

УДК 532.595:534.6

© 2002 г. Л.Д. АКУЛЕНКО, С.В. НЕСТЕРОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНЕРЦИОННЫХ И УПРУГИХ СВОЙСТВ ПРОПИТАННЫХ ЖИДКОСТЬЮ ГРАНУЛИРОВАННЫХ СРЕД РЕЗОНАНСНЫМ МЕТОДОМ

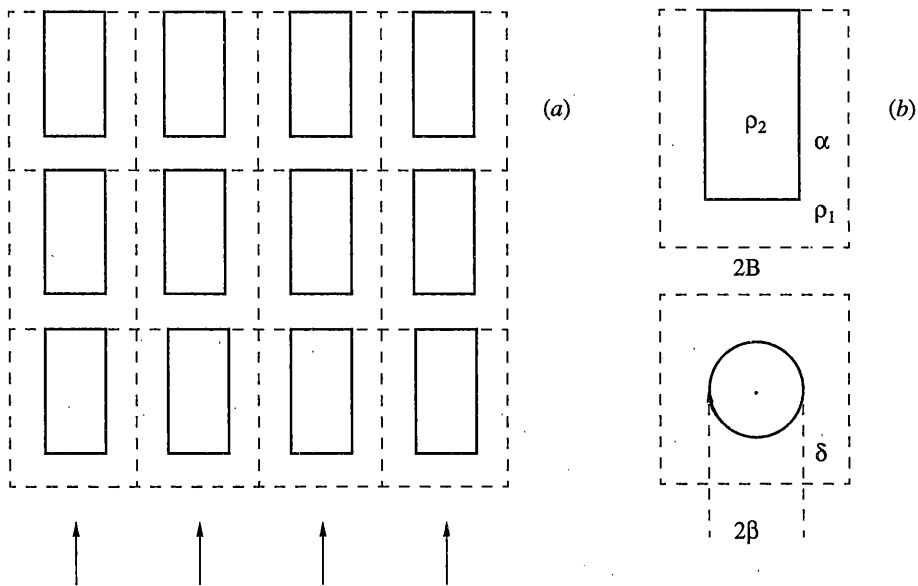
Предложена математическая модель гранулированных сред, пропитанных жидкостью, находящихся под действием акустической волны. Разработаны теоретические основы и создана лабораторная установка для определения инерционных и упругих характеристик таких сред на основе резонансного метода. Проведено тестирование установки и выполнен ряд исследований по измерению “динамической” плотности и модуля объемной упругости гранулированных сред на образцах искусственного и естественного происхождения. Получены и проанализированы качественные эффекты; установлена и измерена зависимость “динамической” плотности от частоты волны; исследована зависимость колебаний системы от формы и положения образцов в резонаторе, а также от упругой податливости резонатора (поправка Кортвега). Результаты проведенных комплексных теоретических и экспериментальных исследований гидродинамических характеристик гранулированных сред, пропитанных жидкостью, представляют интерес в научном и практическом аспектах для гидроакустики и морской геофизики.

1. Введение. Гранулированная среда, пропитанная жидкостью, представляет собой в определенном смысле “нечто среднее” между жидкостью и твердым телом по отношению к таким основным механическим характеристикам как объемная плотность, модули объемной упругости и сдвига, коэффициент Пуассона и др. Построение адекватных моделей таких сред и их анализ представляют значительный интерес в теоретическом и прикладном аспектах.

В.С. Нестеровым [1] предложены механическая и математическая модели гранулированной среды, пропитанной жидкостью; изложим весьма кратко их основные свойства. Предполагается, что среда состоит из одинаковых цилиндрических зерен – твердых частиц, оси которых параллельны; пространство между зернами целиком заполнено жидкостью. Элементарной ячейкой среды считается твердое цилиндрическое ядро и прилегающая к нему жидкая оболочка. На фиг. 1,*a* изображено продольное сечение такой среды; на фиг. 1,*b* схематически представлены продольное и поперечное сечения ячейки.

Проводится исследование поведения среды в поле плоской акустической волны, падающей параллельно осям цилиндров, см. фиг. 1,*a*. Основные результаты теоретического анализа сводятся к следующим положениям.

1. В случае низкочастотного воздействия, когда толщина вязкого пограничного слоя больше расстояния между твердыми частицами, эти зерна и пропитывающая их жидкость движутся практически как одно целое. Среда обладает эффективной “динамической” плотностью ρ_* , которая при достаточно малых значениях безраз-



Фиг. 1

мерного параметра κ описывается комплексным выражением [1]:

$$\rho_* = \rho_1 \eta + \rho_2 (1 - \eta) - i(3/8) \kappa \Delta \rho (1 - \eta) \xi (1 - \xi), \quad i = \sqrt{-1} \quad (1.1)$$

$$\kappa = \Delta \rho \omega \delta^2 \mu^{-1}, \quad |\kappa| \ll 1, \quad \Delta \rho = \rho_2 - \rho_1, \quad \eta = V_1 (V_1 + V_2)^{-1}, \quad \xi = S_1 (S_1 + S_2)^{-1}$$

В (1.1) введены основные геометрические, массо-инерционные, кинематические и динамические характеристики среды и внешнего воздействия: ρ_1, ρ_2 – объемные (статические) плотности жидкости и твердых частиц соответственно; ω – частота акустической волны; μ – коэффициент вязкости окружающей частицу жидкости; δ – толщина жидкой оболочки ($\delta = B - \beta$). Коэффициент η определяет пористость среды: V_1, V_2 – объем жидкой оболочки и частицы соответственно; коэффициент ξ характеризует “средний просвет”: S_1, S_2 – площадь поперечного сечения оболочки и зерна соответственно.

