФУКО В РЕЖИМЕ УПРАВЛЕНИЯ УГЛОМ ПРЕЦЕССИИ

Управляемый маятник Фуко [1], свободный по углу прецессии, относится к гироскопам интегрирующего типа. Это означает, что он может использоваться в навигационных системах как датчик интеграла от проекции угловой скорости на ось чувствительности.

Три таких интеграла, соответственно от трех проекций угловой скорости на взаимно ортогональные оси являются квазикоординатами, непосредственное использование которых для определения углового положения объекта невозможно. На практике для этой цели ограничиваются малыми приращениями квазикоординат с последующим их использованием в уравнениях Пуассона.

Определенными преимуществами может обладать схема, в которой угол прецессии принудительно удерживается в малой окрестности фиксированного значения, а информация об угловой скорости получается по наблюдению управляющего сигнала.

Такой гироскоп превращается в разновидность датчика угловой скорости. При этом он сохраняет известные преимущества интегрирующего гироскопа и освобождается от некоторых его недостатков, таких, например, как зависимость погрешностей от угла прецессии.

При этом возникает ряд вопросов, связанных с формированием алгоритмов управления углом прецессии, исследованием устойчивости замкнутой системы и качества управления.

Этим вопросам и посвящена настоящая заметка.

1. Режим управляемой прецессии. Будем исходить из уравнений движения управляемого маятника Фуко, полученных в [1] в виде

$$\begin{aligned} &\ddot{x}+2\omega\dot{y}+\dot{\omega}y+x=-\varepsilon(E-E_0)\dot{x}+\mu Ky+p\dot{y}+fx \\ &\ddot{y}-2\omega\dot{x}-\dot{\omega}x+y=-\varepsilon(E-E_0)\dot{y}-\mu Kx-p\dot{x}+fy \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь x, y – координаты, определяющие форму колебаний маятника, ω – угловая скорость вращения основания, E и E_0 – текущее и стабилизируемое значения энергии колебаний $(2E=x^2+y^2+\dot{x}^2+\dot{y}^2)$, K – квадратура (момент количества движения относительно центра колебаний $K=x\dot{y}-\dot{x}y$), p и f – скаляры, определяющие управление прецессией и частотой, ε и μ – коэффициенты усиления в обратных связях при управлении амплитудой и квадратурой.

В этих уравнениях дополнительно учитывается влияние неравномерности вращения основания – $\dot{\omega}$. Следует также заметить, что если речь идет об обобщенном маятнике Фуко, то в уравнениях (1.1) вместо ω следует писать $n\varkappa\omega$, где n – номер рассматриваемой формы колебаний, а $\varkappa$ – коэффициент Брайана конкретной реализации обобщенного маятника Фуко.

Контуры управления амплитудой и квадратурой сформированы в уравнениях (1.1) так, чтобы поддерживать постоянную амплитуду колебаний E_0 и равную нулю квадратуру $K = 0$. Далее изучим цели и алгоритмы управления прецессией p. Управление частотой отсутствует: $f = 0$.

Анализ системы (1.1) удобно проводить в тороидальных координатах (r, k, ϑ, τ), связанных с фазовыми переменными $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(t+\tau)\cos\vartheta - k\sin(t+\tau)\sin\vartheta \\ y &= r\cos(t+\tau)\sin\vartheta + k\sin(t+\tau)\cos\vartheta \\ \dot{x} &= -r\sin(t+\tau)\cos\vartheta - k\cos(t+\tau)\sin\vartheta \\ \dot{y} &= -r\sin(t+\tau)\sin\vartheta + k\cos(t+\tau)\cos\vartheta \end{aligned} \tag{1.2}$$

Поясним смысл переменных r, k, ϑ, τ. Если бы в уравнениях (1.11) правые части, а также и угловая скорость ω, были бы равны нулю, то функции (1.2) были бы решениями системы (1.1), при этом любая траектория в плоскости x, y представляла бы собой эллипс, а переменные r, k, ϑ, τ, являющиеся в этом случае постоянными интегрирования имели бы следующий смысл: r – большая полуось эллипса, k – малая, ϑ – угол наклона большой оси эллипса к оси x. Переменная τ определяет положение фазовой точки на эллиптической траектории в начальный момент времени $t = 0$. Если в уравнениях (1.1) правые части присутствуют, то формулы (1.2) будем рассматривать как замену фазовых переменных $(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \to (r, k, \vartheta, \tau)$.

