

УДК 624.07 : 534.1

© 2002 г. Ф.М. ДЕТИНКО

СЛЕДЯЩАЯ НАГРУЗКА И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА СТЕРЖНЯ

Устойчивости плоской формы изгиба стержней посвящено много работ, например [1–3]. В публикуемой работе изучается устойчивость изгиба консольного стержня оплошного сечения под действием следящей сосредоточенной силы, лежащей в плоскости наибольшей жесткости. Такова, например, нагрузка, создаваемая реактивным двигателем, закрепленным на крыле самолета.

Решение нелинейной задачи плоского изгиба представлено в замкнутом виде, после чего составлены уравнения возмущенного движения стержня. Линеаризованные уравнения возмущенного движения распадаются на две группы, описывающие крутильно-изгибные колебания из плоскости недеформированного стержня и изгибные в этой плоскости. Собственные значения этих уравнений с переменными коэффициентами находятся методом конечных элементов.

При крутильно-изгибных колебаниях стержня с прямоугольным сечением обнаружены два различных типа поведения собственных чисел. Когда отношение сторон прямоугольника $\beta \leq 0.65$, собственные значения меняются при изменении нагрузки так же, как в задаче Бекка [4, 5]. Именно при отсутствии демпфирования и малой нагрузке собственные значения чисто мнимые, при увеличении нагрузки до $p = p_*$ два низших собственных значения совпадают, а при $p > p_*$ появляются собственные значения с малой положительной вещественной частью. Величина p_* является верхней границей критической нагрузки.

Когда $\beta > 0.65$, на границе устойчивости плоской формы изгиба появляется большое положительное собственное значение, которое при дальнейшем увеличении нагрузки уменьшается, достигает минимума, а затем снова увеличивается.

При $\beta < 0.48$ критическая нагрузка постоянного направления меньше, чем критическая следящая нагрузка, но при $\beta > 0.48$ первая из них превышает вторую.

Всюду имеется в виду устойчивость по Ляпунову в малом.

1. Уравнения движения стержня с нерастяжимой осью. Уравнения движения прямого стержня в проекциях на главные центральные оси поперечного сечения x_1 , x_2 и касательную к деформированной осевой линии x_3 имеют вид [6]:

$$F_1' - \kappa_3 F_2 + \kappa_2 F_3 + J_1 + G_1 = 0 \quad (1.1)$$

$$F_2' + \kappa_3 F_1 - \kappa_1 F_3 + J_2 + G_2 = 0 \quad (1.2)$$

$$F_3' - \kappa_2 F_1 + \kappa_1 F_2 + J_3 + G_3 = 0 \quad (1.3)$$

$$M_2' - \kappa_2 M_2 + \kappa_2 M_3 - F_2 = 0 \quad (1.4)$$

$$M_2' + \kappa_3 M_1 - \kappa_1 M_3 + F_1 = 0 \quad (1.5)$$

$$M_3' - \kappa_2 M_1 + \kappa_1 M_2 = 0 \quad (1.6)$$

Здесь $F = (F_1, F_2, F_3)^T$, $M = (M_1, M_2, M_3)^T$, $J = (J_1, J_2, J_3)^T$, $G = (G_1, G_2, G_3)^T$ вектор внутренней силы, момента, силы инерции и силы внешнего трения соответственно.

Кривизны κ_1, κ_2 и кручение κ_3 определяются через углы Эйлера α, γ, φ формулами

$$\kappa_1 = \alpha' \sin \varphi \sin \gamma + \gamma' \cos \varphi \quad (1.7)$$

$$\kappa_2 = \alpha' \cos \varphi \sin \gamma - \gamma' \sin \varphi, \quad \kappa_3 = \alpha' \cos \gamma + \varphi'$$

Углы Эйлера определяют положение материальных осей по отношению к неподвижной декартовой системе координат (x, y, z) , причем справедливы соотношения

$$x' = \cos \alpha \sin \gamma, \quad y' = \sin \alpha \sin \gamma, \quad z' = \cos \gamma \quad (1.8)$$

Вектора сил инерции и трения выражаются формулами

$$J = -\lambda^2 H X'', \quad G = -\lambda \mu H X', \quad X = (x, y, z)^T \quad (1.9)$$

