

УДК 534.1

© 2002 г. А.Е. ВОЙНОВ, А.П. ИВАНОВ, Н.Н. РОМАНОВА

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТРОЙНОГО КОЛЛИНЕАРНОГО УДАРА

Рассматривается задача об упругом столкновении трех твердых тел, движущихся поступательно вдоль некоторой прямой. Предполагается, что до соударения два тела неподвижны и соприкасаются, а третье движется по инерции. Исследована зависимость характеристик удара от параметров задачи: соотношения масс и соотношения контактных жесткостей. Показано наличие у данной системы резонансных свойств, предопределяющих результат удара. Эти свойства проявляются в большей мере в случае, когда масса центрального тела относительно мала: при этом соударение может складываться из большого числа интервалов контакта центрального тела с крайними попеременно.

**1. Описание системы.** Введем инерциальную систему координат с осью абсцисс, коллинеарной прямой, вдоль которой происходит движение, и возьмем в качестве лагранжевых координат  $x_1, x_2, x_3$  абсциссы центров масс каждого из тел. Непосредственно перед соударением

$$v_2 = \dot{x}_2 = 0, \quad v_3 = \dot{x}_3 = 0, \quad v_1 = \dot{x}_1 > 0 \quad (1.1)$$

Задача состоит в определении скоростей  $V_j = \dot{x}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) после удара. Как хорошо известно, решение задачи об упругом коллинеарном ударе двух тел может быть получено из общих теорем динамики без дополнительных предположений о характере контактных сил. Действительно, теоремы о сохранении количества движения и кинетической энергии выражаются соотношениями

$$\sum_{j=1}^2 m_j v_j = \sum_{j=1}^2 m_j V_j, \quad \sum_{j=1}^2 m_j v_j^2 = \sum_{j=1}^2 m_j V_j^2 \quad (1.2)$$

представляющими собой систему, достаточную для определения двух неизвестных величин  $V_1$  и  $V_2$ . Система, аналогичная (1.2), но с диапазоном изменения  $j$  от 1 до 3, справедлива и в случае соударения трех тел. Очевидно, однако, что в этом случае двух уравнений недостаточно для определения трех неизвестных послеударных скоростей  $V_1, V_2, V_3$ . Следовательно, необходимы те или иные предположения об ударных силах.

Будем считать, что силы контактного взаимодействия обусловлены наличием в точках контакта идеальных пружин с жесткостями  $c_1, c_2$ , действие которых имеет односторонний характер, т.е. направлено к разделению соответствующей пары тел. Такое предположение позволяет упростить анализ, но оно не диктуется необходимостью: в принципе, можно рассматривать и более сложные модели ударных сил, описанные в [1–4].

В отсутствие внешних сил центр масс системы движется равномерно, не ограничивая общности, можно считать его в выбранной системе координат покоящимся

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 + m_3 \dot{x}_3 = 0 \quad (1.3)$$

Тем самым число степеней свободы уменьшится до двух.

Примем за новые лагранжевы координаты деформации пружин

$$y_1 = x_1 - x_2 + r_{12}, \quad y_2 = x_2 - x_3 + r_{23} \quad (1.4)$$

где  $r_{ij}$  – расстояние между центрами масс  $i$ -го и  $j$ -го тел, измеренное при касании и недеформированной пружине. Выразим кинетическую энергию системы  $T$  через переменные (1.4) при учете соотношения (1.3):

$$2MT = m_1(m_2 + m_3)\dot{y}_1^2 + 2m_1m_3\dot{y}_1\dot{y}_2 + m_3(m_1 + m_2)\dot{y}_2^2$$

$$M = m_1 + m_2 + m_3 \quad (1.5)$$

Потенциальная энергия  $\Pi$  вычисляется по формуле

$$2\Pi = c_1 y_1^2 \theta(y_1) + c_2 y_2^2 \theta(y_2) \quad (1.6)$$

где  $\theta(y)$  – ступенчатая функция, равная единице при  $y > 0$  и нулю при  $y \leq 0$ . Присутствие в равенстве (1.6) ступенчатых функций отражает односторонний характер контактных напряжений: они положительны, когда тела деформированы, но равны нулю после разделения тел.