Отметим, что форма и линейные размеры зерен в выражении (1.1) $\text{Re} \rho_*$, определяющем инерционную характеристику среды, явно не содержатся. Таким образом, в случае низких частот величина $\text{Re} \rho_*$ есть средняя статическая плотность среды ρ_0 , которая определяется обычным взвешиванием: $\rho_0 = \gamma/g$, где γ – удельный вес, $\gamma = (P_1 + P_2) (V_1 + V_2)^{-1}$, P_1, P_2 – вес жидкости и зерен соответственно, g – ускорение сил тяготения. “Индивидуальные” характеристики среды содержатся в относительно малой мнимой части $\text{Im} \rho_*$ (1.1). Величина $\text{Im} \rho_*$ определяет затухание колебаний в такой среде, которое, как следует из вычислений, пропорционально квадрату частоты ω и обратно пропорционально коэффициенту вязкости μ .

2. В случае высоких частот, когда толщина пограничного слоя значительно меньше расстояния между зернами, эти частицы и жидкость движутся практически независимо друг от друга. Среда обладает “динамической” плотностью ρ^* , определяемой приближенным выражением [1]:

$$\rho^* = \rho_1 [1 + (1 - \eta) \chi] - i(1 - \eta) \chi^2 (2\mu \rho_1 / \omega B^2)^{1/2} \quad (1.2)$$

$$\chi = \Delta \rho [\rho_1 (1 - \xi) + \rho_2 \xi]^{-1}$$

Здесь B – радиус жидкой оболочки (см. фиг. 1, *b*); остальные величины указаны выше. Следует отметить, что аналогично $Re\rho_*$ (1.1) в выражение $Re\rho^*$ (1.2) входят, в основном, общие характеристики составляющих среды: ρ_1 , ρ_2 и η , а также просвет ξ . В сравнительно малую мнимую часть $Im\rho^*$ (1.2), определяющую ее диссипативные свойства, входит параметр B – “средний” радиус жидкой оболочки и другие “индивидуальные” характеристики. При высокочастотном воздействии величина $Re\rho^*$ существенно отличается от статической плотности ρ_0 . Причина эффекта заключается в значительном уменьшении толщины пограничного слоя, из-за чего твердая частица и ее жидкая оболочка движутся практически независимо одна от другой. При этом складываются не массы составляющих ячейки, а их обратные величины, т.е. имеет место “параллельное соединение масс”. Структурные элементы ξ и η в выражениях ρ_* (1.1) и ρ^* (1.2) входят в совершенно различных сочетаниях.

Таким образом, анализ выражений (1.1), (1.2) свидетельствует, что принятая модель гранулированной среды, пропитанной вязкой жидкостью, содержит ее основные характеристики и отвечает естественным гидромеханическим представлениям. Хотя эта модель весьма идеализирована, однако ее целесообразно использовать в качестве теоретической основы и провести экспериментальную проверку на реальных гранулированных средах таких как песок, глина, мелкий гравий (хрящ), пропитанных водой.

2. Постановка задачи и описание резонансного метода. Ставится задача экспериментального определения механических характеристик пропитанных жидкостью гранулированных сред как естественного происхождения, так и искусственно изготовленных, посредством воздействия акустической волны. Основная цель заключается в нахождении инерционных и упругих свойств – “динамической” плотности и модуля объемной упругости. В качестве основного экспериментального подхода используется так называемый “резонансный метод”.

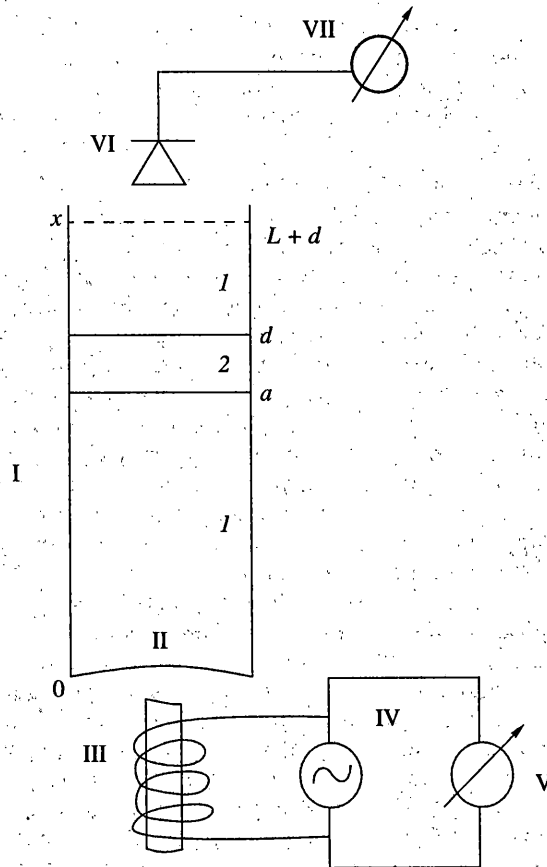
Научная литература содержит только краткие упоминания об используемой далее модификации резонансного метода, см. [2]. Поэтому представляется целесообразным дать достаточное для понимания существа метода описание теории и соответствующей лабораторной установки, использованной при проведении экспериментов. Установка содержит вертикально расположенную весьма жесткую металлическую (стальную или дуралюминиевую) трубу (I) круглого сечения, нижний конец которой плотно закрывается металлической (обычно железной) мембраной (II), см. фиг. 2. Труба заполняется жидкостью (1), удовлетворяющей определенным требованиям (как правило, питьевая вода). Труба и жидкость образуют колебательную систему – резонатор.