где μ – коэффициент трения. Элементы матрицы третьего порядка H равны

$$\begin{aligned} h_{11} &= -\cos \varphi \sin \alpha - \sin \varphi \cos \alpha \cos \gamma \\ h_{21} &= \sin \varphi \sin \alpha - \cos \varphi \cos \alpha \cos \gamma \\ h_{12} &= \cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \alpha \cos \gamma \\ h_{22} &= -\sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \alpha \cos \gamma \\ h_{31} &= \cos \alpha \sin \gamma, \quad h_{32} = \sin \alpha \sin \gamma, \quad h_{13} = \sin \varphi \sin \gamma \\ h_{23} &= \cos \varphi \sin \gamma, \quad h_{33} = \cos \gamma \end{aligned} \quad (1.10)$$

Уравнения состояния стержня принимаются в виде [7]:

$$M_1 = d_1 \kappa_1, \quad M_2 = \kappa_2, \quad M_3 = d_3 \kappa_3 \quad (1.11)$$

$$d_1 = D_1 / D_2, \quad d_3 = D_3 / D_2$$

Все уравнения записаны в безразмерной форме. Размерные усилия отнесены к D_2/L^2 ($D_2 = EI_2, D_1 = EI_1$ – наибольшая и наименьшая жесткости стержня при изгибе, D_3 – жесткость при кручении, L – длина стержня). Моменты отнесены к D_2/L^3 , перемещения и осевая координата – к длине стержня, $\lambda^2 = mL^4/D_2$, m – масса единицы длины стержня.

2. Равновесное состояние плоской формы изгиба. При равновесии полагаем

$$\varphi = -\pi/2, \quad F_2 = M_1 = M_3 = \kappa_1 = \kappa_3 = y = \alpha = J = G = 0 \quad (2.1)$$

Уравнения (1.2), (1.4) и (1.6) удовлетворяются, а из оставшихся

$$F_1' + \kappa_2 F_3 = 0, \quad F_3' - \kappa_2 F_2 = 0, \quad M_2' + F_1 = 0, \quad M_2 = \kappa_2 = \gamma' \quad (2.2)$$

находятся усилия

$$F_1 = -M_2', \quad F_3 = C - M_2^2 / 2 \quad (2.3)$$

(C – постоянная интегрирования), а для определения момента получается уравнение

$$M_2'' - CM_2 + M_2^3 / 2 = 0 \quad (2.4)$$

Из (1.8) и (1.10) в силу (2.1) следует

$$x' = \sin \gamma, \quad z' = \cos \gamma, \quad y = 0 \quad (2.5)$$

$$h_{12} = h_{21} = h_{23} = 0, \quad h_{22} = 1, \quad h_{11} = h_{33} = \cos \gamma, \quad h_{13} = -h_{31} = \sin \gamma \quad (2.6)$$

Общее решение (2.4) принимается в виде

$$M_2 = M_p = M_0 \frac{\operatorname{sn}(hs + \tau)}{\operatorname{dn}(hs + \tau)}, \quad M'_p = hM_0 \frac{\operatorname{cn}(hs + \tau)}{\operatorname{dn}(hs + \tau)^2} \quad (2.7)$$

где $\operatorname{sn}(s, k)$, $\operatorname{cn}(s, k)$, $\operatorname{dn}(s, k)$ – эллиптические функции Якоби с модулем k .

После подстановки (2.7) в (2.4) находятся постоянные

$$C = (2k^2 - 1)h^2, \quad M_0^2 = 4k^2(1 - k^2)h^2 \quad (2.8)$$

На краю $s = 0$, где приложена следящая перерезывающая сила p , должны выполняться условия

$$M_2(0) = F_3(0) = 0, \quad F_1(0) = -p \quad (2.9)$$

из которых следует

$$\tau = C = 0, \quad k^2 = 1/2, \quad M_0 = h = \sqrt{p} \quad (2.10)$$

С учетом условий на защемленном краю

$$x(1) = z(1) = \gamma(1) = 0 \quad (2.11)$$

находятся перемещения

$$x = \int_s^1 \sin \gamma ds, \quad z = \int_s^1 \cos \gamma ds$$

$$\gamma = \int_s^1 M_p ds = 2 \operatorname{arctg}[\operatorname{cn}(h)] - 2 \operatorname{arctg}[\operatorname{cn}(hs)]$$

3. Уравнения возмущенного движения. Для каждой переменной принимается

$$Z(s, t) = Z_p(s) + Z_*(s, t) \quad (3.1)$$

где $Z_p(s)$ – значение переменной при равновесии, вычисляемое по формулам п. 2, $Z_*(s, t)$ – малое возмущение. Для вывода уравнений возмущенного движения выполняется следующая стандартная процедура: выражения (3.1) вносятся в формулы п. 1; отбрасываются возмущения в степени выше первой; учитываются формулы п. 2 для $Z_p(s)$; возмущения представляются в виде $Z_*(s, t) = Z_0(s) \exp(qt/\lambda)$ и время t отделяется.