Уравнения движения имеют вид

$$m_1(m_2 + m_3)M^{-1}\ddot{y}_1 + m_1m_3M^{-1}\ddot{y}_2 = -c_1 y_1 \theta(y_1)$$

$$m_1m_3M^{-1}\ddot{y}_1 + m_3(m_1 + m_2)M^{-1}\ddot{y}_2 = -c_2 y_2 \theta(y_2) \quad (1.7)$$

Для удобства анализа перейдем в системе (1.7) к новым переменным  $z_1, z_2$  и новому времени  $\tau$  по формулам

$$z_1 = \frac{\sqrt{m_1(m_2 + m_3)}}{M} y_1, \quad z_2 = \frac{\sqrt{m_3(m_2 + m_1)}}{M} y_2$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{\frac{Mc_1}{m_1(m_2 + m_3)}} \quad (1.8)$$

В результате получаем систему (штрих обозначает дифференцирование по новой переменной  $\tau$ ):

$$z_1'' + z_2'' \cos \alpha = -z_1 \theta(z_1), \quad z_1'' \cos \alpha + z_2'' = -\kappa^2 z_2 \theta(z_2) \quad (1.9)$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}}, \quad \kappa^2 = \frac{c_2}{c_1} \frac{m_1(m_2 + m + 3)}{m_3(m_1 + m_2)}$$

В системе (1.9)  $\alpha$  является геометрическим параметром, представляющим собой угол между линиями  $y_1 = 0$  и  $y_2 = 0$  в метрике Якоби в конфигурационном пространстве системы (1.7) (см. [5]). Второй параметр  $\kappa$  зависит как от отношения жесткостей пружин, так и от распределения масс между соударяемыми телами. Система нелинейна ввиду наличия в правых частях ступенчатых функций  $\theta(z_1), \theta(z_2)$ , поэтому дальнейший ее анализ связан с численными расчетами.

**2. Результаты численного анализа.** Поскольку перед соударением второе и третье тела соприкасаются и неподвижны относительно друг друга, то в начальный момент соударения  $t = 0$  имеем  $z_2 = 0, \dot{z}_2 = 0$ . Кроме того  $z_1(0) = 0$ . Вследствие принятого предположения о линейности контактных напряжений система (1.9) однородна, т.е. она инвариантна умножению переменных на одну и ту же положительную константу. Ввиду этого можно считать без ограничения общности, что  $\dot{z}_1(0) = 1$ ; случай  $\dot{z}_1(0) \neq 1$  сводится к данному путем масштабирования переменных.

Заметим, что система (1.9) кусочно-линейная. Для достаточно малых значений  $t > 0$  имеем  $z_1 > 0$ ,  $z_2 > 0$  и движение имеет колебательный характер, причем частоты определяются соотношением

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1 + \kappa^2 \pm \sqrt{\kappa^4 + 2\kappa^2 \cos 2\alpha + 1}}{2 \sin^2 \alpha} \quad (2.1)$$

В некоторый момент времени одна из переменных  $z_1$  или  $z_2$  меняет знак, при этом правая часть соответствующего уравнения (1.9) обнуляется. Одновременное изменение знака обеих переменных также возможно, однако оно реализуется лишь при отдельных значениях параметров. Для этого необходимо, в частности, чтобы отношение  $\omega_1/\omega_2$  было целым числом.

В общем случае соударение может складываться из нескольких участков, на которых положительна лишь одна из координат  $z_1$  или  $z_2$  или обе (теоретически, число таких участков неограничено). Признаком окончания соударения в момент  $t = t_k$  является выполнение системы неравенств:

$$z_1(t_k) \leq 0, \quad z_2(t_k) \leq 0, \quad \dot{z}_1(t_k) \leq 0, \quad \dot{z}_2(t_k) \leq 0 \quad (2.2)$$

причем при всех  $t \in (0, t_k)$  хотя бы одно из этих неравенств не выполняется.

Было проведено численное интегрирование системы (1.9) при начальных условиях  $z_1(0) = z_2(0) = 0$ ,  $\dot{z}_2(0) = 0$ ,  $\dot{z}_1(0) = 1$  и граничных условиях (2.2) для значений  $\alpha$  в пределах от 10 до 80 градусов и  $\kappa$  в пределах от 0.1 до 10. Полученные результаты представлены на фиг. 1–4. Здесь изображены зависимости одной из финальных скоростей  $\dot{z}_2(t_k)$  от  $\kappa$  при некоторых значениях угла  $\alpha$ , а также той же скорости от  $\alpha$  при фиксированном  $\kappa = 1$ . Для нахождения второй скорости  $\dot{z}_1(t_k)$  заметим, что уравнения (1.9) обладают интегралом энергии

$$(z_1')^2 + 2z_1'z_2' \cos \alpha + (z_2')^2 + z_1^2 \theta(z_1) + \kappa^2 z_2^2 \theta(z_2) = \text{const} \quad (2.3)$$

По окончании соударения потенциальная энергия деформаций равна нулю, откуда при учете начальных условий имеем

$$(z_1'(t_k))^2 + 2z_1'(t_k)z_2'(t_k) \cos \alpha + (z_2'(t_k))^2 = 1 \quad (2.4)$$

Отметим, что из равенства  $z_1'(t_k) = 0$  следует  $z_2'(t_k) = 1$  и наоборот.

