

УДК (539.3+624.07):534.1

© 2002 г. А.П. МАЛЫШЕВ

**ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ  
С ЗАВИСЯЩИМ ОТ СМЕЩЕНИЯ СУХИМ ТРЕНИЕМ  
МЕЖДУ СЛОЯМИ**

В работе предлагается модель межслоевого упруго-фрикционного взаимодействия, согласно которой величина силы сухого трения связана степенной зависимостью с относительным смещением слоев. Проведен параметрический анализ модели. Численные расчеты проводились на основе схемы С.К. Годунова, дополненной для снижения сеточной вязкости неоднородным расчетом распада разрыва, зависящим от текущего времени наблюдения процесса.

Двухслойный стержень с упруго-фрикционным взаимодействием слоев – это не только достаточно распространенный конструктивный элемент, но и удобная расчетная схема для изучения динамических процессов в стержнях из волокистых композитов, тросах, нитях и т.п. Часто для описания их неупругих свойств используются линейные реологические модели. Применение таких моделей к относительно медленным процессам с характерным временем изменения параметров порядка нескольких секунд и более оказывается достаточно эффективным [1–2]. Вместе с тем, использование их для описания демпфирования колебаний наталкивается на серьезные ограничения, т.к. соответствующий им декремент колебаний существенно зависит от частоты и не зависит от амплитуды, что, как правило, противоречит экспериментальным данным. Простейшая модель сухого трения Амонтона–Кулона, хотя и позволила решить довольно широкий круг динамических проблем, становится неприемлемой при исследовании резонансных режимов [3].

Причиной диссипативных потерь энергии во всех упомянутых выше объектах, в первую очередь, являются силы трения, возникающие на контактных поверхностях при взаимном проскальзывании отдельных нитей, проволок и волокон. Простейшей расчетной схемой, которая позволяет учесть подобное взаимодействие, оказывается двухслойный стержень.

1. Продольные колебания двухслойного стержня можно описать следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} \partial N_i / \partial x &= m_i \partial U_i / \partial t + (-1)^i p, & \partial N_i / \partial t &= g_i \partial U_i / \partial x \\ U_i &= \partial u_i / \partial t \quad (i = 0, 1) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $N_i$ ,  $U_i$ ,  $u_i$  – продольная сила, скорость, смещение,  $g_i$ ,  $m_i$  – жесткость и погонная масса  $i$ -го слоя,  $x$  – осевая координата,  $t$  – время,  $p$  – погонное усилие взаимодействия слоев.

При приведении к безразмерному виду осевая координата  $x$  и смещения  $u_i$  отнесены к длине стержня  $l$ , время – к  $l/c_0$ ; силы  $N_i$  отнесены к  $g_0$ , а погонные усилия межслоевого взаимодействия – к  $g_0/l$ . Погонные массы и жесткости отнесены к  $m_0$  и  $g_0$

соответственно. Будем считать, что упруго-фрикционное взаимодействие слоев подчиняется следующим зависимостям

$$p = p_f + \xi(u_0 - u_1) \quad (1.2)$$

$$p_f = \beta |u_0 - u_1|^\alpha \text{sign}(U_0 - U_1), \quad U_0 \neq U_1, \quad p_f = p_b, \quad U_0 = U_1$$

где  $p_b$  – усилие трения, соответствующее сцеплению слоев,  $\alpha, \beta, \xi$  – константы, определяющие величину межслоевых сил.

Пусть характеристики слоев остаются постоянными вдоль стержня. Разделим его на участки длиной  $h$ . В соответствии со схемой С.К. Годунова [4] и пользуясь интегрированием по формуле трапеций можно получить следующие расчетные соотношения для участка, заключенного между  $x_{n-1} = (n-1)h$  и  $x_n = nh$ :

$$\begin{aligned} U_i^* &= U_{*,i} + [(N_{n,i} - N_{n-1,i})\tau / h - (-1)^i p^* \tau] / m_i \\ p^* &= p_f^* + \xi(u_0^* - u_1^*), \quad u_i^* = u_{*,i} + \tau(U_i^* + U_{*,i}) / 2 \\ N_i^* &= N_{*,i} + (U_{n,i} - U_{n-1,i})g_i \tau / h \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $(\cdot)_i^*$ ,  $(\cdot)_{*,i}$  – среднеинтегральные в пределах  $h$  значения параметров при  $t$  и  $t + \tau$  соответственно,  $\tau$  – шаг по времени,  $(\cdot)_{n-1,i}$ ,  $(\cdot)_{n,i}$  – среднеинтегральные в пределах  $\tau$  значения параметров при  $x_{n-1}$  и  $x_n$ .

