

УДК 539.3 : 534.1

© 2002 г. В.Г. БАЖЕНОВ, С.А. ПИРОГОВ, Д.Т. ЧЕКМАРЁВ

ЯВНАЯ СХЕМА СО СТАБИЛИЗИРУЮЩИМ ОПЕРАТОРОМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ КОНСТРУКЦИЙ

Аннотация. Обосновывается и развивается метод повышения эффективности явных схем численного решения нестационарных нелинейных задач динамики сплошной среды и теории оболочек типа Тимошенко. Эффективность метода иллюстрируется решением двумерных задач динамики многослойных композитных пластин и оболочек при импульсных и ударных нагружениях.

Введение. При расчете оболочечных конструкций под действием нестационарных нагрузок типичной является картина, когда динамический процесс является преимущественно длинноволновым по сравнению с толщиной, но требует мелкой пространственной сетки для описания решения в областях с большими градиентами напряжений. При использовании явных схем приходим к парадоксальной ситуации: временной шаг интегрирования, а с ним и эффективность численной схемы определяются высокочастотными колебаниями, существенно не влияющими на процесс деформирования конструкций. Для ее преодоления воспользуемся идеей метода построения неявных схем с расщепляющимся стабилизирующим оператором [1], комбинируя явную схему "крест" во всей области с локально неявной схемой для получения мелкомасштабного низкочастотного решения. Для построения стабилизирующего оператора будем учитывать в матрице масс моментные составляющие, что позволяет получать частично неявные схемы, отличающиеся простотой систем алгебраических уравнений и легкостью их обращения. В отличие от методов решения жестких систем [2, 3] предлагаемый подход применим как к линейным, так и к геометрически и физически нелинейным задачам. Примеры его эффективной конечно-элементной и конечно-разностной реализации для двумерных задач представлены в [4–6].

1. Построение схем МКЭ со стабилизирующим оператором для системы уравнений теории упругости. Рассмотрим построение численных схем плоской динамической задачи теории упругости. Однородная система уравнений Ламе имеет вид

$$(\lambda + G) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + G \Delta \mathbf{u} = \rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 \quad (1.1)$$

Здесь λ , G – константы Ламе, ρ – плотность. В плоской задаче полагаем $u_3 = 0$, а u_1 , u_2 зависящими только от двух первых координат. При использовании МКЭ для аппроксимации дифференциальной задачи матрица масс должна удовлетворять следующему условию: сумма всех ее элементов должна равняться массе конечного элемента. В рамках этого ограничения ее можно изменять, что приводит к различным разностным схемам. В частности, для получения явной схемы матрица масс должна быть диагональной. Рассмотрим варианты матрицы масс для четырехузлового билинейного элемента. Элементы матрицы масс, согласованной с конечно-элементной аппрокси-

матрицей, определяются с помощью формул $M_{ij} = \rho \int \varphi_i \varphi_j dS$, где φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) – базисные функции. В результате получаем ее в виде

$$M_s = \frac{k}{36} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad k = \rho h_1 h_2$$

Здесь узлы элемента пронумерованы по часовой стрелке начиная с левого нижнего угла. Очевидно, что такая матрица масс приводит к неявной схеме. Рассмотрим матрицы

$$M_0 = \frac{k}{4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_1 = \frac{k}{4} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \frac{k}{4} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Чисто явную схему получим, если взять матрицу масс в виде M_0 . Если же принять матрицу масс в виде $M_{R1} = M_0 + \xi M_1$ или $M_{R2} = M_0 + \xi M_2$ (где ξ – коэффициент, значение которого определяется из соображений устойчивости), то получим численную схему, явную в одном направлении и неявную в другом. Замена согласованной матрицы M_s на матрицы M_0, M_{R1}, M_{R2} эквивалентна замене точного интегрирования сил инерции по элементу на приближенное по формуле трапеций по двум направлениям (матрица M_0) или по одному из направлений (матрицы M_{R1}, M_{R2}). В последних случаях формулы приближенного интегрирования содержат также регулируемый параметр ξ . Данный прием можно применять также и в случае косоугольных и неравномерных сеток. При этом в двух последних случаях также получаем явно-неявные схемы (явные вдоль одного семейства узлов сетки и неявные – вдоль другого). С точки зрения теории МКЭ все рассмотренные схемы имеют одинаковый порядок аппроксимации. Для дальнейшего анализа рассмотрим вопросы устойчивости – один из важнейших показателей эффективности численных схем.