Плотность жидкости обозначается через ρ_1 , скорость звука в ней – c_1 ; тогда модуль объемной упругости жидкости равен по определению $K_1 = \rho_1 c_1^2$; высота столба жидкости равна L , площадь поперечного сечения трубы – S . Считается, что $L \gg D$, где D – внутренний диаметр трубы; как правило, уровень воды (жидкости) практически достигает длины трубы.

Под мембраной вдоль оси трубы помещается электромагнитный излучатель (III), возбуждаемый генератором (IV) переменного напряжения, частота которого f плавно регулируется в пределах $f = 20$ Гц – 200 кГц и измеряется частотомером (V) с относительной погрешностью порядка 0.05%. Над свободной поверхностью жидкости в воздухе располагается микрофон (VI), сигнал с которого подается на индикатор (VII) резонанса – аналоговый вольтметр или осциллограф. Принципиальная схема лабораторной установки изображена на фиг. 2.

Существо измерений на основе резонансного метода заключается в том, что изменением частоты f задающего генератора добиваются наступления резонанса колебательной системы, который соответствует максимальному показанию индикатора. Резонансные частоты при этом фиксируются частотомером; они представляют собой

последовательный дискретный ряд значений f_1, f_2, \dots, f_N . Экспериментальное определение частот f_n позволяет рассчитать значения скорости звука $c_{1n} = 2Lf_n/n$, отвечающие n -й моде собственных (точнее, резонансных) колебаний, $n = 1, 2, \dots, N$. Отметим, что получающиеся значения c_{1n} ниже, чем скорость звука c_{10} в безграничной жидкости, поскольку имеет место существенная упругая податливость стенок трубы.



Фиг. 2

Затем в жидкость на расстоянии a от мембраны вносится относительно тонкий и плоский образец (2), например кругового сечения, теоретически совпадающего с сечением трубы; на практике допустимы значительные отклонения от этого требования. Обозначим через d толщину образца, ρ_2 – плотность, c_2 – скорость звука в материале образца. Произведем указанные выше измерения резонансных частот f_n^* с учетом возмущающего влияния образца. Посредством соотношений, связывающих значения f_n и f_n^* , определяются искомые характеристики среды, из которой изготовлен образец.

Найдем эти выражения. Введем функции $u_j(x, t)$ ($j = 1, 2, 3$) – потенциалы звукового поля в областях 1, 2, 3, обозначенных на фиг. 2. Каждая из них удовлетворяет гиперболическому уравнению вида [2]:

$$\ddot{u}_j = c_j^2 u_j'' \quad (j = 1, 2, 3), \quad c_1 = c_3 \quad (2.1)$$

Точками в (2.1) обозначены производные по времени t , штрихами – по эйлеровой координате x , отсчитываемой вдоль оси трубы от нижнего конца; c_j – скорость звука в соответствующей области. Давление p_j и скорость v_j частиц среды и жидкости связаны с потенциалами u_j формулами

$$p_j = \rho_j \dot{u}_j, \quad v_j = -u_j' \quad (j = 1, 2, 3), \quad \rho_1 = \rho_3 \quad (2.2)$$

Поскольку рассматривается случай гармонического воздействия, то установившиеся решения уравнений (2.1) имеют вид $u_j = U_j(x) \exp(i\omega t)$, где $\omega = 2\pi f$, $U_j(x)$ – искомые формы установившихся колебаний. В результате подстановки в (2.1) для неизвестных функций $U_j(x)$ получаются уравнения

$$U_j'' + k_j^2 U_j = 0, \quad k_j^2 = \omega^2 c_j^{-2}, \quad k_1 = k_3 \quad (2.3)$$

и соответствующие граничные условия; установим эти условия. В силу предположения, что мембрана является “мягкой” в акустическом смысле, при $x = 0$ имеет место граничное условие первого рода для функции $U_1(x)$. Аналогичное условие выполняется на свободной поверхности жидкости при $x = L + d$ для функции $U_3(x)$. В точках $x = a$ и $x = a + d$, где происходит соприкосновение образца и жидкости, для функций $U_1(x)$, $U_2(x)$ и $U_3(x)$ должны выполняться условия непрерывности давлений и скоростей (2.2). В результате приходим к следующей совокупности граничных соотношений для функций $U_j(x)$:

$$U_1(0) = 0, \quad \rho_1 U_1(a) = \rho_2 U_2(a), \quad U_1'(a) = U_2'(a) \quad (2.4)$$

$$\rho_2 U_2(a + d) = \rho_1 U_3(a + d), \quad U_2'(a + d) = U_3'(a + d), \quad U_3(L + d) = 0$$

Требуется построить решение системы краевых задач (2.3), (2.4) и определить возмущенные с учетом влияния образца собственные значения величины $f^* = \omega^* / 2\pi$.

