

УДК 539.3

© 2002 г. Г.З. ШАРАФУТДИНОВ

НАПРЯЖЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКЕ СО СВОБодНЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

Задача об одноосном растяжении бесконечной тонкой пластинки со свободным эллиптическим отверстием рассматривается в трехмерной постановке при помощи функций комплексного переменного. С этой целью, помимо потенциалов Колосова – Мусхелишвили, дополнительно введен третий комплексный потенциал. Даны представления вектора перемещения и тензоров напряжений и деформаций через три комплексных потенциала. При решении задачи использовано конформное отображение. Решение ищется при помощи степенных рядов. Обнаружено существенное влияние касательных компонент тензора напряжений, не учитываемых в плоской задаче. Приводятся некоторые числовые данные, характеризующие решение. Установлены асимптотические оценки поведения напряжений при неограниченном увеличении эллиптичности отверстия.

Как известно [1], решения задач теории упругости для плоского напряженного состояния являются приближенными. Уточнение решений этого класса задач в трехмерной постановке представляет значительный интерес, особенно в нелинейных задачах механики деформируемых тел, при определении реальных полей напряжений и деформаций, зачастую используемых при установлении предельных состояний, т.е. пределов упругости, текучести, прочности и т.п. Для рассматриваемой задачи такой анализ особенно важен для оценки напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины при ее представлении в виде эллиптического выреза в пластинке.

1. Допустим, что дана бесконечная тонкая пластинка со свободным эллиптическим отверстием, симметричная и нагружаемая симметрично своей срединной плоскостью. Координатную плоскость OX_1X_2 совместим со срединной плоскостью, а ось OX_3 направим перпендикулярно к ней. Будем считать, что оси эллипса a и b расположены на осях координат OX_1 и OX_2 соответственно и пластинка подвергается растяжению напряжением $\sigma_{11} = p$ вдоль оси OX_1 .

Из симметрии пластинки относительно срединной плоскости и ее малой толщины следует, что вектор перемещения $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ можно представить в виде $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$, $u_3(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2)x_3$. Определим компоненты тензоров деформации ϵ_{ij} и напряжений σ_{ij} :

$$\epsilon_{11} = \partial u_1 / \partial x_1, \quad \epsilon_{22} = \partial u_2 / \partial x_2, \quad \epsilon_{33} = g(x_1, x_2)$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \epsilon_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x_1} x_3, \quad \epsilon_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x_2} x_3$$

$$\sigma_{11} = \lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \sigma_{22} = \lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \sigma_{33} = \lambda \Theta + 2\mu g(x_1, x_2)$$

$$\sigma_{12} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \sigma_{13} = \mu \frac{\partial g}{\partial x_1} x_3, \quad \sigma_{23} = \mu \frac{\partial g}{\partial x_2} x_3$$

$$\Theta = \partial u_1 / \partial x_1 + \partial u_2 / \partial x_2 + g$$

где λ, μ – постоянные Ламе.

Уравнения равновесия $\sigma_{ij,j} = 0$ приводятся к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{11} + \mu g) + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{22} + \mu g) &= 0 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Из третьего уравнения равновесия следует, что $g(x_1, x_2)$ – гармоническая функция. Используя условие совместности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

нетрудно показать, что сумма $(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \quad (1.2)$$

Введем функцию напряжений $\Phi(x_1, x_2)$:

$$\sigma_{11} + \mu g = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} + \mu g = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Нетрудно проверить, что функция напряжений удовлетворяет первым двум уравнениям равновесия (1.1). Очевидно, что

$$\sigma_{11} = \partial^2 \Phi / \partial x_2^2 - \mu g, \quad \sigma_{22} = \partial^2 \Phi / \partial x_1^2 - \mu g$$

Учитывая гармоничность функции $g(x_1, x_2)$, из (1.2) получим

$$\nabla^2(\nabla^2 \Phi - 2\mu g) = \nabla^4 \Phi - 2\mu \nabla^2 g = \nabla^4 \Phi = 0$$

т.е. функция напряжений есть бигармоническая функция и, следовательно [2], она может быть представлена при помощи формулы Гурса в виде комбинации функций комплексных переменных $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$:

$$2\Phi(z, \bar{z}) = \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}) \quad (1.3)$$

Используя представления для функции напряжений, получаем

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + 2\mu g = 4\partial^2 \Phi / \partial z \partial \bar{z} \quad (1.4)$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12} = -4\partial^2 \Phi / \partial \bar{z}^2 \quad (1.5)$$

При помощи (1.3) соотношения (1.4), (1.5) преобразуются к виду

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + 2\mu g = 2[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] \quad (1.6)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \chi''(z)] \quad (1.7)$$

Они выражают компоненты тензора напряжений через два комплексных потенциала. Однако в первое из них входит также и компонента тензора деформации $\varepsilon_{33} = g(x_1, x_2)$,

что и отличает их от соответствующих соотношений плоской задачи теории упругости [2].

