

УДК 539.375

© 2002 г. А.В. АНДРЕЕВ, Р.В. ГОЛЬДШТЕЙН, Ю.В. ЖИТНИКОВ

РАСЧЕТ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ВНУТРЕННИХ И КРАЕВЫХ ТРЕЩИН СО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

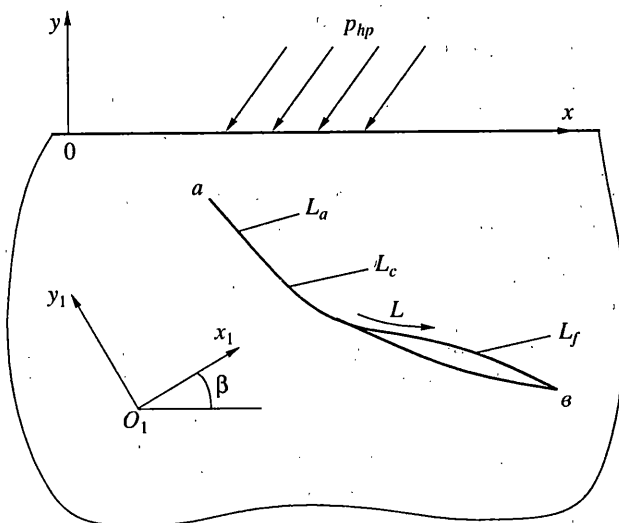
Процессы разрушения часто протекают в условиях, когда напряженное состояние в зоне трещины эквивалентно полю сжатия и сдвига. Задачи о разрушении в этих условиях представляют собой комбинацию контактной задачи механики деформируемого твердого тела и задачи о трещине, при этом они требуют специальных методов решения, поскольку распределение областей контакта неизвестно. Следует отметить, что причиной контакта поверхностей трещины может являться не только действие внешних нагрузок, но и особенности формы трещины [1–3], а также взаимодействие трещин и других дефектов между собой [4, 5] и с границей упругого тела [2]. Как следствие, исследование предельного равновесия краевых и приповерхностных трещин необходимо проводить с учетом возможного контакта их берегов.

В работе рассмотрена двумерная задача о напряженно-деформированном состоянии упругой полуплоскости, ослабленной внутренней или краевой криволинейной трещиной со взаимодействующими с трением поверхностями. Развита метод расчета предельного равновесия таких трещин в полубесконечных и конечных областях. При этом исследование краевых трещин осуществляется с учетом особенностей поведения решения вблизи краевых вершин, для чего проведен соответствующий асимптотический анализ. Получены решения задач о равновесии произвольно ориентированной прямолинейной трещины (внутренней и краевой) с контактирующими поверхностями в упругой полуплоскости при различных условиях нагружения.

Ранее рассматривалась аналогичная задача о трещине в упругой плоскости [3]. Краевые трещины в упругой полуплоскости без учета контакта их поверхностей рассматривались в [2, 6–8], исследовалась также устойчивость краевой прямолинейной трещины в трещиноватой полуплоскости без учета трения на ее поверхностях при их контакте [9], а также некоторые виды ломаных трещин [10]. В [5] с учетом контактного взаимодействия поверхностей с трением рассматривалась радиальная трещина, исходящая из кругового отверстия в упругой плоскости. Квазистатический рост произвольной криволинейной краевой трещины (без учета возможного контакта ее поверхностей) в упругой полуплоскости рассматривался в [11]. В [12] предложена постановка задачи о квазистатическом росте краевой трещины произвольной формы с учетом контакта ее поверхностей с трением при воздействии циклических нагрузок на упругую полуплоскость.

1. Постановка краевой задачи. Рассмотрим первую основную задачу теории упругости для полуплоскости, ослабленной гладким внутренним криволинейным разрезом L . Пусть тело занимает нижнюю полуплоскость ($y \leq 0$), на краю которой заданы напряжения (фиг. 1):

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = p_{hp}(x), \quad y = 0, \quad |x| < \infty \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Отнесем контур L к локальной системе координат $x_1O_1y_1$. В основной декартовой системе координат xOy , связанной, как отмечено выше, с краем полуплоскости, точка O_1 определяется комплексной координатой $z_1^0 = x_1^0 + iy_1^0$, а ось x_1 образует угол β с осью x . Размещение локальной системы координат определяется только однозначностью функции $y_1 = y_1(x_1)$, которая описывает криволинейный контур L в локальной системе координат (комплексная координата контура $t_1 = x_1 + iy_1(x_1)$). Тогда связь между координатами точек полуплоскости в локальной и основной системах координат дается соотношением

$$z = z_1 e^{i\beta} + z_1^0, \quad z = x + iy, \quad z_1 = x_1 + iy_1 \quad (1.2)$$