Искомое решение краевой задачи векторного вида (2.3), (2.4) имеет представление

$$U_1 = C_1 \sin k_1 x, \quad U_2 = C_2 \sin k_2 x + C_3 \cos k_2 x, \quad U_3 = C_4 \sin k_1(L + d - x) \quad (2.5)$$

где C_1, \dots, C_4 – постоянные, не обращающиеся в нуль и удовлетворяющие граничным условиям

$$\rho_1 C_1 \sin k_1 a - \rho_2 (C_2 \sin k_2 a + C_3 \cos k_2 a) = 0 \quad (2.6)$$

$$k_1 C_1 \cos k_1 a - k_2 (C_2 \cos k_2 a - C_3 \sin k_2 a) = 0$$

$$\rho_2 (C_2 \sin k_2(a + d) + C_3 \cos k_2(a + d)) - \rho_1 C_4 \sin k_1(L - a) = 0$$

$$k_2 (C_2 \cos k_2(a + d) - C_3 \sin k_2(a + d)) + k_1 C_4 \cos k_1(L - a) = 0$$

Выражения (2.5) выбраны таким образом, что условия для U_1, U_3 на концах трубы удовлетворяются автоматически. Приравняв нулю определитель системы (2.6), получим характеристическое уравнение относительно неизвестной ω (или f). Это уравнение учитывает влияние образца на собственные частоты. Вследствие громоздкости оно не приводится, а исследуется приближенно методами возмущений.

Предположим, что $k_2 d \ll 1$, т.е. толщина образца $d \ll L$, и его влияние на частоты относительно невелико. Тогда в первом приближении имеет место соотношение для определения ω вида

$$\sin k_1 L + k_2 d (h \cos k_1 a \cos k_1(L - a) - h^{-1} \sin k_1 a \sin k_1(L - a)) = 0$$

$$k_{1,2} = \omega / c_{1,2}, \quad h = (k_1 / k_2)(\rho_2 / \rho_1) = \rho_2 c_2 / \rho_1 c_1 \quad (2.7)$$

При $d \rightarrow 0$ получим из (2.7) уравнение $\sin k_1 L = 0$, определяющее невозмущенные собственные частоты $\omega_n = \pi n c_1 / L$, т.е. $f_n = 1/2 \pi n c_1 / L$ ($n = 1, 2, \dots, N$). Учитывая малость

величины $k_2 d$, из (2.7) с точностью до квадратичных членов находим возмущенные собственные частоты ω_n^* :

$$\omega_n^* = \omega_n [1 - (-1)^n d L^{-1} ((\rho_2 / \rho_1) \cos(\pi n a / L) \cos(\pi n (1 - a / L)) - \rho_2 c_2^2 (\rho_1 c_1^2)^{-1} \sin(\pi n a / L) \sin(\pi n (1 - a / L)))] , \quad \omega_n^* \leq \omega_n \quad (2.8)$$

Естественно, предполагается, что номер моды n не очень велик. Из формулы (2.8) получаются следствия.

1. Пусть образец помещен в пучность скорости акустической волны (см. (2.2)), т.е. имеет место равенство $\pi n a / L = \pi m$, где $m < n$ – целое. Тогда для смещения $\Delta \omega_n$ резонансной частоты ω_n получим выражения

$$\frac{\Delta \omega_n}{\omega_n} = - \frac{d \rho_2}{L \rho_1} = - \frac{\rho_2 V_2}{\rho_1 V_1} = - \frac{M_2}{M_1}, \quad \Delta \omega_n = \omega_n^* - \omega_n \quad (2.9)$$

где $V_{1,2}$ – объем, $M_{1,2}$ – масса жидкости и образца соответственно. Из (2.9) можно определить “динамическую” плотность ρ_2 образца при известном объеме V_2 или его “динамическую” массу M_2 на основе измерений невозмущенных ω_n и возмущенных ω_n^* частот. Кроме того, из (2.9) следует, что внесение образца в жидкость приводит к уменьшению собственных частот колебаний резонатора ($\Delta \omega_n < 0$), что представляется естественным, так как суммарная масса системы увеличивается.

2. Пусть образец помещен в пучность давления звуковой волны (см. (2.2)), т.е. имеет место равенство $\pi n a / L = \pi (m + 1/2)$, где $m < n$ – целое. Тогда аналогично из (2.8) получим выражения для смещения $\Delta \omega_n$ частоты колебаний резонатора ω_n :

$$\frac{\Delta \omega_n}{\omega_n} = - \frac{\rho_2 c_2^2 d}{\rho_1 c_1^2 L} = - \frac{K_2 V_2}{K_1 V_1}, \quad \Delta \omega_n < 0 \quad (2.10)$$

где $K_{1,2} = \rho_{1,2} c_{1,2}^2$ – модули объемной упругости жидкости и образца соответственно. Из (2.10) может быть определена величина K_2 на основе измерений резонансных частот ω_n , ω_n^* , величины K_1 и объемов V_1 , V_2 . Следует отметить, что при определении $K_{1,2}$ необходимо ввести поправку на упругую податливость стенок трубы, см. ниже. Таким образом, формулы (2.9), (2.10) дают методическую основу для расчета динамических характеристик ρ_2 , K_2 материала образца. Переходим к изложению результатов экспериментальных исследований.