Представим $g(x_1, x_2)$, а также компоненты вектора перемещения u_1, u_2 в комплексной форме, для чего введем комплексное перемещение $D = u_1 + iu_2$. Нетрудно показать, что

$$2 \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + i \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} + 2i\varepsilon_{12}$$

Используя закон Гука, получим

$$4\mu \partial D / \partial \bar{z} = \sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12} \quad (1.8)$$

Сопоставляя (1.5) и (1.8) имеем $4\mu \partial D / \partial \bar{z} = -4\partial^2 \Phi / \partial \bar{z}^2$. Очевидно, что это уравнение удовлетворяется, если положить $4\mu D(z, \bar{z}) = f(z) - 4\partial \Phi(z, \bar{z}) / \partial \bar{z}$ или с учетом приведенной выше формулы Гурса (1.3):

$$4\mu D(z, \bar{z}) = 4\mu(u_1 + iu_2) = f(z) - 2[\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z})] \quad (1.9)$$

Это выражение, содержащее три комплексных потенциала, есть обобщение формулы Колосова для перемещений [2]. Продифференцируем его по z и выделим действительную часть; в результате получим

$$4\mu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = f'(z) + \bar{f}'(\bar{z}) - 4[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] \quad (1.10)$$

Для представления деформации ε_{33} (т.е. функции g) в комплексной форме обратимся к соотношениям закона Гука, откуда имеем $\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2(\lambda + \mu)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\lambda g$. Прибавив к левой и правой частям последнего соотношения $2\mu g$ и разрешив его относительно g , получим

$$g = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + 2\mu g) - (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

Учитывая (1.6) и (1.10) окончательно имеем

$$g = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} [\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] - \frac{1}{4\mu} [f'(z) + \bar{f}'(\bar{z})] \quad (1.11)$$

Полученное представление позволяет теперь модернизировать соотношение (1.6), исключив из него функцию g

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = -\frac{2\mu}{\lambda + \mu} [\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] + \frac{1}{2} [f'(z) + \bar{f}'(\bar{z})] \quad (1.12)$$

Таким образом, действительные и мнимые части (1.7), (1.9), а также (1.11) и (1.12) дают шесть соотношений, для представления шести величин – трех компонент тензора напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$, двух компонент вектора перемещений u_1, u_2 и значения третьей деформации $\varepsilon_{33} = g$ – при помощи трех комплексных потенциалов.

Однако напряженное состояние характеризуется также и компонентами тензора напряжений σ_{33}, σ_{13} и σ_{23} . Они определяются из соотношений

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + \mu} [\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] - \frac{1}{2} [f'(z) + \bar{f}'(\bar{z})] \\ \sigma_{13} - i\sigma_{23} &= 2x_3 \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \varphi''(z) - \frac{1}{4} f''(z) \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

Полученные выражения для компонент тензора напряжений при помощи трех комплексных потенциалов удовлетворяют уравнениям равновесия по построению; кроме того, непосредственно проверено, что они удовлетворяют условиям совместности в форме Бельтрами – Мичелла.

Граничные условия $\sigma_{ij}l_j = f_i$ на контуре тела приводятся к виду

$$d[\varphi(z) + z\bar{\varphi}'(\bar{z}) + \bar{\chi}'(\bar{z})] - \mu g dz = i(f_1 + if_2) ds$$

Используя (1.11) получим

$$\frac{1}{4}[f'(z) + \bar{f}'(\bar{z})]dz - \frac{\mu}{\lambda + \mu}[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})]dz + [z\bar{\varphi}''(\bar{z})d\bar{z} + \bar{\chi}''(\bar{z})d\bar{z}] = i(f_1 + if_2) ds \quad (1.14)$$

Краевые условия $\sigma_{ij}l_j = p_i$ на граничной поверхности пластинки постоянной толщины сводятся к соотношению

$$\sigma_{33} \Big|_{x_3 = \pm h} = \frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + \mu} [\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] - \frac{1}{2} [f'(z) + \bar{f}'(\bar{z})] \Big|_{x_3 = \pm h} = 0 \quad (1.15)$$

2. Предположим, что функция

$$z = \omega(\zeta) \quad (2.1)$$

осуществляет конформное отображение некоторой области комплексной плоскости ζ на определенную область комплексной плоскости z . С помощью отображения (2.1) выразим функции $\varphi(z)$, $f(z)$, $\chi(z)$, введенные в п. 1, через переменную ζ :

$$\varphi(z) = \varphi[\omega(\zeta)] = \varphi_1(\zeta), \quad f(z) = f[\omega(\zeta)] = f_1(\zeta), \quad \chi(z) = \chi[\omega(\zeta)] = \chi_1(\zeta)$$

При этом производные, например, для функции $f(z)$ приобретают вид

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \frac{df_1(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \frac{f_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

$$f''(z) = \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{f_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] \frac{d\zeta}{dz} = \frac{f_1''(\zeta)\omega'(\zeta) - f_1'(\zeta)\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^3}$$