Зная финальные значения  $z_1'$ ,  $z_2'$ , несложно вычислить  $y_1$ ,  $y_2$  при помощи формул (1.8), а затем и  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  при учете (1.3), (1.4). Таким образом, представленная информация достаточна для определения финального состояния исходной системы при различных значениях параметров. В частности

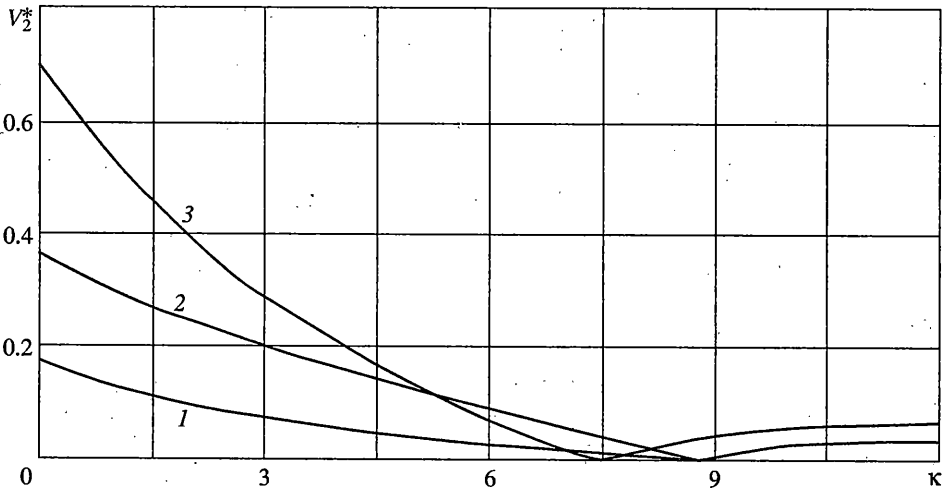
$$\dot{x}_1 = \frac{\sqrt{c_1}}{m_1} z_1' + \frac{m_3 \sqrt{c_1}}{m_1(m_2 + m_3) \cos \alpha} z_2'$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{\sqrt{c_1}}{m_2 + m_3} z_1' - \frac{\sqrt{c_1}}{(m_2 + m_3) \cos \alpha} z_2'$$

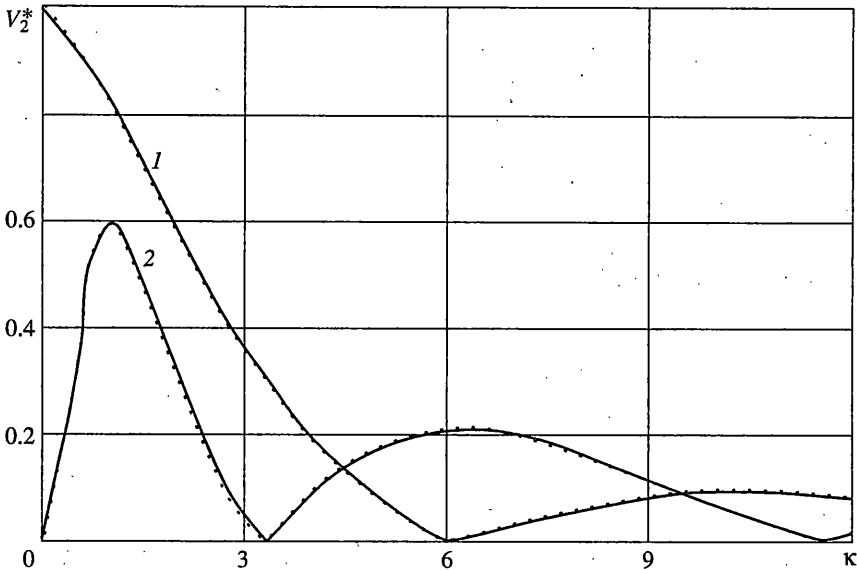
Поскольку в начальный момент времени  $z_1' = 1$ ,  $z_2' = 0$ , то  $v_1 = \sqrt{c_1}/m_1$ . Отсюда для финальных скоростей  $V_1$ ,  $V_3$  получаем такие выражения

$$V_1 = v_1 \left( z_1'(t_k) + z_2'(t_k) \frac{m_3}{(m_2 + m_3) \cos \alpha} \right) \quad (2.5)$$

$$V_3 = -\frac{v_1 m_1}{m_2 + m_3} \left( z_1'(t_k) + z_2'(t_k) \frac{1}{\cos \alpha} \right)$$