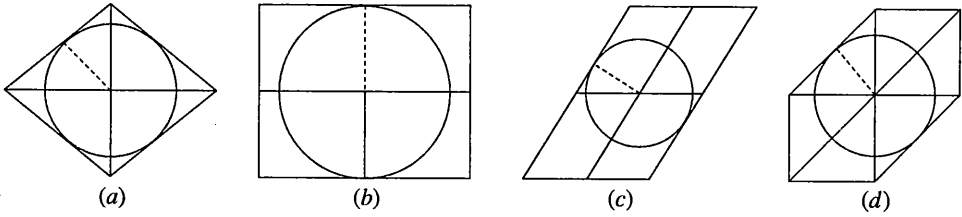
2. Оценки устойчивости схемы "крест". При численном решении сеточными методами (конечно-разностным, вариационно-разностным, МКЭ) исходная задача сводится к решению операторного сеточного уравнения. Явная схема типа "крест" имеет следующий общий вид

$$L_h u = D_{tt} u, \quad (D_{tt} u)_j^k = \frac{1}{\tau^2} (u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}) \quad (2.1)$$

Здесь L_h – положительный сеточный оператор, действующий в пределах одного временного слоя, D_{tt} – оператор второй разностной производной по времени, $u = u_j^k = u(x_j, t^k)$ – сеточная функция, j – мультииндекс. Схема (2.1) будет устойчива при выполнении спектрального критерия Неймана [1]. Для гиперболических систем необходимым условием устойчивости явной схемы "крест" является также условие Куранта – Фридриха – Леви (КФЛ). Эти условия имеют вид

$$\tau \leq 2 / \omega_{\max}, \quad \tau \leq h_{\min} / c \quad (2.2)$$

где ω_{\max}^2 – верхняя граница спектра сеточного оператора L_h , h_{\min} – минимальный размер ячейки разностной сетки, c – скорость звука. Исследования устойчивости разностных схем типа "крест" для плоской и трехмерной задач теории упругости показывают, что условие КФЛ, как правило, является и достаточным при его правильной геометрической интерпретации. На фиг. 1 представлены шаблоны оператора L_h схем



Фиг. 1

вида (2.1) для некоторых типичных двумерных задач математической физики. В виде окружностей приведены границы областей зависимости исходных дифференциальных задач при максимальном допустимом временном шаге. Штриховыми линиями показаны геометрические величины, входящие в формулы оценок устойчивости. Фигуры соответствуют следующим задачам: (a) двумерное волновое уравнение Лапласа на пятиточечном шаблоне (на ортогональной сетке): $h_{\min} = h_1 h_2 / \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ – высота, опущенная из центра шаблона на сторону ромба; (b) то же на девятиточечном шаблоне (см. [7]): $h_{\min} = \min(h_1 h_2)$ – минимальный шаг сетки; (c) плоская задача теории упругости (параллелограммные ячейки): $h_{\min} = \min(h_1 h_2)$ – минимальная высота параллелограммной ячейки; (d) плоская задача теории упругости (треугольные ячейки): $h_{\min} = \min(h_1, h_2, h_3)$ – минимальная высота треугольной ячейки.

3. Анализ явно-неявных схем. Анализ конечно-элементных схем удобно проводить для их конечно-разностного представления. Численная схема данной задачи, построенная на базе билинейного КЭ и преобразованная к конечно-разностному виду (см. [8]) может быть записана в виде

$$(\lambda + G) \begin{vmatrix} D_0^{(2)} D_{11} u_1 + D_1 D_2 u_2 \\ D_2 D_1 u_1 + D_0^{(1)} D_{22} u_2 \end{vmatrix} + G D_{\Delta} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{12} \left(((\lambda + G) h_1^2 + G h_1^2) D_{11} D_{22} u_1 \right) = \rho A D_{tt} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

где A – сеточный оператор, конкретный вид которого определяется матрицей масс. D_1 и D_2 – операторы первых, а D_{11} и D_{22} – вторых производных соответственно по x_1 и x_2 , $D_0^{(1)}$ и $D_0^{(2)}$ – операторы усреднения по тем же координатам, D_{Δ} – сеточный оператор Лапласа. Все они определяются следующими формулами:

$$(D_1 u)_{j,k}^l = \frac{1}{2h_1} (u_{j+1,k}^l - u_{j-1,k}^l), \quad (D_2 u)_{j,k}^l = \frac{1}{2h_2} (u_{j,k+1}^l - u_{j,k-1}^l)$$

$$(D_{11} u)_{j,k}^l = \frac{1}{h_1^2} (u_{j+1,k}^l - 2u_{j,k}^l + u_{j-1,k}^l), \quad (D_{22} u)_{j,k}^l = \frac{1}{h_2^2} (u_{j,k+1}^l - 2u_{j,k}^l + u_{j,k-1}^l)$$

$$(D_0^{(1)} u)_{j,k}^l = \frac{1}{4} (u_{j-1,k}^l + 2u_{j,k}^l + u_{j+1,k}^l), \quad (D_0^{(2)} u)_{j,k}^l = \frac{1}{4} (u_{j,k-1}^l + 2u_{j,k}^l + u_{j,k+1}^l)$$

$$D_{\Delta} = D_0^{(2)} D_{11} + D_0^{(1)} D_{22}$$

Заменяя в данной схеме точное интегрирование по элементу приближенным по формуле трапеций и полагая оператор A равным тождественному оператору E , получим разностную схему Уилкинса [9] на четырехугольных ячейках, или эквивалентную ей в случае равномерных сеток вариационно-разностную схему [7]. Последняя схема замечательна тем, что ее структура полностью совпадает со структурой дифференциальных уравнений (1.1). Ниже ограничимся анализом именно этой схемы. Анализ схемы (3.1), содержащей дополнительные члены второго порядка малости достаточно громоздок и отягощен несущественными деталями.