Подставляя производные от комплексных потенциалов в выражении для перемещений и напряжений (1.9), (1.12), (1.7), (1.13), получаем

$$4\mu(u_1 + iu_2) = f_1(\zeta) - 2 \left[\varphi_1(\zeta) + \omega(\zeta) \frac{\bar{\varphi}_1'(\bar{\zeta})}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})} + \frac{\bar{\chi}_1'(\bar{\zeta})}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})} \right] \quad (2.2)$$

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = -\frac{2\mu}{\lambda + \mu} \left[\frac{\varphi_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\bar{\varphi}_1'(\bar{\zeta})}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{f_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\bar{f}_1'(\bar{\zeta})}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})} \right] \quad (2.3)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = \frac{2}{[\omega'(\zeta)]^3} [\bar{\omega}(\bar{\zeta})\varphi_1''(\zeta)\omega'(\zeta) - \bar{\omega}(\bar{\zeta})\varphi_1'(\zeta)\omega''(\zeta) + \chi_1''(\zeta)\omega'(\zeta) - \chi_1'(\zeta)\omega''(\zeta)] \quad (2.4)$$

$$\sigma_{13} - i\sigma_{23} = 2x_3 \left\{ \frac{1}{[\omega'(\zeta)]^2} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \varphi_1''(\zeta) - \frac{1}{4} f_1''(\zeta) \right] - \frac{\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^3} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \varphi_1'(\zeta) - \frac{1}{4} f_1'(\zeta) \right] \right\} \quad (2.5)$$

Выражения (1.14) и (1.15) для граничных условий на контуре внутреннего выреза в пластинке и на граничной поверхности пластинки постоянной толщины соответственно приводятся к виду

$$\frac{1}{[\omega'(\zeta)]^3} [\overline{\omega}(\bar{\zeta})\varphi_1''(\zeta)\omega'(\zeta) - \overline{\omega}(\bar{\zeta})\varphi_1'(\zeta)\omega''(\zeta) + \chi_1''(\zeta)\omega'(\zeta) - \chi_1'(\zeta)\omega''(\zeta)]d\omega(\zeta) + \frac{1}{4} \left[\frac{f_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\bar{f}_1'(\bar{\zeta})}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})} \right] d\overline{\omega}(\bar{\zeta}) - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left[\frac{\varphi_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\bar{\varphi}_1'(\bar{\zeta})}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})} \right] d\overline{\omega}(\bar{\zeta}) = -i(f_1 - if_2)ds \quad (2.6)$$

$$\left\{ \frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + \mu} [\overline{\omega}'(\bar{\zeta})\varphi_1'(\zeta) + \omega'(\zeta)\bar{\varphi}_1'(\bar{\zeta})] - \frac{1}{2} [\overline{\omega}'(\bar{\zeta})f_1'(\zeta) + \omega'(\zeta)\bar{f}_1'(\bar{\zeta})] \right\} \Big|_{x_3 = \pm h} = 0 \quad (2.7)$$

Применим конформное отображение

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad R = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{a+b}$$

к задаче об одноосном растяжении тонкой пластинки со свободным эллиптическим отверстием.

Поскольку при $\rho = 1$:

$$\zeta = e^{i\alpha}, \quad d\zeta = d(pe^{i\alpha}) = i\alpha e^{i\alpha} d\alpha, \quad d\bar{\zeta} = d(\rho e^{-i\alpha}) = -i\alpha e^{-i\alpha} d\alpha$$

то граничное условие (2.6) на контуре свободного кругового отверстия $\rho = 1$ можно несколько преобразовать; представим его в виде

$$\begin{aligned} (\alpha_{pp} - i\sigma_{p\alpha})|_{\rho=1} = & \omega'(\zeta)\overline{\omega}'(\bar{\zeta}) \left[\frac{1}{4} f_1'(\zeta) - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \varphi_1'(\zeta) \right] + \\ & + [\omega'(\zeta)]^2 \left[\frac{1}{4} \bar{f}_1'(\bar{\zeta}) - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \bar{\varphi}_1'(\bar{\zeta}) \right] - \\ & - [\overline{\omega}(\bar{\zeta})\omega'(\zeta)\varphi_1''(\zeta) - \overline{\omega}(\bar{\zeta})\omega''(\zeta)\varphi_1'(\zeta) + \omega'(\zeta)\chi_1''(\zeta) - \omega''(\zeta)\chi_1'(\zeta)]e^{2i\alpha} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Комплексные потенциалы примем в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1'(\zeta) &= A_0 + \frac{A_1}{\zeta} + \frac{A_2}{\zeta^2} + \dots \\ \chi_1''(\zeta) &= B_0 + \frac{B_1}{\zeta} + \frac{B_2}{\zeta^2} + \dots \\ f_1'(\zeta) &= C_0 + \frac{C_1}{\zeta} + \frac{C_2}{\zeta^2} + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Очевидно, что

$$\varphi_1''(\zeta) = -\frac{A_1}{\zeta^2} - 2\frac{A_2}{\zeta^3} - \dots, \quad f_1''(\zeta) = -\frac{C_1}{\zeta^2} - 2\frac{C_2}{\zeta^3} - \dots$$