Разрешаем совместно первые три равенства (1.3) относительно  $U_i^*$ :

$$U_i^* = \Delta_i / \Delta, \quad \Delta = m_0 m_1 + a(m_0 + m_1), \quad a = \xi \tau^2 / 2 \quad (1.4)$$

$$\Delta_0 = (b_0 + p_f^* \tau)(a + m_1) + a(b_1 - p_f^* \tau)$$

$$\Delta_1 = (b_1 - p_f^* \tau)(a + m_0) + a(b_0 + p_f^* \tau)$$

$$b_i = m_i U_{*,i} + (N_{n,i} - N_{n-1,i})\tau / h + \xi \tau (u_{*,0} - u_{*,1}) + a(U_{*,0} - U_{*,1})$$

Для определения усилий трения  $p_f^*$  используем выражение

$$p_f^* = \beta |u_{0,y}^* - u_{1,y}^*|^\alpha \text{sign}(U_{0,y}^* - U_{1,y}^*) \quad (1.5)$$

Здесь  $U_{i,y}^*$  – скорости, вычисленные при  $p_f^* = 0$ , и учтено, что трение не может изменить направление проскальзывания слоев.

Подставив (1.5) в (1.4) совместно с выражением для  $u_i^*$  из (1.3), получим систему нелинейных уравнений, которую решаем методом Ньютона. В качестве нулевого приближения принимаем  $U_{i,y}^*$ . В проводившихся расчетах необходимую точность обеспечивала уже первая итерация.

Если оказывается, что  $\text{sign}(U_0^* - U_1^*) \neq \text{sign}(U_{0,y}^* - U_{1,y}^*)$ , то принимаем  $U_0^* = U_1^*$ ,  $p_f^* = p_b^*$ :

$$p_b^* = (m_0 b_1 - m_1 b_0) / (\tau(m_0 + m_1)) \quad (1.6)$$

Для вычисления параметров колебаний в сечениях  $x = x_n$  используются соотношения на характеристиках системы (1.1):

$$N_{n,i} \pm f_i U_{n,i} = (N_i^0 \pm f_i U_i^0)_{\pm}, \quad f_i = m_i c_i, \quad c_i^2 = g_i / m_i \quad (1.7)$$

где  $( )_+$  и  $( )_-$  – параметры на участках, примыкающих к  $x_n$  справа и слева соответственно,  $c_i$  – скорость звука в  $i$ -м слое,  $( )_i^0$  – исходные параметры для расчета распада разрыва.

В обычной схеме С.К. Годунова (4) в качестве  $N_i^0, U_i^0$  используются значения параметров на соответствующих участках в момент времени  $t$ . Если для какой-либо системы волн число Куранта меньше единицы, а такой ситуации не удается избежать при  $c_0 \neq c_1$ , схема становится непригодной для решения поставленной задачи. Затухание, вызванное сеточной вязкостью, оказывается соизмеримым с тем, которое обусловлено силами трения, или больше его.

Чтобы уменьшить сеточную вязкость и улучшить сходимость решения, используется неоднородный по времени расчет распада разрыва. Вводятся две последовательности моментов времени:  $t_j = j\tau_0, \quad t_k = k\tau_1 \quad (j, k = 0, 1, 2, \dots), \quad \tau_i = h / c_i$ . Рабочий временной слой, связанный с текущим временем наблюдения  $t_m$ , последовательно фиксируется в моменты  $t_m = \min[t_j, t_k], \quad t_j > t_{m-1}, \quad t_k > t_{m-1}$ . Значения параметров  $( )_i^*$  для всех  $t_m$  вычисляются одинаково с помощью соотношений (1.3)–(1.7), а определение  $N_i^0$  и  $U_i^0$  зависит от значения  $t_m$ . Если  $t_m = t_j \neq t_k$ , то при расчете распада разрыва проводится замещение параметров  $( )_0^0 = ( )_{*0}$ ; а значения  $( )_1^0$  остаются без изменений. Аналогично, когда  $t_m = t_k \neq t_j$ , выполняется замещение только параметров  $( )_1^0 = ( )_{*1}$ . Наконец, если  $t_m = t_j = t_k$ , то принимается  $( )_i^0 = ( )_{*i}, \quad i = 0, 1$ .