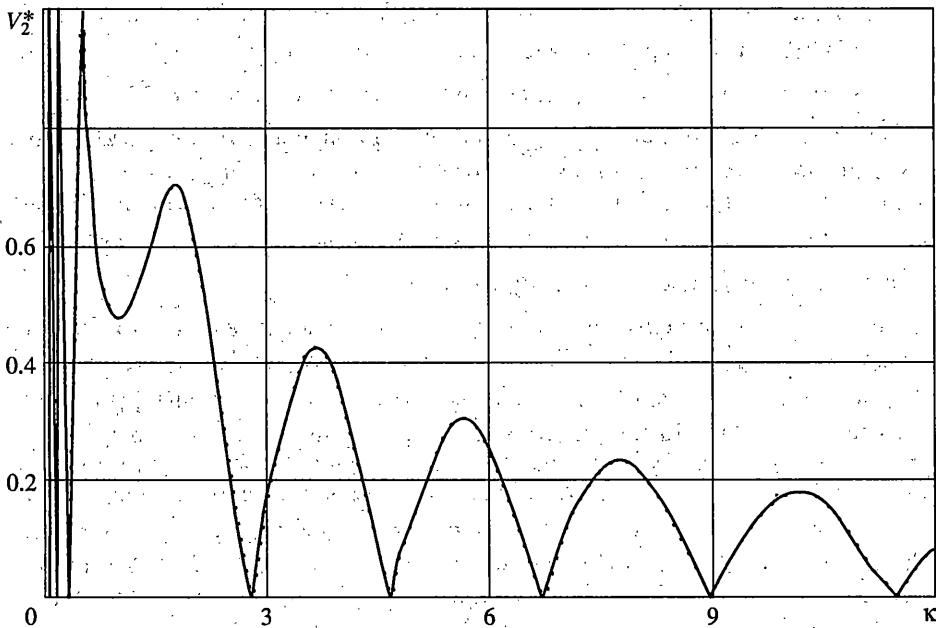
Фиг. 1



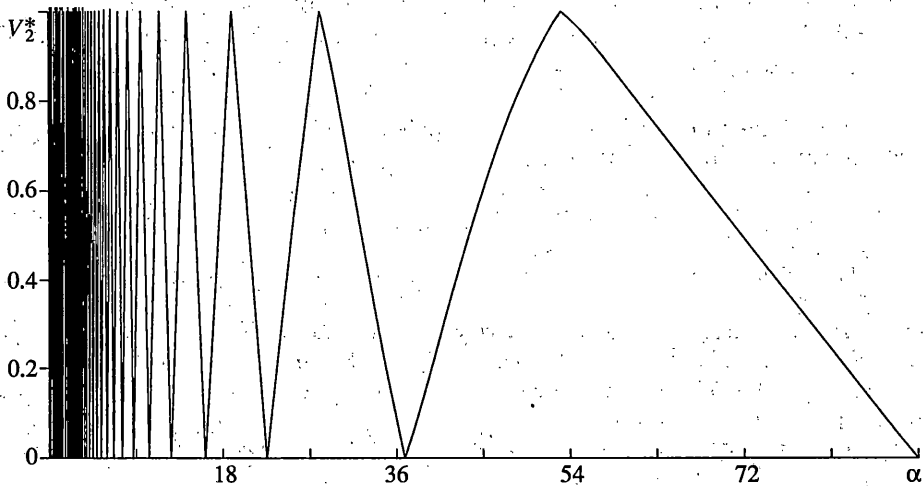
Фиг. 2

**3. Обсуждение полученных результатов.** Наиболее простой вид система (1.9) принимает в случае  $\cos \alpha = 0$ ; она распадается при этом на две независимых консервативных подсистемы, откуда сразу следует, что  $z_1'(t_k) = -1$ ,  $z_2'(t_k) = 0$ . Очевидно, что это значение физически нереализуемо, оно достигается лишь в пределе при стремлении хотя бы одного из отношений  $m_1/m_2$  или  $m_3/m_2$  к нулю (первый из случаев имеет место, когда промежуточное тело намного массивнее, чем бьющее, второй — когда оно намного массивнее, чем защищаемое тело).