Интегрируя (2.9), получаем

$$\begin{aligned} \varphi_1(\zeta) &= A + A_0\zeta + A_1 \ln \zeta - \frac{A_2}{\zeta} - \frac{1}{2} \frac{A_3}{\zeta^2} - \dots \\ \chi_1(\zeta) &= B + B_0\zeta + B_1 \ln \zeta - \frac{B_2}{\zeta} - \frac{1}{2} \frac{B_3}{\zeta^2} - \dots \end{aligned}$$

$$f_1(\zeta) = C + C_0\zeta + C_1 \ln \zeta - \frac{C_2}{\zeta} - \frac{1}{2} \frac{C_3}{\zeta^2} - \dots$$

где A , B и C – постоянные интегрирования. Эти величины характеризуют только перемещение деформируемого тела как абсолютно твердого и поэтому их можно принять равными нулю [2].

Подставляя указанные выражения и производные отображающей функции в граничное условие (2.7), получим

$$\frac{3\lambda + 4\mu}{3\lambda + 2\mu} \left[R \left(1 - \frac{m}{\zeta^2} \right) \left(A_0 + \frac{A_1}{\zeta} + \frac{A_2}{\zeta^2} + \dots \right) + R \left(1 - \frac{m}{\zeta^2} \right) \left(\bar{A}_0 + \frac{\bar{A}_1}{\zeta} + \frac{\bar{A}_2}{\zeta^2} + \dots \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[R \left(1 - \frac{m}{\zeta^2} \right) \left(C_0 + \frac{C_1}{\zeta} + \frac{C_2}{\zeta^2} + \dots \right) + R \left(1 - \frac{m}{\zeta^2} \right) \left(\bar{C}_0 + \frac{\bar{C}_1}{\zeta} + \frac{\bar{C}_2}{\zeta^2} + \dots \right) \right] \right] = 0$$

Отсюда находим при $k = 0, 2$:

$$\frac{3\lambda + 4\mu}{3\lambda + 2\mu} [A_k + \bar{A}_k] - \frac{1}{2} [C_k + \bar{C}_k] = 0 \quad (2.10)$$

и для любого номера $k \neq 0, k \neq 2$:

$$\frac{3\lambda + 4\mu}{3\lambda + 2\mu} A_k - \frac{1}{2} C_k = 0 \quad (2.11)$$

Проводя подобную процедуру с граничным условием (2.8), получаем

$$0 = R^2 (1 - me^{-2i\alpha})(1 - me^{2i\alpha}) \left[\frac{1}{4} (C_0 + C_1 e^{-i\alpha} + C_2 e^{-2i\alpha} + \dots) - \right. \\ \left. - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (A_0 + A_1 e^{-i\alpha} + A_2 e^{-2i\alpha} + \dots) \right] + R^2 (1 - me^{-2i\alpha})^2 \times \\ \times \left[\frac{1}{4} (\bar{C}_0 + \bar{C}_1 e^{i\alpha} + \bar{C}_2 e^{2i\alpha} + \dots) - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (\bar{A}_0 + \bar{A}_1 e^{i\alpha} + \bar{A}_2 e^{2i\alpha} + \dots) \right] - \\ - e^{2i\alpha} \{ R(e^{-i\alpha} + me^{i\alpha}) [R(1 - me^{-2i\alpha})(-A_1 e^{-2i\alpha} - A_2 e^{-3i\alpha} - \dots) - \\ - 2Rme^{-3i\alpha} (A_0 + A_1 e^{-i\alpha} + A_2 e^{-2i\alpha} + \dots)] + R(1 - me^{-2i\alpha})(B_0 + B_1 e^{-i\alpha} + B_2 e^{-2i\alpha} + \dots) - \\ - 2Rme^{-3i\alpha} (B_0 e^{i\alpha} + B_1 i\alpha - B_2 e^{-i\alpha} - \dots) \}$$

Приравнявая коэффициенты при α и при одинаковых степенях экспоненты, находим (предварительно заметив, что коэффициенты с отрицательными индексами равны нулю)

$$B_1 = 0 \quad (2.12)$$

$$m^2 \left[\frac{1}{4} \bar{C}_{k+2} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \bar{A}_{k+2} \right] - 2m \left[\frac{1}{4} \bar{C}_k - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \bar{A}_k \right] + \\ + \left[\frac{1}{4} \bar{C}_{k-2} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \bar{A}_{k-2} \right] = 0 \quad (k \geq 5) \quad (2.13)$$

$$- 2Rm \left[\frac{1}{4} C_{k+2} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} A_{k+2} \right] + R(m^2 + 1) \left[\frac{1}{4} C_k - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} A_k \right] -$$