3. Измерения “динамической” плотности различных материалов. Для “динамического” взвешивания и определения модуля объемной упругости на основе соотношений (2.9), (2.10) были изготовлены несколько однотипных установок (см. фиг. 2), различающихся только размерами и толщиной стенок труб, заполненных водой (резонаторов). Были применены стальные или дуралюминиевые цельнотянутые трубы, длины которых варьировались в пределах $L = 40$ – 170 см, внутренний диаметр – $D = 4$ – 10 см, а толщина стенок – $1/2 \delta D = 0.3$ – 1 см. Как отмечалось, важной характеристикой трубы является “граничная” частота Кортвега f_0 [3], которая для различных труб изменялась в пределах $f_0 = 15$ – 32 кГц; она должна быть больше собственных частот резонаторов.

Для проведения надежных измерений проводилась тщательная очистка трубы, жидкости и образцов от загрязнений и примесей, которые сильно влияют на добротность исследуемой колебательной системы. Уменьшение добротности приводит к увеличению ошибок измерений собственных частот и может сделать невозможным эти измерения. Использовалась хорошо прокипяченная вода, которая отстаивалась в трубе в течение 1–2 суток для удаления воздушных пузырьков (продуктов аэрации

Таблица 1

f_n , Гц	f_n^* , Гц	Δf_n , Гц	M_2 , г
1794	1780	-14	17.08
3560	3531	-29	17.60
5299	5258	-41	17.34
7025	6970	-55	17.22
8729	8657	-72	17.87

питьевой воды). Растворенный в воде воздух и другие газы сильно увеличивают затухание колебаний резонатора и приводят к искажению результатов измерений. При исследовании природных или искусственных гранулированных сред, пропитанных водой, их помещают в подходящие стеклянные или пластмассовые, или резиновые резервуары. Все манипуляции с образцами производятся без доступа воздуха (под водой).

Приведем результаты измерений “динамической” плотности (массы) ряда образцов. Рассмотрим сперва контрольные испытания для круглой латунной пластинки, которые проводились в стальной трубе со следующими характеристиками (условно резонатор № 1): $D = 8.4$ см, $1/2\delta D = 0.85$ см, длина столба жидкости $L = 39$ см, масса воды $M_1 = 2161$ г, частота Кортевега $f_0 = 19$ кГц, добротность $Q = 900$ для $f = f_1$. Испытуемая пластинка имела практически тот же диаметр; ее толщина $d = 0.04$ см, объем $V_2 = 2.06$ см³, статическая масса $M_{20} = \rho_{20}V_2 = 17.15$ г. Пластинка подвешивалась на тонких проволочках, не препятствующих ее перемещениям, под свободной поверхностью воды вблизи пучности скорости. Результаты измерений частот f_n , f_n^* , разности Δf_n и вычислений согласно (2.9) “динамической” массы M_2 латунной пластинки представлены в табл. 1.

Вычисление среднего значения по всем частотам приводит к величине $\langle M_2 \rangle = 17.41 \pm 0.30$ г, которая на 1.5% отличается от статической массы M_{20} , что находится в пределах погрешности эксперимента. Таким образом, в рассматриваемом диапазоне частот “динамическая” и статическая плотности образца (латунной пластинки) совпадают, т.е. отвечают случаю низких частот (1.1). Проведенные контрольные испытания свидетельствуют, что излагаемый подход дает приемлемые надежные результаты при экспериментальном определении плотности.

Приведем теперь результаты измерений “динамической” массы и плотности различных гранулированных сред с помощью той же установки (резонатор № 1). Произведем динамическое взвешивание мелкого песка, пропитанного водой. Характеристики среды следующие: размеры песчинок $\alpha \cong \beta = 0.02$ см, пористость $\eta \cong 0.43$; просвет ξ , вычисленный согласно [1] по формуле $\xi \cong \eta/(2-\eta) \cong 0.27$; объем среды (образца) $V_2 = 23$ см³, статическая масса $M_{20} = \rho_{20}V_2 = 45$ г. Результаты измерений приведены в табл. 2.

Из полученных данных следует, что в образце совершается переход от низкочастотной “динамической” плотности ρ_* к высокочастотной ρ^* , описываемых действительными частями выражений (1.1), (1.2) соответственно. Если использовать формулу (1.2) и подставить приведенные выше значения η и ξ , то $\text{Re } \rho^* = 1.66$ г/см³, $M_2^* = 38.2$ г; они соответствуют данным табл. 2.

Отметим, что определение мнимой части ρ_* , ρ^* требует постановки более прецизионных экспериментов. Эти величины находятся с существенно большими относи-

f_n , Гц	f_n^* , Гц	Δf_n , Гц	M_2 , г	ρ_2 , г/см ³
1806	1769	-37	45.2	1.97
3590	3515	-75	46.1	2.00
5342	5245	-101	41.6	1.81
7080	6963	-117	36.6	1.59

тельными погрешностями вследствие грубости оценок “индивидуальных” характеристик среды: α , A , β , B , δ и др.