Полная энергия и квадратура в новых переменных принимают следующий вид:

$$2T = r^2 + k^2, \quad K = rk \tag{1.3}$$

Система (1.1) в этих переменных записывается в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \{-\mu k^2 r + \varepsilon r[E_0 - (r^2 + k^2)/2] + k\dot{\omega}\}/2 \\ \dot{k} &= \{-\mu k r^2 + \varepsilon k[E_0 - (r^2 + k^2)/2] + r\dot{\omega}\}/2 \\ \dot{\vartheta} &= \omega - p/2, \quad \dot{\tau} = -f/2 = 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Первые два уравнения в этой системе полностью отделились от третьего, в котором функцию управления прецессией следует еще определить $p = p(r, k, \vartheta)$. Эти два уравнения удобно анализировать в переменных (1.3). Для этого умножим первое уравнение на r, второе на k и сложим эти уравнения. После этого умножим первое уравнение на k, а второе на r и опять сложим. В результате вместо первых двух уравнений получим два такие:

$$\dot{E} = -\mu K^2 + \varepsilon E(E_0 - E) + K\dot{\omega}, \quad \dot{K} = -\mu EK + \varepsilon K(E_0 - E) + E\dot{\omega} \tag{1.5}$$

Если угловая скорость ω постоянная, то $\dot{\omega} = 0$ и система (1.5) имеет асимптотически устойчивое стационарное решение [1]: $E = E_0$, $K = 0$. По известной теореме об устойчивости при наличии малых постоянно действующих возмущений это же стационарное решение будет устойчивым в этом смысле при малой $\dot{\omega}(t)$.

Поведение переменных E и K в системе (1.5) в окрестности точки $E = E_0$, $K = 0$ можно изучить, линеаризуя систему (1.5):

$$\delta\dot{E} = -\varepsilon E_0 \delta E, \quad \dot{K} = -\mu E_0 K + E_0\dot{\omega} \tag{1.6}$$

В (1.6) пренебрегались также члены $K\dot{\omega}$ и $\delta E\dot{\omega}$. Из этих уравнений видно, что в первом приближении малая неравномерность угловой скорости не возмущает полную энергию E. Возмущение квадратуры имеет место и частное решение второго уравнения может быть записано так:

$$K(t) = E_0\int_0^t e^{-\mu E_0(t-\tau)}\dot{\omega}(\tau)d\tau$$

Если $\dot{\omega} \equiv \text{const}$, то $K(t) = \dot{\omega}[1-\exp(-\mu E_0 t)]/\mu$. Если же $\omega(t)$ ограниченная функция времени, то постоянной составляющей в возмущении квадратуры не возникает.

Рассмотрим теперь управление прецессией. Поставим для системы (1.1) задачу выбора функции $p(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ так, чтобы многообразие $E \equiv E_0$, $K \equiv 0$, $\vartheta \equiv 0$ было асимптотически устойчивым при постоянно действующих возмущениях (малым возмущением будем считать $\dot{\omega}(t)$; если $\dot{\omega} \equiv 0$, то указанное многообразие должно быть просто асимптотически устойчивым).

Для этого рассмотрим следующую квадратичную форму фазовых переменных $x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y}$:

$$P = xy + \dot{x}\dot{y} \tag{1.7}$$

Подставляя сюда замену (1.2), выразим эту квадратичную форму через новые переменные: $P = (r^2 - k^2)\cos\vartheta\sin\vartheta$. Здесь также удобно заменить r и k на E и K в соответствии с (1.3). Тогда получим

$$P = \sqrt{E^2 - K^2}\sin 2\vartheta \tag{1.8}$$

Покажем, что закон управления прецессией в виде

$$p = a_1 P + a_2\int_0^t P dt \tag{1.9}$$

решает поставленную задачу.