$$\begin{aligned}
& -Rm \left[\frac{1}{4} C_{k-2} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} A_{k-2} \right] + Rm^2 \left[\frac{1}{4} \bar{C}_{4-k} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \bar{A}_{4-k} \right] - \\
& + 2Rm \left[\frac{1}{4} \bar{C}_{2-k} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \bar{A}_{2-k} \right] + (k+2)RmA_{k+2} + kR(1-m^2)A_k + 2Rm^2 A_k - \\
& - (k-4)RmA_{k-2} - B_{k+2} + \frac{k-3}{k-1} mB_k = 0 \quad (k \geq 2)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Приведем также коэффициенты разложения при следующих степенях экспоненты: $2i\alpha$, $i\alpha$, 0 , $-i\alpha$ в указанной последовательности. Каждый из них, в силу нулевых граничных условий на контуре эллиптического выреза, приравнивается нулю. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
& m^2 \left[\frac{1}{4} \bar{C}_6 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \bar{A}_6 \right] - m \left[\frac{1}{4} \bar{C}_4 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \bar{A}_4 \right] + \\
& + \left[\frac{1}{4} \bar{C}_2 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \bar{A}_2 \right] - m \left[\frac{1}{4} C_0 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} A_0 \right] - \frac{B_0}{R} = 0
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
& Rm^2 \left[\frac{1}{4} \bar{C}_5 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \bar{A}_5 \right] - 2Rm \left[\frac{1}{4} \bar{C}_3 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \bar{A}_3 \right] + R \left[\frac{1}{4} \bar{C}_1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \bar{A}_1 \right] - \\
& - Rm \left[\frac{1}{4} C_1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} A_1 \right] + RmA_1 - B_1 = 0
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
& Rm^2 \left[\frac{1}{4} \bar{C}_4 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \bar{A}_4 \right] - 2Rm \left[\frac{1}{4} \bar{C}_2 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \bar{A}_2 \right] + R \left[\frac{1}{4} \bar{C}_0 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \bar{A}_0 \right] + \\
& + R(1+m^2) \left[\frac{1}{4} C_0 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} A_0 \right] - Rm \left[\frac{1}{4} C_2 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} A_2 \right] + \\
& + 2RmA_2 + 2Rm^2 A_0 - B_2 + 3mB_0 = 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
& Rm^2 \left[\frac{1}{4} \bar{C}_3 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \bar{A}_3 \right] - 2Rm \left[\frac{1}{4} \bar{C}_1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \bar{A}_1 \right] + R \left[\frac{1}{4} \bar{C}_1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \bar{A}_1 \right] + \\
& + R(1+m^2) \left[\frac{1}{4} C_1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} A_1 \right] - Rm \left[\frac{1}{4} C_3 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} A_3 \right] + \\
& + 3RmA_3 + Rm^2 A_1 - B_3 + mB_1 = 0
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Уравнения (2.11) выражают одну из величин A_k или C_k через другую, так что в дальнейшем анализе системы уравнений будем считать неизвестной лишь одну из них. Система уравнений для определения коэффициентов разложения разделяется на две – для четных и нечетных индексов. Другой характерной особенностью системы является "зацепленность" уравнений, выражаемая в соотношениях (2.13) и (2.14). В практическом плане это проявляется в том, что число неизвестных, начиная с определенного номера k , будет на единицу больше числа уравнений. Для разрешения этой проблемы обратим внимание на следующее обстоятельство. Для сходимости рядов, используемых для представления комплексных потенциалов (в том числе, и при $|\zeta| = 1$) коэффициенты A_n и C_n должны стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$. Поэтому

положив A_k (или C_k) равным нулю при достаточно большом k (тогда тем более A_{k+2} равно нулю), из (2.13) получаем $A_{k-2} = 0$. Уравнения (2.13) позволяют установить, что

$$A_k = 0, \quad C_k = 0 \quad (k \geq 3) \quad (2.19)$$

Теперь нетрудно определить все оставшиеся нечетные коэффициенты. Действительно, из условия однозначности перемещений (2.2), учитывая (2.12), находим $C_1 - 2A_1 = 0$. Дополняя последнее равенство соотношением (2.11) при $k = 1$ получим систему уравнений, из которой находим $A_1 = 0, C_1 = 0$. При этом в силу принятого выше допущения (2.16) удовлетворяется автоматически; из (2.18) получаем $B_3 = 0$, а из (2.14) $-B_{2k+1} = 0$ при $k \geq 2$.

Определим теперь четные коэффициенты разложений. Реализация граничных условий на бесконечности приводит к следующим из (2.3), (2.4) при $z \rightarrow \infty$ соотношениям:

$$-\frac{2\lambda}{\lambda + \mu}[A_0 + \bar{A}_0] + \frac{1}{2}[C_0 + \bar{C}_0] = p, \quad 2\frac{B_0}{R^2} = -p$$