Изложим кратко весьма интересные в прикладном аспекте результаты измерений “динамической” плотности некоторых других естественных сред с помощью указанной экспериментальной установки. Так было проведено динамическое взвешивание плотного образца глины, содержащей только естественную влагу: объем $V_2 = 16$ см³, статическая плотность $\rho_0 = 2.15$ г/см³. Возбуждение резонансных колебаний в пределах $f_n^* = 1.8-7$ кГц не привело к переходу значений плотности от низкочастотной к высокочастотной согласно (1.1), (1.2). Это свойство объясняется весьма малой величиной просвета ξ . Для его увеличения опыт был модифицирован следующим образом. Из того же сорта глины была изготовлена водная суспензия и производилось ее осаждение в течение суток. Из осажденного материала был изготовлен образец среды с характеристиками: $V_2 = 35$ см³, $\rho_{20} = 1.77$ г/см³, $M_{20} = 62$ г. Динамическое взвешивание в указанном выше диапазоне резонансных частот показало несомненный переход плотности от ρ_* к ρ^* , который объясняется для данного сорта глины значительным увеличением значения коэффициента просвета ξ (см. $Re\rho^*$ (1.2)).

Динамическое взвешивание мелкого гравия, пропитанного водой, т.е. хряща, состоящего из кусочков гранита размерами $\alpha \cong \beta \leq 0.5$ см, привело в рассматриваемом диапазоне частот к величинам плотности, которые соответствуют высокочастотной области значений, описываемых выражением $Re\rho^*$ (1.2).

Отметим, что результаты измерений естественных сред привели к отличию от теоретических значений с относительной погрешностью, не превышающей 5%. Таким образом, предложенная модель гранулированных сред, пропитанных водой, вполне удовлетворительна для практических целей гидроакустики и морской геофизики.

Изучим теперь влияние положения образца, задаваемое координатой a , на резонансные характеристики системы. Весьма показательным является изменение добротности при плоскопараллельном перемещении образца вдоль трубы. Для контрольного образца – латунной пластинки – установлено, что добротность практически не зависит от ее положения и совпадает с добротностью свободного резонатора. При перемещении образца гранулированной среды обнаружено, что величина добротности периодически изменяется; наименьшее значение достигается в точках пучности скорости, что соответствует наиболее сильному поглощению энергии акустических волн этой средой. Такое поведение системы подтверждает правомерность введения понятия “динамическая” плотность для пропитанных жидкостью гранулированных сред.

Отметим еще одно важное обстоятельство, установленное экспериментально в процессе измерений; теоретическое его обоснование вызывает определенные аналитические трудности. А именно, обнаружено, что если средняя плотность образца не более чем в 2 раза превышает плотность жидкости (воды), то удовлетворительная точность измерений инерционных характеристик образцов посредством резонансного

Таблица 3

f_n , Гц	$c_{1n} \cdot 10^{-5}$, см/с	$c_{10} \cdot 10^{-5}$, см/с	f_n , Гц	$c_{1n} \cdot 10^{-5}$, см/с	$c_{10} \cdot 10^{-5}$, см/с
1832	1.43262	1.48203	10942	1.42611	1.48095
3664	1.43262	1.48203	12744	1.42369	1.48112
5490	1.43106	1.48123	14573	1.42451	1.48544
7312	1.42950	1.48080	16307	1.41690	1.48169
9128	1.42762	1.48045			

метода получается также при форме образцов, сильно отличающейся от принятой в расчетах (см. п. 2). Требуется лишь, чтобы образец не был протяженным и ориентированным вдоль оси трубы.

4. Измерения модуля объемной упругости различных сред. Как установлено в п. 2 (см. (2.10)), для измерения модуля объемной упругости K_2 образец помещается в пучность давления. На основе относительной разности резонансных частот и модуля объемной упругости жидкости K_1 из простого соотношения определяется искомая величина K_2 . Однако при этом следует учитывать два существенных обстоятельства: влияние упругой податливости стенок трубы на скорость звука c_1 в жидкости (без образца); влияние этой неидеальности на результаты измерений (при наличии образца).

С целью иллюстрации влияния податливости стенок трубы на скорость звука и способа компенсации этого эффекта при вычислениях путем учета поправки Кортвега [3] приведем соответствующие экспериментальные результаты, полученные на основе резонансного метода. Для этого используется другая установка (резонатор № 2), содержащая трубу из нержавеющей стали с параметрами: длина $L = 40$ см, внутренний диаметр $D = 4.1$ см, толщина стенки $1/2 \delta D = 0.8$ см, модуль Юнга материала $E = 2 \cdot 10^2$ ГПа; длина столба воды $L_1 = 39.1$ см.

Для каждой резонансной частоты f_n скорость звука в воде рассчитывается по формуле $c_{1n} = 2 L f_n / n$ (см. п. 2). Согласно поправке Кортвега [3] соответствующее значение скорости звука в безграничной среде c_{10} равно

$$c_{10} = c_{1n} (1 + 0.0765 (1 - (f_n / f_0)^2)^{-1})^{1/2} \quad (4.1)$$

Здесь $f_0 = 32$ кГц – частота Кортвега, вычисленная для данной трубы. Естественно, предполагается, что $f_n < f_0$, т.е. номер n моды “не очень велик”. В табл. 3 представлены результаты измерений частот f_n и вычислений величин c_{1n} , c_{10} с учетом поправки (4.1).

Результаты измерений в табл. 3 приведены для температуры воды $\theta = 22^\circ\text{C}$; среднее значение c_{10} по всем частотам и среднеквадратичное отклонение даются формулой

$$c_{10} = (1.4818 \pm 0.0015) \cdot 10^5 \text{ см/с} \quad (4.2)$$

Сравнение значения (4.2) с результатами специальных измерений для дистиллированной воды при той же температуре [4] показывает, что относительная погрешность меньше 0.5%.