Для значений угла  $\alpha$ , несколько меньших, чем  $90^\circ$ , величина  $V_2^* = -z_2'(t_k)$  принимает положительные значения, причем она максимальна при  $k \rightarrow 0$ , а величина



Фиг. 3



Фиг. 4

этого максимума растет вместе с  $\cos \alpha$  (фиг. 1). Как показывают проведенные расчеты, в диапазоне  $\alpha \in (60^\circ, 90^\circ)$  зависимость  $V_2^*(\kappa)$  довольно проста: эта функция сначала убывает от своего максимального значения (при  $\kappa = 0$ ) до нуля, а затем сохраняет малые (в пределах 0.1) значения. Кривые 1–3 на фиг. 1 отображают эту зависимость для значений  $\alpha = 85^\circ, 80^\circ$  и  $70^\circ$ .

При  $\alpha = 60^\circ$  имеем  $V_2^*(0) = 1$ ,  $V_2^*(6.3) = 0$ ,  $V_2^*(\kappa) \leq 0.12$  при  $\kappa > 6.3$  (кривая 1 на фиг. 2).

Данное значение угла является первым из критических: при переходе через это значение функция  $V_2^*(\kappa)$  приобретает точку максимума при  $\kappa > 0$ . Затем величина  $V_2^*(0)$  убывает вместе с  $\alpha$  до следующего критического значения  $\alpha = 45^\circ$  (кривая 2 на фиг. 2), при переходе через которое функция  $V_2^*(\kappa)$  приобретает точку минимума. По мере убывания угла  $\alpha$  число экстремумов этой функции увеличивается на единицу при переходе через каждую точку  $\alpha_k = \pi/k$  ( $k = 3, 4, \dots$ ). На фиг. 3 представлена зависимость  $V_2^*(\kappa)$  для  $\alpha = 10^\circ = \pi/18$ . Здесь видно наличие резких изменений величины  $V_2^*$  в диапазоне от нуля до единицы на интервале  $\kappa \in (0, 1)$ .

На фиг. 4 показан график функции  $V_2^*(\alpha)$  при значении  $\kappa = 1$ . Можно сделать вывод: при уменьшении геометрического параметра  $\alpha$  (что соответствует уменьшению массы среднего тела при неизменных массах крайних тел) вид функции  $V_2^*(\kappa)$  усложняется, так как число ее экстремумов неограниченно увеличивается.

С практической точки зрения, для обеспечения наилучшей передачи импульса от первого тела к третьему следует использовать значения параметров, соответствующие максимумам величины  $V_2^*$ , а для смягчения силы удара – ее минимумам. К примеру, если  $m_3 = 3m_1$ ,  $c_2 = c_1$ , то вычисления по формуле (2.5) для нескольких точек экстремума кривой, представленной на фиг. 4, приводят к следующим результатам.

В правой точке максимума  $\alpha = 54^\circ$ , откуда  $m_2 = 1.11m_1$ , в следующей (слева) точке минимума  $\alpha = 37^\circ$ ,  $m_2 = 0.39m_1$ , а в следующей точке максимума  $\alpha = 30^\circ$ ,  $m_2 = 0.12m_1$ . Для этих трех случаев значения  $V_3$  равны  $0.41v_1$ ,  $0.29v_1$  и  $0.37v_1$  соответственно. Для сравнения, в отсутствие промежуточного тела получим значение  $V_3 = \frac{1}{3}v_1$ , а при  $m_2 = 1.73m_1$  (являющееся, по некоторым оценкам, оптимальным для передачи ударного импульса, см. [4]) получаем  $\alpha = 61^\circ$ ,  $V_3 = 0.44v_1$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00520).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.
2. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механического удара. М.: Наука, 1977. 223 с.
3. *Зукас Дж.А., Николас Т., Свифт Х.Ф.* Динамика удара. М.: Мир, 1985. 296 с.
4. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.
5. *Иванов А.П.* Об ударах в системе с несколькими неударяющими связями // ПММ. 1987. Т. 51: Вып. 4. С. 559–566.

Москва

Поступила в редакцию  
10.01.2000