которые совместно с (2.10) при $k = 0$ позволяют определить

$$B_0 = -\frac{1}{2}pR^2$$

$$A_0 = \frac{\lambda + \mu}{2(3\lambda + 2\mu)}pR = \frac{1}{4(1 + \nu)}pR$$

$$C_0 = \frac{3\lambda + 4\mu}{3\lambda + 2\mu}pR = \frac{2 - \nu}{1 + \nu}pR$$

Коэффициенты A_2 и C_2 определим из уравнения (2.10) при $k = 2$ и (2.15); в последнем учтем, кроме того, (2.19). Тогда

$$A_2 = \frac{\lambda + \mu}{3\lambda + 2\mu} \frac{m - 2}{2} pR = \frac{1}{4(1 + \nu)}(m - 2)pR$$

$$C_2 = \frac{3\lambda + 4\mu}{3\lambda + 2\mu}(m - 2)pR = \frac{2 - \nu}{1 + \nu}(m - 2)pR$$

После этого из (2.17) определим B_2 :

$$B_2 = \frac{1}{2} \left[1 - m^2 - 4 \frac{\lambda + \mu}{3\lambda + 2\mu} (m - m^2) \right] pR^2 = \frac{1}{2} \left[1 - m^2 - \frac{2}{1 + \nu} (m - m^2) \right] pR^2$$

И, наконец, из (2.14) последовательно находим

$$B_4 = - \left[\frac{7\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} + \frac{2\lambda}{3\lambda + 2\mu} (m + m^2 - m^3) \right] pR^2 =$$

$$= - \left[\frac{3 + \nu}{2(1 + \nu)} + \frac{\nu}{1 + \nu} (m + m^2 - m^3) \right] pR^2$$

$$B_6 = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \frac{(m - m^2 - m^3 + m^4)}{3} pR^2 = \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{(m - m^2 - m^3 + m^4)}{3} pR^2$$

а затем B_8, B_{10}, \dots , которые можно представить общей формулой

$$B_{2k} = \frac{3}{2k - 3} m^{k-3} B_6 \quad (k = 4, 5, \dots)$$

Таким образом

$$\begin{aligned}
 \Phi'(\zeta) &= \frac{\lambda + \mu}{2(3\lambda + 2\mu)} pR + \frac{\lambda + \mu}{3\lambda + 2\mu} \frac{m-2}{2} p \frac{R}{\zeta^2} = \frac{1}{4(1+\nu)} \frac{\zeta^2 + m-2}{\zeta^2} pR \\
 f'(\zeta) &= \frac{3\lambda + 4\mu}{3\lambda + 2\mu} pR + \frac{3\lambda + 4\mu}{3\lambda + 2\mu} (m-2) p \frac{R}{\zeta^2} = \frac{2-\nu}{1+\nu} \frac{\zeta^2 + m-2}{\zeta^2} pR \quad (2.20) \\
 \chi''(\zeta) &= -\frac{1}{2} pR^2 + \frac{1}{2} \left[1 - m^2 - 4 \frac{\lambda + \mu}{3\lambda + 2\mu} (m - m^2) \right] p \frac{R^2}{\zeta^2} - \\
 &- \left[\frac{7\lambda + 6\mu}{3\lambda + 2\mu} + \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (m + m^2 - m^3) \right] p \frac{R^2}{\zeta^4} + \\
 &+ \frac{\lambda}{3(3\lambda + 2\mu)} (m - m^2 - m^3 + m^4) p \frac{R^2}{\zeta^6} \left(1 + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{3}{2k-3} \left(\frac{m}{\zeta^2} \right)^{k-3} \right) \Big] = \\
 &= -\frac{1}{2} pR^2 + \frac{1}{2} \left[1 - m^2 - \frac{2}{1+\nu} (m - m^2) \right] p \frac{R^2}{\zeta^2} - \left[\frac{2-\nu}{1+\nu} + \frac{\nu}{1+\nu} (m + m^2 - m^3) \right] p \frac{R^2}{\zeta^4} + \\
 &+ \frac{\nu}{3(1+\nu)} (m - m^2 - m^3 + m^4) p \frac{R^2}{\zeta^6} \left[1 + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{3}{2k-3} \left(\frac{m}{\zeta^2} \right)^{k-3} \right]
 \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что комплексные потенциалы, а следовательно, и компоненты тензора напряжений, через них выражаемые, зависят от других постоянных, в частности, от коэффициента Пуассона.

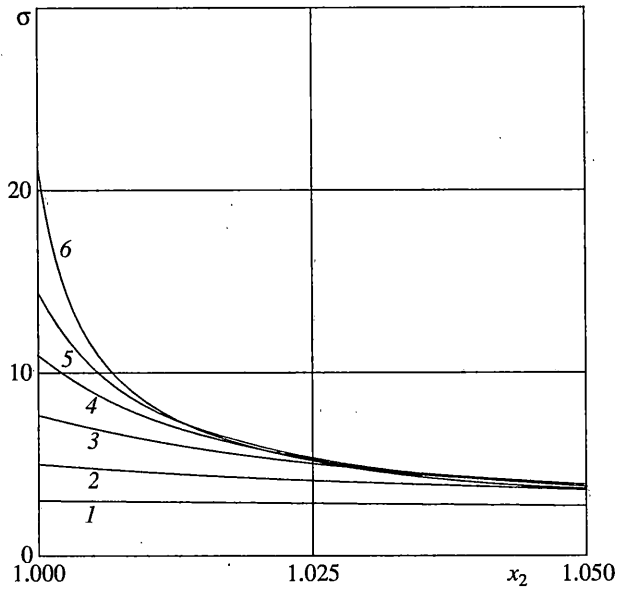
Для определения компонент тензора напряжений необходимо явно выразить $(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ и $(\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12})$ при помощи (2.3) и (2.4). Однако последнее выражение оказывается чересчур громоздким и поэтому приводить его не будем, тем более, что в таком представлении нет особой необходимости, поскольку непосредственных выводов из него сделать невозможно, а для вычисления значений напряжений при помощи ЭВМ форма (2.4) даже более удобна. Таким образом вычислим $(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, $(\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12})$, а затем и σ_{11} , σ_{22} и σ_{12} .