Схема Уилкинса [9], дополненная оператором A имеет вид

$$(\lambda + G) \begin{vmatrix} D_0^{(2)} D_{11} u_1 + D_1 D_{22} u_2 \\ D_2 D_{11} u_1 + D_0^{(1)} D_{22} u_2 \end{vmatrix} + G D_{\Delta} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} = \rho A D_u \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

Для $A = E$ она будет устойчивой при выполнении условия КФЛ: $\tau \leq \min(h_1, h_2)/c$. Будем считать, что ячейки разностной сетки вытянуты вдоль координаты x_1 , следовательно, условием устойчивости будет $\tau \leq h_2/c$. Попытаемся увеличить устойчивый шаг схемы до оценки $\tau \leq h_1/c$. Оператор A зададим в виде $A = E - \xi D_{s2}$, где D_{s2} – оператор, построенный по трем узлам вдоль короткой стороны ячеек разностной сетки. В данном случае $D_{s2} u_{j,k}^l = u_{j,k+1}^l - 2u_{j,k}^l + u_{j,k-1}^l$, аналогично оператор D_{s1} определяется формулой $D_{s1} u_{j,k}^l = u_{j+1,k}^l - 2u_{j,k}^l + u_{j-1,k}^l$. Здесь цифра 1 или 2 обозначает номер изменяющегося индекса. Такой же оператор A появляется в схеме МКЭ, если диагональную матрицу масс M_0 заменить на матрицу вида M_{R2} (см. выше).

Воспользуемся далее известным разложением волн в изотропной упругой среде на продольные и поперечные. Применяя к векторному уравнению (1.1) соответственно операции дивергенции и ротора, можно преобразовать его к скалярным волновым уравнениям. Аналогичные преобразования [10] можно провести со схемой (3.2), в итоге получим:

$$c_1^2 D_{\Delta} p = A D_u p, \quad c_2^2 D_{\Delta} q = A D_u q, \quad c_1^2 = (\lambda + 2G)/\rho, \quad c_2^2 = G/\rho \quad (3.3)$$

где $p = D_0^{(2)} D_{11} u_1 + D_0^{(1)} D_{22} u_2$, $q = D_0^{(1)} D_{22} u_1 - D_2^{(2)} D_{11} u_2$ – сеточные аналоги дивергенции и одной компоненты ротора. Следовательно, анализ разностной схемы (3.3) сводится к анализу схемы для двумерного волнового уравнения. Запишем полученное после преобразования дифференциальное уравнение и полудискретные (непрерывные по времени) уравнения, соответствующие схеме (3.2) при $A = E$ и $A = E - \xi D_{s2}$:

$$c^2 \Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad c^2 D_{\Delta} p = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad c^2 D_{\Delta} p = (E - \xi D_{s2}) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

Подставляя в (3.4) решение в виде $u = \exp[i(\alpha x_1 + \beta x_2 + \omega t)]$, получим соответствующие дисперсионные уравнения

$$\omega^2 = c^2 (\alpha^2 + \beta^2) \quad (3.5)$$

$$\omega_h^2 = c^2 \left(\frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{\alpha h_1}{2} \cos^2 \frac{\beta h_2}{2} + \frac{4}{h_2^2} \cos^2 \frac{\alpha h_1}{2} \sin^2 \frac{\beta h_2}{2} \right) \quad (3.6)$$

$$\omega_s^2 = \frac{\omega_h^2}{1 + 4\xi \sin^2(\beta h_2 / 2)} \quad (3.7)$$

Здесь ω , ω_h , ω_s – собственные частоты соответственно исходного уравнения и двух рассматриваемых дискретных систем. Для достижения оценки устойчивости $\tau \leq h_1/c$ схемы, выберем $\xi = ((h_1/h_2)^2 - 1)/4$. Влияние стабилизирующего оператора на точность численного решения определяется погрешностью квадратов собственных частот (3.6), (3.7) по отношению к (3.5). Разложим (3.6) и (3.7) при $\xi = ((h_1/h_2)^2 - 1)/4$ в ряды Тейлора и оставим в них только главные члены разложения до четвертого порядка включительно. Получим, соответственно

$$\Delta_h = \omega_h^2 - \omega^2 = c^2 \left(\frac{\alpha^4 h_1^2}{12} + \frac{\alpha^2 \beta^2 (h_1^2 + h_2^2)}{4} + \frac{\beta^4 h_2^2}{12} \right) + o(h_1^2 + h_2^2)$$

$$\Delta_p = \omega_p^2 - \omega^2 = c^2 \left(\frac{\alpha^4 h_1^2}{12} + 2 \frac{\alpha^2 \beta^2 h_1^2}{4} + \frac{\beta^4 h_1^2}{12} - \frac{\beta^4 h_2^2}{6} \right) + o(h_1^2 + h_2^2)$$