В результате уравнения возмущенного движения распадаются на две группы. Уравнения изгиба в плоскости наибольшей жесткости имеют вид:

$$F'_1 + M_p F_3 + F_{3p} \kappa_2 - (q^2 + \mu q)(x \cos \gamma_p - z \sin \gamma_p) = 0$$

$$F'_3 - M_p F_1 = F_{1p} \kappa_2 - (q^2 + \mu q)(x \sin \gamma_p + z \cos \gamma_p) = 0$$

$$\kappa'_2 + F_2 = 0 \quad (3.2)$$

$$x' - \gamma \cos \gamma_p = 0, \quad z' + \gamma \sin \gamma_p = 0, \quad \gamma' - \kappa_2 = 0$$

а уравнения кручения – изгиба в плоскости наименьшей жесткости будут

$$F'_2 + F_{1p} \kappa_3 - F_{3p} \kappa_1 - (q^2 + \mu q)y = 0 \quad (3.3)$$

$$d_1 \kappa'_1 - (1 - d_3)M_p \kappa_3 - F_2 = 0$$

$$d_3 \kappa'_3 + (1 - d_1)M_p \kappa_1 = 0$$

$$y' - \alpha \sin \gamma_p = 0, \quad \alpha' \sin \gamma_p - M_p \varphi + \kappa_1 = 0, \quad \alpha' \cos \gamma_p + \varphi' - \kappa_3 = 0$$

Для простоты записи индекс (0) у всех переменных отброшен, так что амплитуды колебаний в (3.2)–(3.3) обозначены теми же буквами, что и имеющие другой смысл переменные в п. 1.

4. Задача кручения – изгиба. К уравнениям (3.3) надо присоединить однородные краевые условия

$$F_2(0) = \kappa_1(0) = \kappa_3(0) = 0, \quad y(1) = \alpha(1) = \varphi(1) = 0 \quad (4.1)$$

Задача (3.3)–(4.1) решается методом конечных элементов, что сводит ее к вычислению собственных значений матрицы конечного порядка.

Для учета внутреннего демпфирования необходима общая теория для стержня из вязкоупругого материала. Здесь внутреннее демпфирование не учтено и определяется верхняя граница критической нагрузки.

Расчеты с учетом внешнего трения показали, что в этой задаче, как в задаче Бека [8], где тоже отсутствуют докритические деформации, внешнее трение не влияет на верхнюю границу критической нагрузки p_* и в этом разделе принято $\mu = 0$.

Точками $s_i = i/N$ ($i = 0, 1, \dots, N$) интервал $(0, 1)$ разбивается на N одинаковых элементов и каждая из переменных интерполируется в пределах элемента линейной функцией

$$Z(s) = N_1(s)Z_i + N_2(s)Z_{i+1} \quad (4.2)$$

$$N_1(s) = \frac{s_{i+1} - s}{\delta}, \quad N_2(s) = \frac{s - s_i}{\delta}, \quad \delta = s_{i+1} - s_i = \frac{1}{N}$$

Выражения (4.2) подставляются в (3.3), и для определения узловых значений переменных применяется метод взвешенных остатков с единичной весовой функцией. Например, второе уравнение (3.3) после дискретизации примет вид

$$d_1(\kappa_{1,i+1} - \kappa_{1,i}) - (1 - d_3)(m_2 \kappa_{3,i+1} + m_1 \kappa_{3,i}) - n(F_{2,i+1} + F_{2,i}) = 0 \quad (4.3)$$

$$n = \int N_1(s) ds = \int N_2(s) ds = \delta / 2$$

$$m_1 = \int M_p N_1 ds, \quad m_2 = \int M_p N_2 ds$$

где все интегралы берутся в пределах от s_i до s_{i+1} .