Используя полученные выше представления для комплексных потенциалов, из (2.5) получим

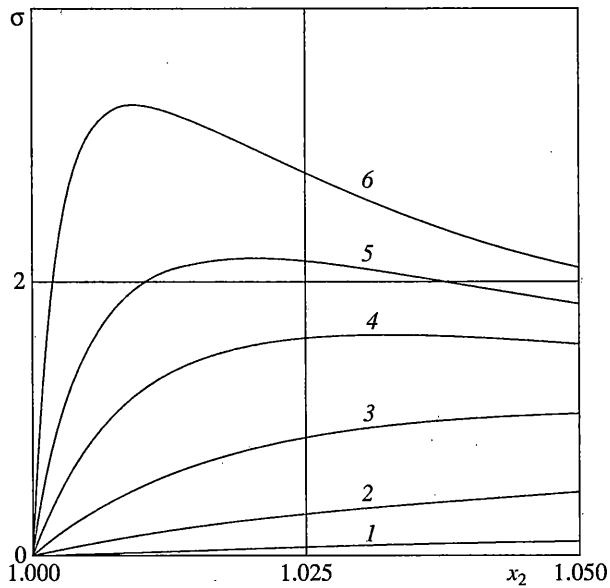
$$\sigma_{13} - i\sigma_{23} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{px_3}{R} \left[\frac{(m-2)\zeta}{(\zeta^2 - m)^2} + \frac{m(\zeta^2 + m-2)\zeta}{(\zeta^2 - m)^3} \right]$$

Приведенное выше решение задачи об одноосном растяжении бесконечной пластинки постоянной толщины с эллиптическим отверстием в трехмерной постановке является труднообозримым и поэтому исследуем его, используя конкретные числовые данные. Будем считать величину b постоянной, равной 1. При этом полюсь a будем изменять в пределах $0 < a \leq 1$. Другие параметры, необходимые для вычислений, примем следующими: $p = 1$, $h = 0.1$. Коэффициент Пуассона будем считать равным одному из следующих значений: 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5.

Заметим, что при расчетах на ЭВМ в разложении (2.20) было взято 50 членов ряда. Попытки использования меньшего числа членов (не более 10) приводили, как правило, к заведомо неверным результатам, хорошим индикатором чего оказывалось ненулевое значение напряжения σ_{22} на контуре эллиптического отверстия при $x_1 = 0$, $x_2 = b$, вопреки граничному условию.