Анализ приведенных выражений позволяет сделать вывод, что обе схемы с точки зрения аппроксимации примерно равноценны. Приведем аналогичные выражения также для равномерных косоугольных сеток с параллелограммными ячейками. Подставляя в уравнения (3.4) решение в виде, согласованном с направлением разностной сетки $u = \exp[i(\alpha(x_1 - x_2 \operatorname{ctg} \varphi) + \beta(x_1 / \sin \varphi) + \omega t)]$, где φ – угол между сторонами ячеек, приходим к выражениям погрешностей квадратов частот:

$$\Delta_h = \frac{c^2 ((\alpha^2 - 4\alpha\beta \cos \varphi + 3\beta^2)\alpha^2 l_1^2 + (\beta^2 - 4\alpha\beta \cos \varphi + 3\alpha^2)\beta^2 l_2^2)}{12 \sin^2 \varphi} + o(h_1^2 + h_2^2)$$

$$\Delta_p = \frac{c^2 ((\alpha^2 + 6\beta^2)\alpha^2 l_1^2 - \alpha\beta \cos \varphi (4\alpha^2 l_1^2 - 2\beta^2 l_2^2 + 6\beta^2 l_1^2) + \beta^4 (3l_1^2 - 2l_2^2))}{12 \sin^2 \varphi} + o(h_1^2 + h_2^2)$$

Здесь l_1, l_2 – стороны, а h_1, h_2 – высоты параллелограммной ячейки.

При реализации схемы со стабилизирующим оператором на каждом временном шаге необходимо решать системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей для каждого ряда узлов вдоль коротких сторон ячеек. Это приводит к увеличению времени расчета одного шага по времени примерно на 15–20% для линейных задач и несколько меньше – для геометрически и физически нелинейных. В итоге, с учетом увеличения временного шага, общие временные затраты при использовании стабилизирующего оператора уменьшаются не менее, чем в 0.8 h_1/h_2 раз.

Рассмотрим возможность проведения расчетов с любым (в том числе и превышающим условие КФЛ относительно большего размера ячейки) шагом по времени. Предположим, требуется решать задачу с шагом интегрирования по времени $\tau^* = H/c$, где $H > h_1 \geq h_2$. Для этого введем стабилизирующий оператор в факторизованном виде $A = A_1 \cdot A_2$, где $A_1 = E - \frac{1}{4}(2H^2/h_1^2 - 1)D_{s1}$, $A_2 = E - \frac{1}{4}(2H^2/h_2^2 - 1)D_{s2}$. Схема будет устойчивой при условии $\tau \leq H/c$.

Как и предыдущая схема, она требует решения систем алгебраических уравнений методом прогонки на каждом временном шаге сначала вдоль всех продольных, а затем вдоль поперечных рядов узлов сетки. Анализ погрешностей аппроксимации приводит к выводам, аналогичным рассмотренным выше. При решении трехмерных задач можно предложить аналогичную схему, явную вдоль одного направления и неявную вдоль двух других.

Отметим свойства введенного в рассмотрение стабилизирующего оператора: он понижает высшие собственные частоты и, тем самым, позволяет увеличить шаг интегрирования по времени; его влияние в существенной части спектра регулируется параметром ξ , поэтому он не вносит заметной погрешности в решение нестационарных задач; он имеет простую структуру и легко обращается.

При решении геометрически и физически нелинейных задач обрабатываемые методом прогонки системы уравнений являются линейными и, следовательно, не требуют итераций, что выгодно отличает данную схему от известных чисто неявных схем. Учет геометрической нелинейности приводит к искажению сеток и может влиять на устойчивость схемы и соответственно величину временного шага. Корректировка параметра стабилизирующего оператора в каждой ячейке с помощью технологии МКЭ (см. выше) позволяет сохранить временной шаг на прежнем уровне. Если исключить из рассмотрения ударные волны, то физическая нелинейность не оказывает влияния на устойчивость схемы, поскольку в реально используемых материалах приводит к снижению скорости звука и собственных частот. Неизбежное при искажении сеток

снижение порядка точности носит точно такой же характер, как и в традиционных схемах МКЭ.

4. Стабилизирующий оператор в численных схемах теории пластин и оболочек типа Тимошенко. Рассмотрим реализацию данного подхода при решении нестационарных задач теории пластин на основе модели типа Тимошенко. Систему уравнений, описывающую поперечные колебания пластины типа Тимошенко запишем в безразмерном виде

$$a \left(\Delta w + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

$$\Delta \psi_1 + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right) - \frac{12a}{h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \psi_1 \right) = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

Здесь w – перемещения по нормали (прогиб), ψ_1, ψ_2 – углы поворота нормального волокна, h – толщина пластинки, $a = k^2(1-\nu)/2$, ν – коэффициент Пуассона, k^2 – коэффициент в теории пластин и оболочек типа Тимошенко.