Дискретная система уравнений для каждого из элементов записывается в матричном виде

$$A1_i U_i + A2_1 U_{i+1} - q^2 [B1_i U_i + B2_i U_{i+1}] = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, N) \quad (4.4)$$

где вектор-столбец

$$U_i = (F_{2,i}, \kappa_{1,i}, \kappa_{3,i}, y_i, \alpha_i, \varphi_i)^T \quad (4.5)$$

Матрица шестого порядка для конца элемента имеет вид

$$A2_i = \begin{pmatrix} 1 & g2_i & -f2_i & 0 & 0 & 0 \\ n & d_1 & (1 - d_3)m2_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (d_1 - 1)m2_i & d_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -S2_i & 0 \\ 0 & -n & 0 & 0 & Sb_i & -m2_i \\ 0 & 0 & -n & 0 & Cb_i & 1 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

$$m2_i = \int M_p N_2 ds, \quad f2_i = \int M'_p N_2 ds, \quad g2_i = \int (C - M_p^2/2) N_2 ds \quad (4.7)$$

$$S2_i = \int N_2 \sin \gamma_p ds, \quad Sb_i = \delta^{-1} \int \sin \gamma_p ds, \quad Cb_i = \delta^{-1} \int \cos \gamma_p ds$$

Матрица $A1_i$ для начала элемента получается из (4.6) заменой Cb_i на $-Cb_i$, а также изменением знака всех диагональных элементов. Кроме того, величины $m2, f2, g2, S2$ заменяются на $m1, f1, g1, S1$, которые в свою очередь получают из (4.7) заменой N_2 на N_1 . Характеристическое уравнение системы записывается в виде

$$\det(A - rB) = 0, \quad r = q^2 \quad (4.8)$$

$$A = \begin{vmatrix} a1_0 & A1_0 & A0 & A0 & a0 \\ a0 & A1_1 & A2_1 & A0 & a0 \\ a0 & A0 & A1_2 & A2_2 & a0 \\ a0 & A0 & A0 & A1_3 & a2_3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b1_0 & B1_0 & B0 & B0 & b0 \\ b0 & B1_1 & B2_1 & B0 & b0 \\ b0 & B0 & B1_2 & B2_2 & b0 \\ b0 & B0 & B0 & B1_3 & b2_3 \end{vmatrix} \quad (4.9)$$

Здесь матрицы $a1_0, a2_3, b1_0, b2_3$, учитывающие краевые условия, получаются из матриц $A1_0, A2_3, B1_0, B2_3$ вычеркиванием столбцов, соответствующих тем переменным, для которых заданы нулевые краевые условия. Например, на свободном конце $F_2(0) = \kappa_1(0) = \kappa_3(0) = 0$ и для получения матриц $a1_0, b1_0$ в матрицах $A1_0, B1_0$ следует вычеркнуть столбцы 1, 2, 3. На защемленном конце $y(1) = \alpha(1) = \varphi(1) = 0$ и для получения матриц $a2_3, b2_3$ в матрицах $A2_3, B2_3$ следует опустить столбцы 4, 5, 6. В матрицах $B1 = B2$ не равен нулю только элемент $b1_4 = n$. Нулевые матрицы $A0 = B0$ имеют шестой порядок; нулевые матрицы $a0 = b0$ имеют три столбца.

Равенства (4.9) выписаны для случая четырех элементов, но из них виден простой принцип составления матриц характеристического уравнения при любом числе элементов.

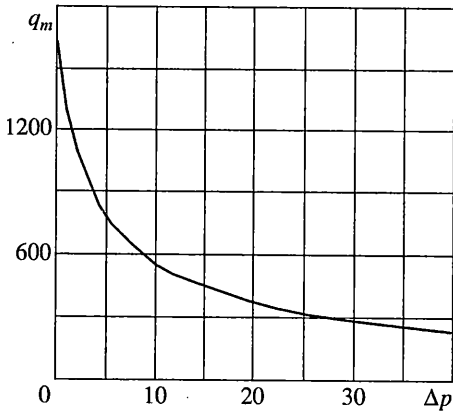
Вычисления были выполнены для стержня с прямоугольным сечением при числе элементов, равном 20. В рассматриваемой задаче отношение сторон прямоугольника $\beta \leq 1$ существенно влияет на поведение собственных значений при изменении нагрузки.