Отбрасывание слагаемых порядка  $\tau$  в соотношениях на характеристиках и использование в (1.3) усилия взаимодействия слоев, отнесенного к моменту  $t + \tau$ , позволяют избежать нефизических осцилляций  $p(x, t)$ , которые могут возникнуть при некоторых сочетаниях параметров ввиду нелинейности задачи. Для проверки сходимости численного проводились дублирующие расчеты при  $h = 2 \cdot 10^{-3}, 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-4}$ . Различие результатов для двух последних значений шага не превышало нескольких единиц четвертого значащего разряда. Затухания решения за счет сеточной вязкости при отсутствии сил трения и любых соотношениях скорости звука в слоях не наблюдалось вовсе. Последнее обстоятельство подтверждает высокую эффективность предложенной процедуры расчета распада разрыва. Все результаты, приведенные в работе, получены при  $h = 5 \cdot 10^{-4}$ .

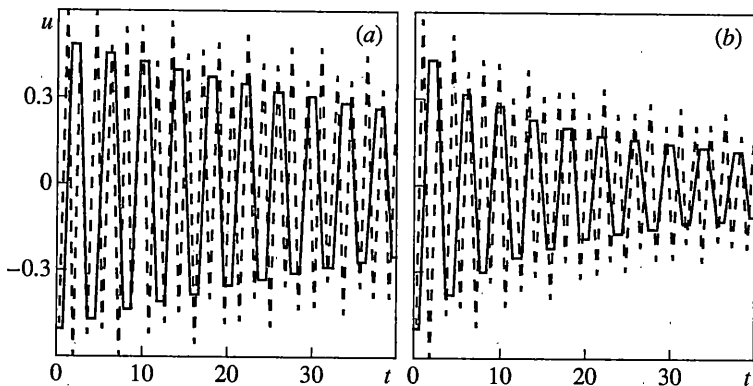
2. В качестве характерных динамических процессов рассматривались колебания стержня в сечении  $x = 0.5$  слоя  $i = 0$ . Правый торец  $x = 1$  закреплен таким образом, что здесь  $u_0 = 0, N_1 = 0$ . При исследовании вынужденных колебаний на другом торце  $x = 0$  задавались граничные условия:  $u_0 = \sin \omega t, N_1 = 0$ . Когда моделировались свободные колебания, полагалось, что стержень предварительно растянут силами  $N_0 = N_1 = 1$  и в момент времени  $t = 0$  освобождается его торец  $x = 0$ .

Использование единичной нагрузки – амплитуды краевого смещения и силы предварительного растяжения – означает, что результаты нормированы по ее действительной величине. Если она равна  $M$ , то соответствующие параметры динамического процесса могут быть получены простым умножением на  $M$ . Характеристики стержня, за исключением  $\beta$ , надо при этом брать такими же, как в случае единичной нагрузки. Нетрудно показать, что

$$\beta(M) = \beta(1)M^{1-\alpha} \quad (2.1)$$

где  $\beta(M)$  и  $\beta(1)$  – значения  $\beta$  для нагрузки, равной  $M$  и 1 соответственно.

В случае  $\alpha = 0$  фрикционные силы соответствуют простейшей модели сухого трения Амонтона – Кулона, которая достаточно подробно исследована примени-



Фиг. 1

тельно к рассматриваемой задаче [3, 5]. Поэтому основное внимание уделялось взаимодействию слоев при других значениях  $\alpha$ .

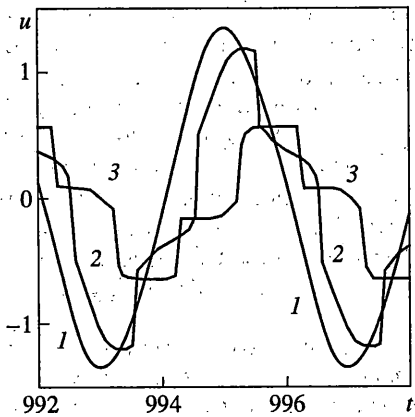
С целью выявления характерных особенностей затухания, вызванного упруго-фрикционными силами (1.2), сначала рассматривались колебания сплошного стержня, лежащего на неподвижном основании. Граничные и начальные условия принимались такими же, как для слоя  $i = 0$  двухслойного стержня.