Третье уравнение системы (1.4) в силу наличия в (1.9) интегрального члена повышается в порядке

$$\dot{\vartheta} = \omega - p/2, \quad \dot{p} = a_1\dot{P} + a_2 P$$

Или, исключая p, получаем

$$\ddot{\vartheta} = \dot{\omega} - a_1(\sqrt{E^2 - K^2}\sin 2\dot{\vartheta})/2 - a_2(\sqrt{E^2 - K^2}\sin 2\vartheta)/2 \tag{1.10}$$

Если угловая скорость основания постоянна ($\dot{\omega} = 0$), то это уравнение имеет асимптотически устойчивое стационарное решение $\vartheta \equiv 0$, если $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$. Это следует из вида уравнения в вариациях, которое принимает следующую форму:

$$\ddot{\vartheta} + a_1 E_0\dot{\vartheta} + a_2 E_0\vartheta = 0 \tag{1.11}$$

Для этого решения $\dot{\vartheta} \equiv 0$ и, следовательно $p \equiv 2\omega$. Иными словами, интенсивность управления равна удвоенной угловой скорости основания.

Пусть $\dot{\omega} \neq 0$. Для малых ϑ на многообразии ($r = \sqrt{2E_0}$, $k = 0$) уравнение (1.10) принимает вид $\ddot{\vartheta} + a_1 E_0\dot{\vartheta} + a_2 E_0\vartheta = \dot{\omega}$. Частное решение этого уравнения ищем в виде

$$\vartheta = \int_0^t \dot{\omega}(\tau)G(t-\tau)d\tau, \quad \dot{\vartheta} = \dot{\omega}(t)G(0) + \int_0^t \dot{\omega}(\tau)\dot{G}(t-\tau)d\tau$$

$$\ddot{\vartheta} = \ddot{\omega}(t)G(0) + \dot{\omega}(t)\dot{G}(0) + \int_0^t \dot{\omega}(\tau)\ddot{G}(t-\tau)d\tau$$

где $G(\xi)$ – функция Грина, удовлетворяющая уравнению (1.11):

$$\ddot{G} + E_0(a_1\dot{G} + a_2 G) = 0$$

с начальными условиями $G(0) = 0$, $\dot{G}(0) = 1$.

Следовательно, для управления p находим решение

$$p(t) = 2[\omega(t) - \int_0^t \dot{\omega}(\tau)\dot{G}(t-\tau)d\tau] \tag{1.12}$$

Если угловое ускорение объекта постоянно, то

$$p(t) = 2[\omega(t) - \dot{\omega}(1 - G(t))]$$

В устойчивой системе $G(t) \to 0$ при $t \to \infty$, кроме того $|G(t)| < 1/|\nu|$, $\nu = E_0\sqrt{a_1^2 - 4a_2}/2$, поэтому в случае равномерно ускоренного вращения объекта управление прецессией $p(t)$ отслеживает угловую скорость $2\omega(t)$ в пределе с постоянной ошибкой, равной $2\dot{\omega}$. В случае малых ускорений мала и ошибка.

Если $\omega(t)$ – ограниченная функция времени, то постоянная ошибка отсутствует и интенсивность управления $p(t)$ отслеживает удвоенную угловую скорость основания с точностью до малых слагаемых, имеющих равное нулю среднее по времени.

Отметим теперь роль позиционного и интегрального членов в выражении (1.9). Если интегрального члена нет ($a_2 = 0$), то третье уравнение системы (1.4) имеет вид

$$\dot{\vartheta} = \omega - (1/2)\sqrt{E^2 - K^2}\sin 2\vartheta \approx \omega - (E_0/2)\sin 2\vartheta$$

и в случае постоянной угловой скорости ω для ϑ получаем стационарное решение: $\sin 2\vartheta = 2\omega/E_0$. Возникает, так называемая, статическая ошибка, величина которой в первом приближении пропорциональна угловой скорости ω. Если отсутствует позиционный член ($a_1 = 0$), то уравнение (1.10) представляет собой уравнение недемпфированного математического маятника, переходные процессы, в котором не убывают со временем.