Рассмотрим сначала случай $\beta < 0.05$. Как известно, при следящей силе и отсутствии демпфирования линеаризованные уравнения возмущенного движения определяют только верхнюю границу критической нагрузки p_* . При $p < p_*$ все значения показателя q чисто мнимые и теория Ляпунова не позволяет судить об устойчивости решения, а при $p > p_*$ имеется показатель с положительной вещественной частью и система неустойчива. При $p = p_*$ два низшие собственные значения совпадают, что и определяет верхнюю границу критической нагрузки.

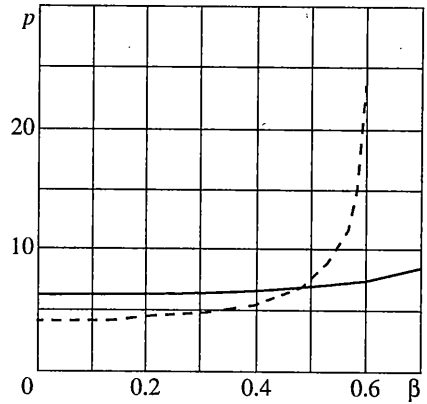
В случае $\beta > 0.65$ характер зависимости показателей q от нагрузки существенно меняется. При критической нагрузке в спектре (расположенном в порядке возрастания модуля собственных значений) появляется положительный (вещественный) показатель большой величины, которая при увеличении нагрузки сначала уменьшается (сдвигается в начало спектра), достигает минимума, а затем снова увеличивается.

На фиг. 1 показана зависимость положительного показателя q_m от приращения нагрузки $\Delta p = (p - p_1) \cdot 10^4$, $p_1 = 3.9138$ для $\beta = 0.7$. В указанном диапазоне Δp первое собственное значение составляет около $10\sqrt{-1}$, номер m меняется от 10 до 5, а нагрузка меняется всего на 4 единицы четвертого десятичного знака.

Конечно, при замене системы с распределенными параметрами дискретной схемой погрешность расчета собственных значений увеличивается с их номером. Однако сравнение показателей q задачи Бека, рассчитанных изложенным способом, с точными величинами показывает, что погрешность определения пятой собственной



Фиг. 1



Фиг. 2

частоты (при нагрузке, отличающейся от критической всего на 0.25%) составляет 15%. Погрешность определения двух первых показателей не превышает 8%.

На фиг. 2 дано сравнение критических нагрузок для следящей силы (сплошная кривая) и для силы постоянного направления (штриховая кривая). Здесь размерная сила отнесена к $\sqrt{D_1 D_3} / L^2$.

5. Изгиб в плоскости нагрузки. В этой задаче учитывается внешнее и внутреннее демпфирование. С этой целью последнее уравнение (3.2) переписывается в виде

$$(1 + \eta q)\gamma' - \kappa_2 = 0 \quad (5.1)$$

где $\eta\lambda$ – коэффициент в уравнении состояния упруговязкого материала $\sigma = E(\epsilon + \eta\lambda\epsilon')$. Однородные краевые условия в этой задаче

$$F_1(0) = F_3(0) = \kappa_2(0) = x(1) = z(1) = \gamma(1) = 0 \quad (5.2)$$

Для записи характеристического уравнения в виде (4.8) вводятся новые переменные $X = qx$, $Z = qz$; далее собственные числа вычисляются тем же способом, что и ранее.

Ниже приведены критические нагрузки p , отнесенные к D_2/L^2 :

η	μ	p
0	0	40.0
0.001	0	33.7
0.001	0.05	36.4
0.001	0.1	37.5

В этой задаче, как и в задаче Бека [8], внешнее трение стабилизирует систему.

6. Нагрузка постоянного направления. Эта консервативная задача решается здесь статическим методом, но, как и ранее, сначала приведены динамические уравнения возмущенного движения. Направление оси x декартовой системы совмещается с направлением нагрузки, а ось z – с недеформированной осью стержня. Уравнения движения стержня будут [6]:

$$F'_x - \lambda^2 x'' = 0, \quad F'_y - \lambda^2 y'' = 0, \quad F'_z - \lambda^2 z'' = 0 \quad (6.1)$$

$$M'_x + h_{23}F_z - h_{33}F_y = 0, \quad M'_y + h_{33}F_x - h_{13}F_z = 0$$

$$M'_z + h_{13}F_y - h_{23}F_x = 0 \quad (6.2)$$

$$M_x = H_{11}M_1 + h_{12}M_2 + h_{13}M_3, \quad M_y = h_{21}M_1 + h_{22}M_2 + h_{23}M_3$$

$$M_z = h_{31}M_1 + h_{32}M_2 + h_{33}M_3 \quad (6.3)$$

Сюда надо присоединить уравнения (1.10).