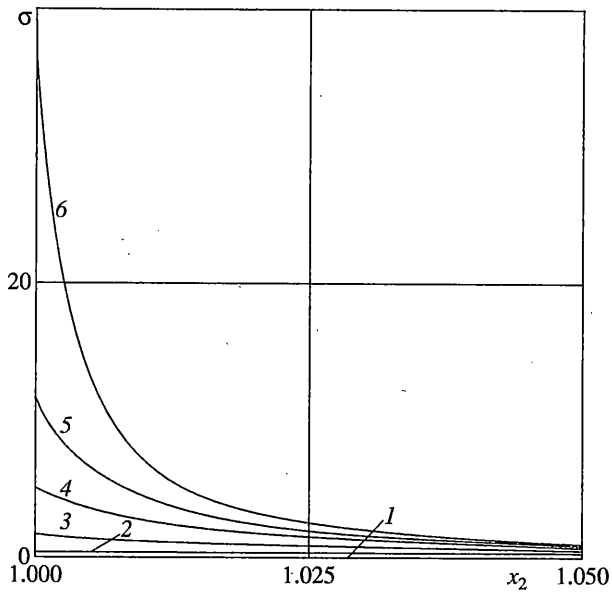


Фиг. 1

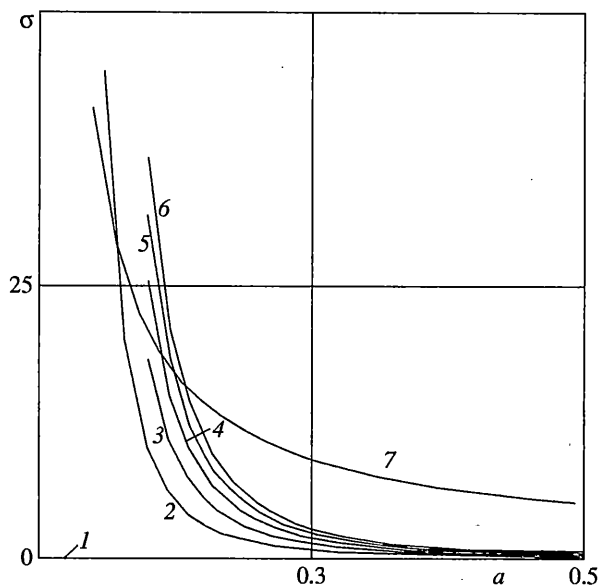


Фиг. 2

Численные результаты приведены на следующей серии рисунков. На первом из них (фиг. 1) приведена зависимость напряжения σ_{11} от x_2 ($x_1 = 0$; $1.0 \leq x_2 \leq 1.05$) в окрестности конца большой полуоси b эллипса при $a = 1, 0.5, 0.3, 0.2, 0.15, 0.1$ (кривые 1–6 соответственно). Поскольку напряжение на бесконечности равно 1, то значение этой величины можно рассматривать как коэффициент концентрации напряжений. Здесь значение коэффициента Пуассона взято равным 0.5, хотя следует отметить, что величина напряжения σ_{11} не зависит от значения коэффициента Пуассона на контуре отверстия и практически не зависит от него в других точках сечения.

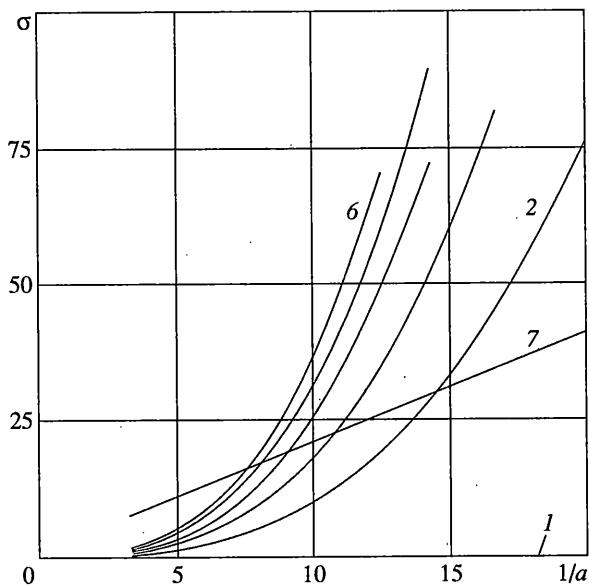


Фиг. 3



Фиг. 4

При подобных условиях получены зависимости $\sigma_{22} \sim x_2$ (фиг. 2) и $\sigma_{23} \sim x_2$ (фиг. 3). Наличие последних на граничной поверхности пластинки постоянной толщины свидетельствует о существенном изменении формы поверхности и цилиндричности [3] контура выреза в зоне концентрации напряжений, что подтверждается также экспериментальными исследованиями. Заметим, что при удалении от концентраторов напряжения σ_{23} достаточно быстро (как r^{-3}) стремятся к нулю.



Фиг. 5

Относительное влияние коэффициента Пуассона на эти напряжения может быть оценено по зависимости $\sigma_{23} \sim a$ (фиг. 4) при указанных значениях коэффициента Пуассона и $x_1 = 0$, $x_2 = b$ (кривые 1–6). Кривая 1, соответствующая значению $\nu = 0$, сливается с осью абсцисс. Кроме того, здесь же приведена зависимость $\sigma_{11} \sim a$ (кривая 7). Нетрудно видеть преобладающий рост напряжения σ_{23} по сравнению с σ_{11} при $a \rightarrow 0$. Для уточнения характера их поведения в работе была исследована зависимость указанных напряжений от величины, обратной значению малой полуоси эллипса. На фиг. 5 приведены зависимости $\sigma_{23} \sim 1/a$ (кривые 1–6) и $\sigma_{11} \sim 1/a$ (кривая 7). Непосредственно при помощи этих кривых установлена асимптотика поведения указанных напряжений при $a \rightarrow 0$. Именно, при $a \rightarrow 0$ величина напряжения σ_{11} изменяется как $1/a$, а σ_{23} как $\nu a^{-2}/(1 + \nu)$. Заметим, что в силу того, что $b = 1$, переменная a на этих рисунках может трактоваться как отношение полуосей эллипса.

Таким образом, решение задачи об одноосном растяжении бесконечной тонкой пластинки со свободным эллиптическим отверстием в трехмерной постановке выявляет эффекты, игнорируемые в двумерной постановке. Они заключаются в следующем: решение задачи зависит от упругих констант материала, в частности, от коэффициента Пуассона; решение задачи не может быть представлено в конечном виде с использованием двух – трех первых членов разложения в силу невозможности в таком случае удовлетворить граничным условиям; обнаружены касательные напряжения, связанные с третьей координатой, при достаточно высокой эллиптичности отверстия превосходящие по своей абсолютной величине все остальные напряжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
3. Ляв Ф. Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.