Анализ показывает, что оптимальным по точности будет алгоритм, в котором в уравнении (1.11) затухание имеет критический характер, когда $\nu = 0$ и коэффициенты a_1 и a_2 связаны соотношением $a_1^2 = 4a_2$. В этом случае функция Грина имеет вид $G = t\exp(-ht)$ ($h = E_0a_1/2$) и для $p(t)$ в соответствии с (1.12) можно получить

$$p(t) = 2\omega(t) - 2\dot{\omega}(\tau)G(t-\tau)|_0^t + 2\int_0^t G(t-\tau)\ddot{\omega}(\tau)d\tau =$$

$$= 2[\omega(t) + \dot{\omega}(0)G(t) + \int_0^t G(t-\tau)\ddot{\omega}(\tau)d\tau]$$

Функция $G = t\exp(-ht)$ имеет максимум в точке $t = 1/h$, равный $G(1/h) = 1/he$, это означает, что $|G(t)| < 1/he$, $a|\ddot{\omega}| \approx \lambda^2$, где λ – верхняя граница спектра функции $\omega(t)$. Если ω изменяется медленно, то λ^2 мало. Тем самым $p(t)$ представляет $2\omega(t)$ с достаточной точностью.

2. Режим гиротахометра [2]. В этом режиме более грубого датчика угловой скорости отсчетное многообразие полностью перестает быть свободным в азимуте и пропадает потребность в управлении квадратурой. В уравнениях (1.1), следовательно, $\mu = 0$. По-прежнему $f = 0$ и, кроме того, поддерживаются колебания только по координате x. Можно также ограничиться введением управления только по координате y. В результате всех этих упрощений уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + 2\omega\dot{y} + \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \\ &\ddot{y} - 2\omega\dot{x} + h\dot{y} + y = -p\dot{x} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Эти уравнения будем так же, как и систему (1.1), изучать методом осреднения, однако система (2.1) проще системы (1.1) и переход к медленным переменным может быть упрощен.

Выполним замену переменных $(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \to (r, \varphi, u, v)$ по формулам

$$x = r\sin\varphi, \quad \dot{x} = r\cos\varphi, \quad y = u\cos\varphi + v\sin\varphi, \quad \dot{y} = -u\sin\varphi + v\cos\varphi \tag{2.2}$$

Несколько необычный вид замены объясняется следующими обстоятельствами. Переход к полярным координатам (r, φ) в плоскости $(x, \dot{x})$ является удобным для исследования автоколебательного режима, порождаемого характерной в уравнении по x нелинейностью. В уравнении по координате y выбор полярных координат невозможен, поскольку по смыслу задачи возникающие по этой координате из-за гироскопической связи колебания должны гаситься обратной связью $p\dot{x}$. То есть, ожидаемый стационарный режим должен быть $y = \dot{y} = 0$, а это особая точка полярных координат в этой плоскости. Поэтому замена переменных (2.2) в плоскости $(y, \dot{y})$ есть переход к вращающейся системе координат (u, v) с угловой скоростью, синхронизированной со скоростью фазовой точки в плоскости $(x, \dot{x})$.

После использования замены (2.2) в системе (2.1) с последующим осреднением по φ получается следующая система:

$$\begin{gathered} \dot{r} = -\omega v - 3\varepsilon(4 - r^2)r/8, \quad \dot{\varphi} = 1 - \omega u \\ \dot{u} = \omega u v - hu, \quad \dot{v} = -\omega u^2 - hv + (2\omega - p)r/2, \quad \dot{p} = av \end{gathered} \tag{2.3}$$

В этой системе последнее уравнение определяет структуру обратной связи. Иными словами в системе (2.1) коэффициент p следует взять в виде $p = a\int v d\tau$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t)$, где v – амплитуда составляющей сигнала y, синфазной сигналу x. Система допускает стационарное решение по медленным переменным: $r = 2$, $u = v = 0$, $p = 2\omega$. Легко проверить, что оно является асимптотически устойчивым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В.Ф.* Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 27–36.
2. *Burdess J.S., Wren T.* The theory of a piezoelectric disc gyroscope // IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems. 1986. V. AES-22. № 4. P. 410–418.

Москва

Поступила в редакцию 13.02.2001