На фиг. 1 сплошными линиями показано изменение смещения  $u$  в случае чисто фрикционного взаимодействия стержня с основанием ( $\xi = 0$ ). Фиг. 1, *a* соответствует  $\alpha = 1$  и  $\beta = 0,1$ , фиг. 1, *b* —  $\alpha = 2$  и  $\beta = 1$ . Сухое трение не влияет на частоту свободных колебаний сплошного стержня. Их характерной особенностью является возможность временного или постоянного сцепления контактных поверхностей, которое будем далее называть заклиниванием. В частности, когда  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 10$  и  $\xi = 0$ , свободные колебания не наблюдаются вовсе и стержень остается неподвижным в начальном состоянии. Если наряду с фрикционными силами между стержнем и основанием имеется упругое взаимодействие ( $\xi \neq 0$ ), то заклинивание наступает при более высоком уровне трения. Упругое взаимодействие не только повышает частоту, но и существенно меняет весь характер движения. За счет обертонов колебания приобретают сложный вид, далекий от монотонно затухающего ступенчатого закона. В качестве примера на фиг. 1 штриховыми линиями показаны колебания при  $\xi = 1$ .

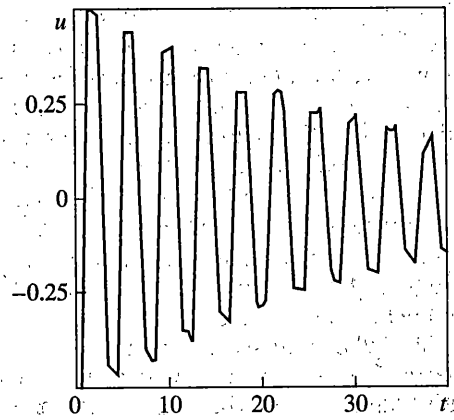
Декремент свободных колебаний  $\delta$  при  $\alpha = 1$  не зависит от амплитуды, а при  $\alpha = 2$  прямо пропорционален ей. В частности, для колебаний, показанных на фиг. 1 сплошными линиями,  $\delta = 0,068$  (*a*) и  $\delta/A = 0,68$  (*b*), где  $A$  — текущая амплитуда смещения.

Наличие значительных сил упругого поверхностного взаимодействия затрудняет определение декремента по зависимостям  $u(t)$ . Использование этой характеристики становится вообще сомнительным ввиду немонотонного характера убывания амплитуд. Когда  $\xi \leq 0,1$ , дисперсия результатов вычисления  $\delta$  по первым десяти периодам колебаний не превысила 0,9%. В случае  $\xi = 1$ , дисперсия достигает 49% и использование декремента как характеристики свободных колебаний при таком уровне упругого взаимодействия вряд ли целесообразно. Именно такому случаю соответствуют штриховые линии на фиг. 1.

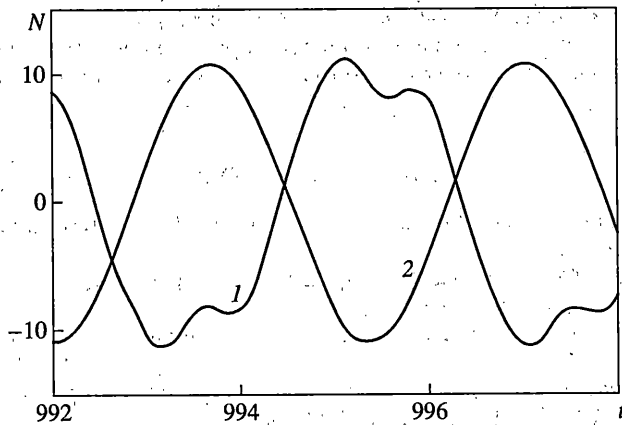
В условиях резонанса при чисто фрикционном взаимодействии стержня с основанием всегда наблюдалось заклинивание. Другими словами, резонансные режимы без заклинивания возможны только при  $\xi \neq 0$ . На фиг. 2 приведены установившиеся резонансные колебания, когда упруго-фрикционное взаимодействие стержня с основанием соответствует  $\alpha = 2$  и  $\xi = 1$ , а константа  $\beta$  принимает значения  $\beta = 0,1$  (кривая 1),  $\beta = 1$  (кривая 2) и  $\beta = 5$  (кривая 3). Видно, что с усилением трения закон движения, оставаясь периодическим, меняется весьма существенным образом. Когда



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$\beta = 0.1$ , он практически имеет вид гармоники. С увеличением  $\beta$  сначала появляются рывки ( $\beta = 1$ ), а затем и промежуточные остановки ( $\beta = 5$ ).