Вариационно-разностная схема для системы (4.1) имеет вид [7, 10]:

$$a(D_\Delta w + D_1 D_0^{(2)} \psi_1 + D_0^{(1)} D_2 \psi_2) = D_{tt} w \quad (4.2)$$

$$D_\Delta \psi_1 + \frac{1}{2}(1+\nu) \left(D_1 D_2 \psi_1 - D_0^{(1)} D_{22} \psi_2 \right) - \frac{12}{h^2} \left(D_1 D_0^{(2)} w + D_0^{(1)} D_0^{(2)} \psi_1 \right) = A D_{tt} \psi_1 \quad (1 \leftrightarrow 2)$$

где A – стабилизирующий множитель. Дискретную модель Тимошенко (4.2) можно получить из моментной схемы МКЭ [11] с одним слоем элементов по толщинной координате x_3 в результате перехода к новым неизвестным функциям, определенным на срединной поверхности, как это принято в теории пластин и оболочек. В этом случае рассмотренный выше стабилизирующий оператор преобразуется в скалярный множитель $A \geq 1$ к инерции вращения. При выборе множителя будем руководствоваться с одной стороны условием устойчивости $\tau \leq \min(h_1, h_2, h)$, с другой – условием минимальности погрешности по собственной частоте в низшей (важнейшей) части спектра. В результате, оптимальное значение множителя $A = 1$ при $h \geq \min(h_1, h_2)$ и

$$A = 1 + \left(\min(h_1, h_2) / h \right)^2 \quad \text{при } h \leq \min(h_1, h_2) \quad (4.3)$$

В последнем случае временной шаг можно увеличить до значения $\tau = \min(h_1, h_2)$. Асимптотические значения погрешностей собственных частот схемы со стабилизирующим множителем (4.3) оказались лучше, чем у исходной схемы с $A = 1$. В частности для квадратной сетки ($h_1 = h_2$) имеем следующие значения относительных погрешностей [7]:

$$\delta_h = \frac{\omega_h - \omega}{\omega} = \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{h_1}{\lambda} \right)^2, \quad \delta_s = \frac{\omega_s - \omega}{\omega} = \frac{7\pi^4}{120} \left(\frac{h_1}{\lambda} \right)^4 \quad (4.4)$$

Здесь $\omega, \omega_h, \omega_s$ – соответственно собственные частоты системы (4.1), исходной разностной схемы и схемы со стабилизирующим оператором, λ – длина полуволны. Таким образом, приходим к выводу, что регуляризованная разностная схема оказалась точнее исходной. Применение данного метода при решении прикладных задач показало свою надежность и эффективность, позволило существенно (в $n \approx \approx \min(h_1, h_2)/h$ раз) сократить время расчетов на ЭВМ.

Таблица 1

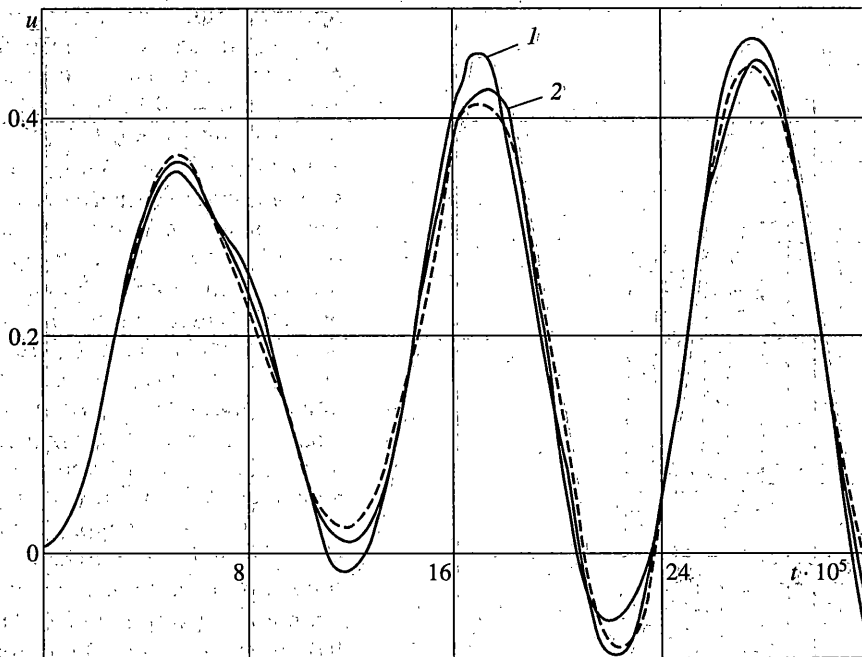
h_1 [см]	h_2 [см]	$m \cdot 10^3$ [кг]	ϵ_{22}^* [%]		$t^* \cdot 10^6$ [с]		$T \cdot 10^6$ [с]		$\tau \cdot 10^6$ [с]
0.175	1.6	62	1.1	$\frac{1.01}{1.04}$	60	$\frac{53}{50}$	187	$\frac{196}{190}$	$\frac{1.439}{0.1591}$
				$\frac{6.73}{6.95}$		$\frac{56}{47}$		$\frac{200}{190}$	$\frac{1.439}{0.3727}$
0.420	1.6	60	0.6	$\frac{6.73}{6.95}$	50	$\frac{56}{47}$	176	$\frac{200}{190}$	$\frac{1.439}{0.3727}$