Таким образом, после введения поправки Кортвега согласно (4.1) скорость звука c_{10} (4.2) определяется достаточно точно. На основе этой величины вычисляется модуль объемной упругости воды

$$K_{10} = \rho_1 c_{10}^2 = 2.2 \text{ ГПа} \quad (4.3)$$

с относительной погрешностью, меньшей 1%. Аналогично (4.1)–(4.3), используя поправку Кортвега, дадим приведенное выражение для модуля объемной упругости образца K_{20} :

$$K_{20} = K_{2n} \left(1 - \frac{K_{2n}}{E} \frac{D}{\frac{1}{2} \delta D} \left(1 - \left(\frac{f_n}{f_0} \right)^2 \right)^{-1} \right)^{-1} \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (4.4)$$

где K_{2n} – значения модуля объемной упругости образца, вычисленные на основе измерений резонансных частот f_n , f_n^* согласно (2.10); E – модуль Юнга стали. Из (4.4) следует, что обычно поправка Кортвега невелика, т.е. $K_{20} \approx K_{2n}$, поскольку для рассматриваемых сред $K_{2n}/E \leq 10^{-2}$, а величины отношений $D/\frac{1}{2}\delta D \leq 3$, $f_n/f_0 \leq 1$.

Проведем сперва контрольные измерения величины K_{20} для некоторых материалов с другим резонатором (№ 3); труба обладает характеристиками: $D = 10$ см, $\frac{1}{2}\delta D = 1$ см, $L = 130$ – 140 см (высота столба воды), частота Кортвега $f_0 = 15$ кГц. Образцы помещаются в пучность давления и производятся измерения резонансных частот f_n , f_n^* . Вычисления выполняются по формулам (2.10), (4.4).

Приведем данные по контрольным измерениям различных образцов синтетической амортизационной резины с плотностью $\rho_2 = 1.13$ г/см³ на частоте $f_1^* = 500$ Гц при температуре $\theta = 9.5^\circ\text{C}$. В случае цилиндрического образца толщиной $d = 2.5$ см, радиусом $\beta = 4.75$ см (объем $V_2 = 177.5$ см³) получено значение $K_{20} = 1.6$ ГПа. Для половины указанного образца ($V_2 = 88$ см³) получена величина $K_{20} = 1.65$ ГПа, а для четверти образца ($V_2 = 44$ см³) – $K_{20} = 1.52$ ГПа, т.е. измерения приводят к большей погрешности вследствие существенного изменения формы образца. Среднее значение $K_{20} = 1.6$ ГПа, а справочные данные [5, 6] приводят к величинам $K = (1.1$ – $1.9)$ ГПа.

Аналогичные измерения модуля объемной упругости образца стекла неправильной формы объемом $V_2 = 59$ см³ (марка неизвестна) привели к значению $K_{20} = 3.64 \cdot 10$ ГПа согласно справочным данным [5, 6] для различных промышленных стекол $K = (3.36$ – $4.34) \cdot 10$ ГПа.

Экспериментальные исследования пористой резины показывают, что существует нижний предел значений величины K_2 , поддающийся надежным измерениям с помощью резонансного метода; его оценка $K_2 \approx 2.5 \cdot 10^{-1}$ МПа. При этом может быть обеспечена погрешность измерений, не превышающая 5–10%.

Следует отметить, что весьма жесткие материалы – металлы также приводят к большим погрешностям измерений модуля объемной упругости вследствие малых эффектов сжатия образцов. Например, у латуни [5] величина $K = 10^2$ ГПа измерения на основе резонансного метода приводят к значению $K_{20} = 0.5 \cdot 10^2$ ГПа.

Как отмечалось в п. 3, при проведении измерений требуется тщательная подготовка установки и образцов с целью устранения воздушных пузырьков и загрязнений. Она связана с многочисленными технологическими тонкостями и ухищрениями, которые здесь не обсуждаются. Приведем ряд результатов измерений модуля объемной упругости образцов гранулированных сред, пропитанных водой.

1. Мелкий песок средней плотности (включая воду) $\rho = 1.9$ г/см³, объемом $V = 43$ см³, размер зерен $\alpha \approx \beta = 0.015$ см, подвергался длительному кипячению, а затем в горячем виде помещался в резонатор; производились измерения величины K_{20} в различные моменты времени τ . Получены следующие значения: $\tau = 0$, $K_{20} = 2.1 \cdot 10^2$ МПа, $\tau = 20$ мин, $K_{20} = 2.7 \cdot 10^2$ МПа, $\tau = 80$ – 90 мин, $K_{20} = 4.35 \cdot 10^2$ МПа спустя 3 часа (после остывания образца) $K_{20} = 1.23$ ГПа. Напомним, что у воды $K_{10} = 2.2$ ГПа (см. (4.3)). Малая величина K_{20} для горячего образца свидетельствует о наличии воздушных пузырей и пленок, которые впоследствии при остывании полностью растворяются в воде.

2. Исследовался кварцевый песок средней плотности (включая воду) $\rho = 2.0 \text{ г/см}^3$, объемом $V = 167 \text{ см}^3$, размер зерен $\alpha \cong \beta \cong 0.02 \text{ см}$; измерения на частотах $f_1^* = 500 \text{ Гц}$ и $f_2^* = 1500 \text{ Гц}$ приводят к значению $K_{20} = 5.25 \text{ ГПа}$ (сравни с (4.3) и приведенными выше значениями для обычного песка).