В качестве характеристики рассеяния энергии при вынужденных колебаниях использовался относительный коэффициент поглощения  $\psi$  [6], который вычислялся по формуле

$$\psi = \Psi/P \quad (2.2)$$

где  $\Psi$  – энергия, рассеянная за период колебаний,  $P$  – максимальная потенциальная энергия стержня в течение этого периода, включая энергию упругого поверхностного взаимодействия.

Если упруго-фрикционное взаимодействие стержня с основанием относительно невелико и колебания близки к гармоническим, можно принять, что  $\psi = 2\delta$ . В этом случае коэффициент поглощения пропорционален  $\beta$ , причем либо не зависит от  $A$  ( $\alpha = 1$ ), либо прямо пропорционален  $A$  ( $\alpha = 2$ ). Отклонения от указанных зависимостей свидетельствуют об изменении закона движения. Расчеты показали, что резонансные колебания можно считать гармоническими, когда  $\xi \geq 0.1$  и величина сухого трения ограничена уровнем  $\beta \leq 1$  ( $\alpha = 1$ ) или  $\beta \leq 0.1\xi$  ( $\alpha = 2$ ).

Для двухслойного стержня принималось  $g_0 = g_1 = 1$ ,  $m_0 = 1$ ,  $m_1 = 2$ , так что  $c_0 = 1$  и  $c_1 = 0.7071$ . Обширный параметрический анализ позволил установить ряд особенностей, обусловленных взаимодействием слоев рассматриваемого типа.

Прежде всего, за счет подвижности обоих слоев искажение свободных колебаний обертонами наблюдается даже в отсутствие упругих сил взаимодействия. Например, уже при  $\beta = 0.1$  ( $\alpha = 2$ ,  $\xi = 0$ ) форма горизонтальной части ступенек  $u(t)$ , как видно на фиг. 3, значительно искажена. В связи с этим еще более возрастает дисперсия результатов расчета декремента свободных колебаний по зависимостям  $u(t)$ . Упругое взаимодействие слоев и здесь снижает уровень демпфирования. Например, декремент свободных колебаний при  $\xi = 0$  ( $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0.05$ ) равен 0.074. Когда  $\xi = 0.01$ , его величина падает до 0.055.

При вынужденных резонансных колебаниях, в отличие от сплошного стержня, с ростом  $\xi$  наблюдается уменьшение искажений закона движения и приближение его к гармоническому. На фиг. 4 для  $\alpha = 2$  и  $\beta = 0.05$  показаны результаты расчета продольной силы, которая сильнее реагирует на наличие искажений, чем осевое смещение. Кривая 1 соответствует  $\xi = 0.1$ , а кривая 2 –  $\xi = 1$ . Отметим, что в первом случае относительный коэффициент поглощения оказался равным 0.43, а во втором уменьшился до 0.34.

Полученные результаты показывают, что рассмотренная модель упруго-фрикционного взаимодействия позволяет описать характерные особенности колебаний в условиях конструкционного демпфирования, обусловленного амплитудно-зависимым сухим трением.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кукин Г.Н., Соловьев А.Н., Кобляков А.И. Текстильное материаловедение. М.: Легпромбытиздат, 1989. 352 с.
2. Скардино Ф., Хирл Дж., Кавабата С. и др. Тканые конструкционные композиты / Под ред. Т.-В. Чу, Ф. Ко. М.: Мир, 1991. 432 с.
3. Никитин Л.В. Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением. М.: Моск. лицей, 1998. 272 с.
4. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47. Вып. 3. С. 271–306.
5. Мальшев А.П. Моделирование распределенного конструкционного демпфирования при установившихся и переходных процессах // Изв. АН. МТТ. 2001. № 4. С. 143–150.
6. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 193 с.

Москва

Поступила в редакцию  
20.09.2000