Таблица 2

n	$h/\Delta s$	$\tau \cdot 10^7$ [с]	w_{\max}	T
10	1	$\frac{8.04}{4.18}$	$\frac{0.962}{0.973}$	$\frac{1.024}{1}$
		$\frac{8.04}{2.06}$	$\frac{0.968}{0.981}$	$\frac{1.030}{1}$
40	4	$\frac{8.04}{1.15}$	$\frac{0.993}{1}$	$\frac{1.042}{1}$

5. Численные результаты. Для иллюстрации эффективности данного подхода приведем решения геометрически и физически нелинейных задач динамического деформирования элементов конструкций при ударном и импульсном нагружении [4, 5]. В расчетах использовались две физических модели сплошной среды: теория течения с линейным кинематическим упрочнением для металлов и ортотропная теория упругости для армированных пластиков. В том и другом случаях учитывалась геометрическая нелинейность (лагранжев подход с перестроением координат узлов сетки в общем базисе).

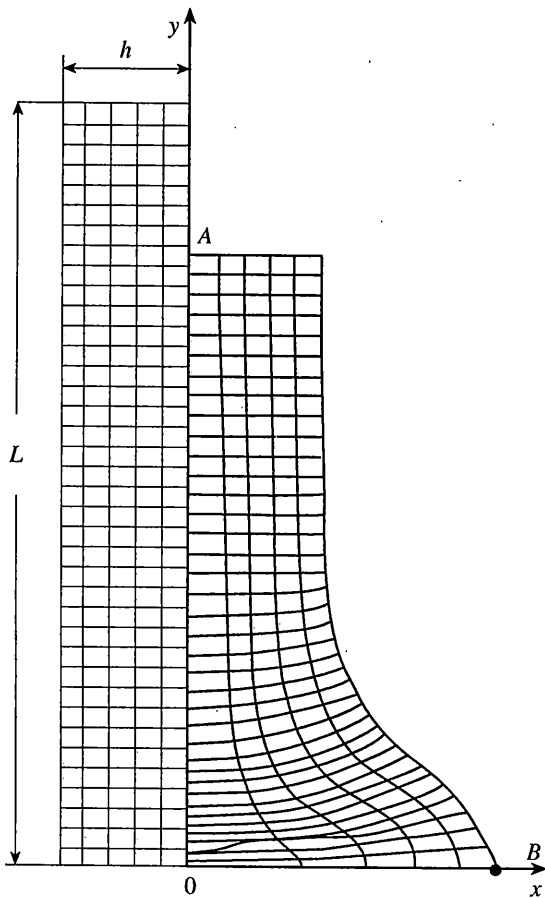
Проводилось сравнение результатов численных расчетов динамического деформирования свободных металлокомпозитных цилиндрических оболочек при внутреннем взрывном нагружении с экспериментальными данными [12]. Внутренний слой оболочки выполнен из Ст. 20 с характеристиками: модуль Юнга $E = 210$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, плотность $\rho = 7.85$ г/см³, предел текучести $\sigma_T = 0.35$ ГПа, модуль упрочнения $g = 0.5$ ГПа, наружный – из стеклопластика. Последний предполагался ортотропным со свойствами: $E_1 = 19$ ГПа, $E_2 = 33$ ГПа, $\nu_{12} = 0.12$, $G_{13} = 3.7$ ГПа, $\rho = 1.9$ г/см³. Закон нагружения оболочки определялся с помощью эмпирической зависимости [13]. Расчеты проводились на сетке из 44 ячеек по образующей оболочки и 2 ячеек по толщине. В табл. 1 для различных масс заряда m и толщин стального h_1 и композитного h_2 слоев приведены: максимальные значения кольцевой деформации ϵ_{22}^* в центральном сечении на внешней поверхности оболочки, время достижения максимальной деформации t^* , период радиальных колебаний T , шаг интегрирования уравнений движения τ . В левом столбце приведены экспериментальные данные [12], в правом – результаты расчетов по данной методике (в числителе с регуляризацией, в знаменателе – без нее). Наблюдается достаточно хорошее согласование экспериментальных данных и численных результатов. При этом регуляризация по толщинной координате позволяет существенно (в 3–9 раз) сократить время расчетов.