3. Измерения модуля объемной упругости различных образцов грунта со дна рек дают значения $K_{20} = (0.86-1.30) \text{ ГПа}$. Эти величины представляются весьма заниженными, что объясняется наличием в грунте различных организмов, выделяющих светильный газ (смесь метана, этана, пропана и углекислоты), который растворяется в воде, пропитывающей гранулированную среду.

4. Были проведены также измерения величины K_{20} для образцов донного морского грунта, взятого у берегов Крымского полуострова и архипелага Шпицберген [7]. Минералогический состав грунтов сильно различается. Однако измерениями установлено, что модуль объемной упругости образцов изменяется в сравнительно узких пределах $K_{20} = (2.8-6.0) \text{ ГПа}$. Обнаружена некоторая зависимость значений K_{20} от глубины залегания грунта [7].

Отметим экспериментально установленный эффект, что если модуль объемной упругости образца K_{20} не превосходит более чем в 2-3 раза значение K_{10} (для воды), то удовлетворительная точность измерений посредством резонансного метода имеет место и при форме образцов, отличной от принятой в теоретических расчетах (аналогично измерениям "динамической" плотности, см. п. 3). Требуется, чтобы образец не был узким и ориентированным вдоль оси трубы.

Приведенные результаты измерений соответствуют низкочастотной области возбуждения колебаний образца; переход к высокочастотной области не обнаружен. Для этой цели требуется проведение дополнительных экспериментов на более высоких резонансных частотах.

Возможна дальнейшая модификация резонансного метода, позволяющая измерять модуль сдвига для грунтов естественного происхождения и искусственно изготовленных, пропитанных водой. В частности, экспериментально установлено, что для естественных грунтов с водой модуль сдвига в 10^5-10^6 раз меньше модуля объемной упругости.

Для приложений большое значение имеет проблема затухания звука в гранулированной среде. Она связана с измерениями величин $\text{Im}\rho$ (1.1), (1.2) и $\text{Im}K$, характеризующими диссипацию акустической волны. Такие измерения представляется возможным произвести путем анализа резонансных кривых до и после внесения образцов в резонатор. Как указывалось, эти сравнительно малые величины определяются с большей относительной погрешностью, чем $\text{Re}\rho$, $\text{Re}K$.

Отметим, что обстоятельная работа [8] содержит исследование задачи о влиянии шарообразного тела, внесенного в резонатор, на собственные частоты. Поскольку в качестве среды, заполняющей резонатор, использовался воздух, то обнаружить искомый эффект авторам не удалось.

Следует также заметить, что скорость звука в гранулированной среде зависит от частоты акустической волны, поскольку она влияет на плотность и давление. Таким образом, в гранулированной среде, пропитанной жидкостью, имеет место дисперсия звуковых волн, что было подтверждено другими экспериментами.

5. Выводы. Изложена математическая модель пропитанной жидкостью гранулированной среды, находящейся под действием плоской акустической волны [1]. Она является адекватной теоретической основой для проведения экспериментов по определению инерционных характеристик таких сред. Создана соответствующая поставленной задаче экспериментальная установка и разработана технология проведения измерений. Проведено ее тестирование на контрольных образцах; полученные результаты хорошо согласуются со справочными данными. В широком диапазоне частот проведено динамическое взвешивание образцов гранулированных сред естественного и искусственного происхождения; получено хорошее соответствие теорети-

ческой модели. На основе феноменологической модели среды для низкочастотной области колебаний системы с удовлетворительной точностью проведены измерения модуля объемной упругости различных образцов, в том числе образцов речного и морского грунта. Обнаружен и проанализирован ряд качественных эффектов, связанных с технологией образцов (влияние примесей, растворенных газов, температуры). Работа является комплексной и ее результаты могут быть полезны в теоретическом и прикладном аспектах для гидроакустики и морской геофизики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 02-01-00252, 02-01-00157).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нестеров В.С.* Вязко-инерционная дисперсия и затухание звука в суспензии высокой концентрации // *Акуст. ж.* 1959. Т. 5. Вып. 3. С. 337–344.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
3. *Скучик Е.* Основы акустики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 566 с.
4. *Brooks R.* Determination of the velocity of sound in distilled water // *JASA.* 1960. V. 32. № 11. P. 1422–1425.
5. Справочник по машиностроительным материалам (ред. Г.И. Погодин-Алексеев). М.: Машгиз, 1960. 690 с.
6. Энциклопедия современной техники. Т. 3. Конструкционные материалы (ред. А.Г. Туманов). М.: Советская энциклопедия, 1965. 528 с.
7. *Нестеров С.В.* Сравнительный анализ механических свойств грунтов Черного и Баренцева морей // Сб. Теоретические и экспериментальные исследования волновых процессов в океане. Севастополь: Изд-во Морского гидрофизического ин-та АН УССР, 1990. С. 140–147.
8. *Barmatz M., Allen J.L., Gaspar M.* Experimental investigation of the scattering effects of a sphere in a cylindrical resonant chamber // *JASA.* 1983. V. 73. № 3. P. 725–732.

Москва

Поступила в редакцию
28.02.2000