При равновесии полагаем $\varphi = -\pi/2$, $\alpha = 0$ и находим

$$F_y = F_z = \kappa_1 = \kappa_3 = M_1 = M_3 = M_x = M_z = 0, \quad M_y = \gamma' \quad (6.4)$$

Из (6.1)–(6.4) следует уравнение

$$\gamma'' + n^2 \cos \gamma = 0, \quad n^2 = p \quad (6.5)$$

которое заменой $\gamma = \gamma_1 + \pi/2$ преобразуется к виду

$$\gamma_1'' + n^2 \sin \gamma_1 = 0 \quad (6.6)$$

Можно проверить подстановкой, что (6.6) имеет решение

$$\gamma_1 = 2 \arcsin \left[k \frac{\text{cn}(ns)}{\text{dn}(ns)} \right]$$

удовлетворяющее условию $M_y(0) = 0$. Из условия $\gamma(0) > 0$ приходим к уравнению

$$\sqrt{2}k \text{cn}(n) - \text{dn}(n) = 0 \quad (6.7)$$

определяющему модуль k по заданной силе.

Линеаризованные уравнения возмущенного движения распадаются, как и выше, на уравнения изгиба в плоскости нагрузки и кручения – изгиба из этой плоскости. После отделения времени последние принимают вид

$$F'_y - q^2 y = 0, \quad y' - \alpha \sin \gamma = 0 \quad (6.8)$$

$$M'_x - F_y \cos \gamma = 0, \quad M'_z + F_y \sin \gamma - p\alpha \sin \gamma = 0$$

$$M_x = a_1 \alpha' + a_2 \alpha + a_3 \varphi' + a_4 \varphi$$

$$M_z = b_1 \alpha' + b_3 \varphi' + b_4 \varphi$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(d_3 - d_1) \sin 2\gamma, \quad a_2 = -\gamma', \quad a_3 = d_3 \sin \gamma, \quad a_4 = (d_1 - 1)\gamma' \cos \gamma$$

$$b_1 = d_1 \sin^2 \gamma + d_3 \cos^2 \gamma, \quad b_3 = d_3 \cos \gamma, \quad b_4 = (1 - d_1)\gamma' \sin \gamma$$

Краевые условия будут

$$F_y(0) = M_x(0) = M_z(0) = y(1) = \alpha(1) = \varphi(1) = 0 \quad (6.9)$$

В этой задаче при потере устойчивости появляется смежная равновесная форма, т.е. собственное значение обращается в нуль. При $q = 0$ из (6.8), (6.9) следует $F_y = M_x = 0$, а оставшиеся неизвестные образуют однородную систему четвертого порядка, характеристический определитель которой составляет описанным выше образом. Найденные таким образом критические нагрузки показаны на фиг. 2 штриховой кривой.

В работе [2] нелинейное уравнение (6.6) и статические линеаризованные уравнения изгиба – кручения решались численно. Авторы пришли к заключению, что при отно-

шении сторон прямоугольника 0.6 критическая нагрузка бесконечна. Как видно из фиг. 2, при $\beta > 0.5$ критическая нагрузка увеличивается резко, но остается конечной и для $\beta = 0.6$.

При $\beta = 1/10, 1/5, 1/3$ значения критической нагрузки совпадают с приведенными в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955. 568 с.
2. Hodges D.H., Peters D.A. On the lateral Buckling of uniform slender cantilever beams // Intern. J. Solids and Structures. 1975. V. 11. № 12. P. 1269–1280.
3. Yong Lin Pi, Trahair N.S. Prebuckling deflections and lateral buckling. I. Theory // J. Structural Eng. 1992. V. 118. № 11. P. 2949–2966.
4. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
5. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352 с.
6. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
7. Ляв А.Е. Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
8. Денисов Г.Г., Новиков В.В. Об устойчивости стержня, нагруженного "следающей" силой // Изв. АН СССР. 1975. № 1. С. 150–154.

США

Поступила в редакцию
11.05.2000