Фиг. 2

Приведем далее решения задач, иллюстрирующих применение явной схемы по толщине и неявной – вдоль другой координаты. Рассматривалась задача о динамическом деформировании жестко заземленной балки ($L = 5$ см, $h = 0.5$ см), нагруженной при $t > 0$ давлением $P_3 = 0.5$ ГПа. Балка выполнена из идеально упругого изотропного материала с характеристиками: $E = 50.8$ ГПа, $\nu = 0.3$, $\rho = 1.6$ г/см³. При расчетах брался один ряд ячеек по толщине балки. Результаты расчета на сетке из 10, 20 и 40 ячеек по образующей приведены в табл. 2, где n – число ячеек, $\Delta s = L/n$ – шаг сетки, w_{\max} – максимальный по времени прогиб, T – период колебаний. Величины w_{\max} и T даны по отношению к эталонному решению на 40 ячейках без регуляризации, в числителе – решение с регуляризацией, в знаменателе – без нее. Как видно из табл. 2, максимальные прогибы во всех расчетах практически совпадают, а ошибка в периоде колебаний от введения регуляризации не превышает 5%. Таким образом, регуляризация при $n = 40$ позволяет практически без потери точности шаг интегрирования увеличить в 7 раз. На фиг. 2 представлены аналогичные результаты для цилиндрической оболочки ($R = 10$ см, $L = 2R$, $h = 0.5$ см), выполненной из того же материала, что и балка и нагруженной при $t > 0$ внутренним давлением $P_3 = 0.5$ ГПа. Края оболочки жестко заделаны. Предварительные исследования показали, что погрешность решения менее 5% достигается на сетке из 80 ячеек. На фиг. 2 сплошные кривые 1, 2 соответствуют решению без регуляризации на 80 и 160 ячейках, штриховая – с регуляризацией (результаты на 80 и 160 ячейках практически совпали). При этом шаг интегрирования на 80 ячейках без регуляризации равен $2.05 \cdot 10^{-7}$ с, с регуляризацией – $7.27 \cdot 10^{-7}$ с, на 160 ячейках – соответственно $1.01 \cdot 10^{-7}$ и $7.27 \cdot 10^{-7}$ с. Из приведенных результатов следует, что регуляризация схемы не только существенно увеличивает шаг интегрирования по времени, но и улучшает сходимость численного решения.

Рассматривалась задача удара упругопластической прямоугольной полосы высотой $H = 7.5 \cdot 10^{-2}$ м и толщиной $2h = 1.9 \cdot 10^{-2}$ м со скоростью $V_0 = 200$ м/с о жесткую

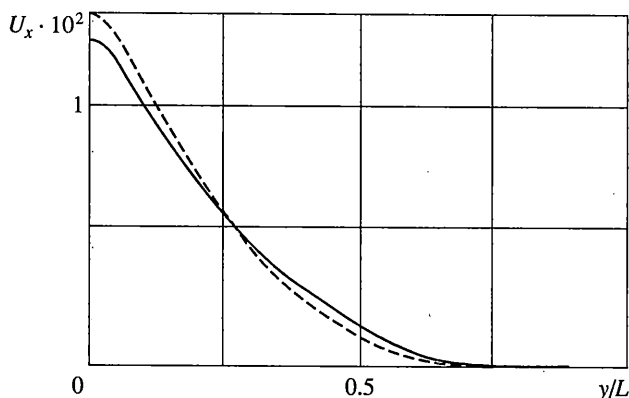


Фиг. 3

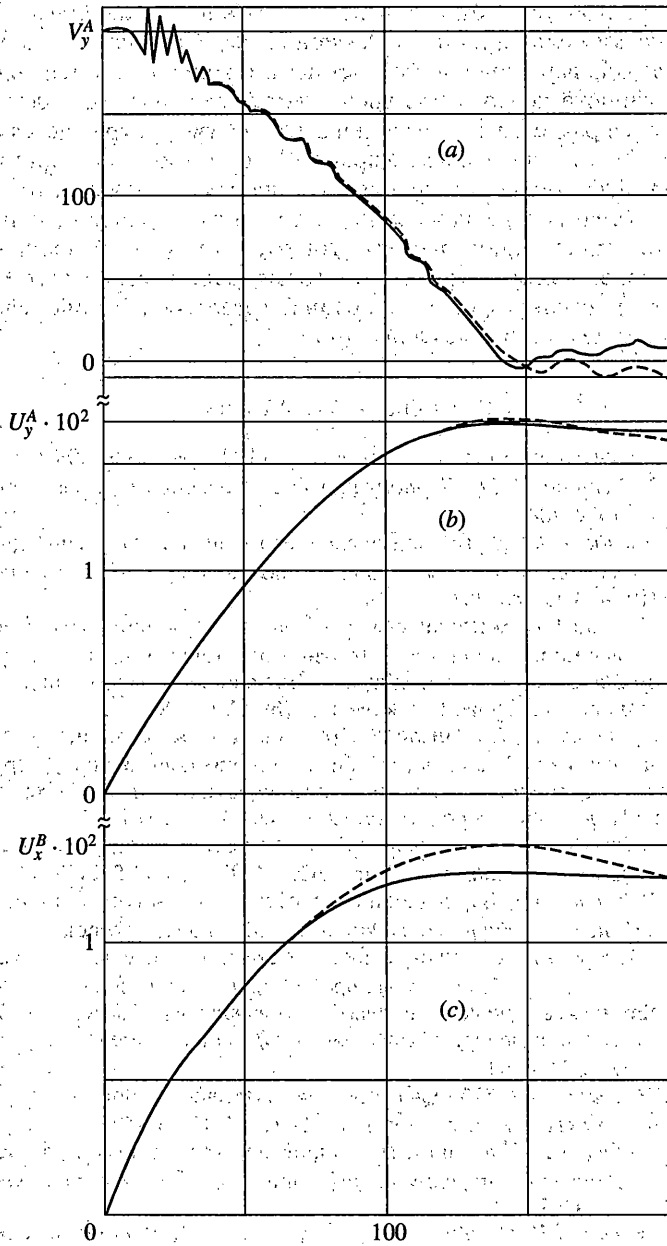
интегрирования по времени более чем в 4 раза. Рассмотренная выше регуляризация численной схемы по координате y позволяет проводить расчет нестационарного деформирования конструкции с постоянным шагом. Затраты машинного времени снижаются при этом более чем в 2.5 раза без существенного снижения точности. Замет-

преграду (фиг. 3–5). Полоса выполнена из алюминиевого сплава с механическими характеристиками: $E = 70$ ГПа, $\nu = 0.3$, $\rho = 2.73$ г/см³, $\sigma_T = 0.123$ ГПа, $3g = 0.1$ ГПа. На фиг. 3 представлена конечно-элементная сетка в момент отскока полосы от преграды ($t = 140$ мкс), слева изображена покрывающая конструкцию недеформированная сетка. На фиг. 4 дано распределение вдоль боковой поверхности полосы компонент смещений U_x [м] по оси x . Сплошной линией обозначена зависимость, полученные с использованием явной схемы "крест", штриховой – с использованием явно-неявной схемы. На фиг. 5, a , b показано изменение во времени скоростей [м/с] и перемещений [м] по оси y в точке A (см. фиг. 3), а на фиг. 5, c – перемещения по оси x точки B (см. фиг. 3), время t в [мкс].

На начальном этапе деформирования полосы происходит сильное локальное смятие конечно-элементной сетки в области ударяемого торца (см. фиг. 3). При использовании явной по пространству численной схемы это приводит к падению шага ин-



Фиг. 4



Фиг. 5

ные на фиг. 5 различия решений (не более 10%) объясняются снижением точности регуляризованной схемы за счет сильного искривления конечно-элементной сетки.

Отметим, что даже при столь значительных искривлениях сетки наблюдается удовлетворительное соответствие результатов.

6. Заключение. Рассмотренный в работе подход к увеличению временного шага в разностной схеме "крест" и способы его реализации позволяют существенно повысить эффективность существующих методик численного решения задач нестационарных процессов.

ционарной динамики конструкций. Он применим как к линейным, так и геометрически и физически нелинейным многомерным задачам, при численном решении конечно-разностными, вариационно-разностными и конечно-элементными методами. Эффективность данного подхода тем выше, чем более жесткой является решаемая задача [3] (чем более разнесены высшая и низшая части спектра частот). Он является достаточно гибким и универсальным. Управляя параметром регуляризации ξ , можно получить приемлемую точность решения даже на сетках, далеких от равномерных. Отмеченные свойства метода позволяют применять его при решении широкого класса нестационарных задач расчета тонкостенных и массивных элементов конструкций в зонах высоких градиентов геометрии, жесткостных характеристик или нагрузок от пространственных координат (различные концентраторы напряжений, тонкие жесткие или мягкие слои и др.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
2. Ракитский У.В., Устинов С.М., Черноуцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979. 208 с.
3. Евсеев Е.Г., Семенов А.Ю. Метод для численного решения уравнений динамики тонкостенных оболочек, основанный на выделении сильноосциллирующих компонент // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 4. С. 785–787.
4. Баженов В.Г., Столов В.П. Численное моделирование нестационарных осесимметричных волновых процессов в многослойных композитных пластинах и оболочках вращения // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1989. С. 80–88.
5. Баженов В.Г., Прокопенко М.Б. Численное решение осесимметричных нелинейных нестационарных задач динамики составных упругопластических конструкций // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов: Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1991. Вып. 49. С. 55–63.
6. Шешенин С.В., Фу Минхуэй. Полуявный метод решения задач теории упругости для тонкостенных осесимметрических тел // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 78–85.
7. Баженов В.Г., Чекарчев Д.Т. Вариационно-разностные схемы в нестационарных волновых задачах динамики пластин и оболочек. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1992. 159 с.
8. Чекарчев Д.Т. Построение конечно-разностных схем, эквивалентных численным схемам метода конечного элемента // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов. Тов. науч. изд. КМК, М.: 1999. С. 129–138.
9. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
10. Баженов В.Г., Чекарчев Д.Т. Об индексной коммутативности численного дифференцирования // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1989. № 5. С. 662–674.
11. Баженов В.Г., Кибец А.И. Численное моделирование трехмерных задач нестационарного деформирования упругопластических конструкций методом конечных элементов // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 1. С. 52–59.
12. Цыпкин В.И., Русак В.Н., Иванов А.Г., Федоренко А.Г., Воронцова О.С. Деформация и разрушение двухслойных металлопластиковых оболочек при внутреннем импульсном нагружении // Механика композитных материалов. 1987. № 5. С. 833–838.
13. Адищев В.В., Корнев В.М., Талзи Л.А. Оценки максимальных напряжений в замкнутых цилиндрических сосудах при осесимметричном взрывном нагружении // Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1983. 75 с. – Деп. в ВИНТИ 05.12.1983. № 6588-83.

Н. Новгород

Поступила в редакцию
18.04.2000