Предположим, что под действием внешней нагрузки на части трещины L_1 имеет место раскрытие ее поверхностей (фиг. 1) и они свободны от напряжений. При этом в области налегания на некоторой ее части L_c возникает скольжение, а остальная часть находится в состоянии сцепления. В этом случае граничные условия на трещине имеют вид

$$\begin{aligned} N_1^+ + iT_1^+ &= N_1^- + iT_1^-, \quad (v_n^+ - v_n^-) + i(v_\tau^+ - v_\tau^-) = 0, \quad t_1 \in L_a \\ v_n^+ - v_n^- &= 0, \quad T_1^\pm = \rho N_1^\pm, \quad \rho = \mu(v_\tau^+ + v_\tau^-) / |v_\tau^+ - v_\tau^-|, \quad t_1 \in L_c \\ N_1^\pm + iT_1^\pm &= 0, \quad t_1 \in L_f \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $N_1^\pm$ и $T_1^\pm$ — нормальная и касательная компоненты напряжения на поверхностях разреза, $v_1^\pm$ и $v_\tau^\pm$ — нормальная и касательная компоненты вектора смещений поверхностей трещины, μ — коэффициент трения Кулона, $\sqrt{i} = -1$. Здесь и далее верхний знак "плюс" ("минус") означает принадлежность функции к левой (правой) поверхности трещины при движении в направлении увеличения параметра контура t_1 , а нижний индекс 1 указывает на то, что данная величина записана в локальных координатах и относится к контуру L (у нормальных и касательных компонент вектора смещений индекс опущен).

В областях реализации того или иного взаимодействия поверхностей трещины справедливы следующие условия:

$$N_1^\pm < 0, \quad t_1 \in L_c \cup L_a; \quad \mu |N_1^\pm| > |T_1^\pm|, \quad t_1 \in L_a \quad (1.4)$$

которые следует использовать для определения распределения областей налегания и сцепления.

2. Основные уравнения. Пусть на разрезе L , отнесенном к системе $x_1 O_1 y_1$, компоненты вектора смещений имеют разрыв

$$\frac{d}{dt_1}[(u_1 + iv_1)^+ - (u_1 + iv_1)^-] = \frac{i(1+\kappa)}{2G} g'_1(t_1), \quad t_1 \in L \quad (2.1)$$

напряжения непрерывны (знаки $\pm$ в обозначениях напряжений в дальнейшем будем опускать), причем скачок смещений на концах разреза

$$g_1(a) = g_1(b) = 0 \quad (2.2)$$

а напряжения и вращение на бесконечности равны нулю. Здесь $u_1^\pm$ и $v_1^\pm$ — компоненты вектора смещений поверхностей трещины относительно прямоугольной декартовой системы координат $x_1 O_1 y_1$ (фиг. 1), $\kappa = 3-4\nu$ при плоской деформации и $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ при плоском напряженном состоянии, ν — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига.

На основе принципа суперпозиции комплексные потенциалы напряжений задачи запишем в виде сумм [2, 11]:

$$\Phi(z) = \Phi_{hp}(z) + \Phi_{cut}(z), \quad \Psi(z) = \Psi_{hp}(z) + \Psi_{cut}(z) \quad (2.3)$$

Здесь потенциалы $\Phi_{hp}(z)$, $\Psi_{hp}(z)$, которые характеризуют напряженное состояние сплошной полуплоскости с границей, нагруженной в соответствии с краевым условием (1.1), даются соотношениями

$$\Phi_{hp}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_{hp}(x) dx}{x-z}, \quad \Psi_{hp}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\overline{p_{hp}(x)}}{x-z} - \frac{x p_{hp}(x)}{(x-z)^2} \right] dx \quad (2.4)$$

а функции $\Phi_{cut}(z)$ и $\Psi_{cut}(z)$ описывают напряженное состояние, обусловленное разрывом смещений $g_1(t_1)$ на контуре разреза L :

$$\Phi_{cut}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left\{ \left[\frac{1}{T_1 - z} - \frac{1}{\bar{T}_1 - z} \right] e^{i\beta} g'_1(t_1) dt_1 + \frac{T_1 - \bar{T}_1}{(\bar{T}_1 - z)^2} e^{-i\beta} \overline{g'_1(t_1)} dt_1 \right\} \quad (2.5)$$

$$\Psi_{cut}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left\{ \left[\frac{1}{(\bar{T}_1 - z)^2} - \frac{1}{(T_1 - z)^2} \right] \bar{T}_1 e^{i\beta} g'_1(t_1) dt_1 + \left[\frac{1}{T_1 - z} - \frac{1}{\bar{T}_1 - z} + \frac{(\bar{T}_1 - T_1)(\bar{T}_1 + z)}{(\bar{T}_1 - z)^3} \right] e^{-i\beta} \overline{g'_1(t_1)} dt_1 \right\}$$

$$T_1 = t_1 e^{i\beta} + z_1^0, \quad \text{Im } T_1 < 0$$

Для удовлетворения граничным условиям (1.3) напряжения на поверхностях трещины будем записывать на основе подстановки выражений (2.3) в граничное условие [2]:

$$\Phi(T_1') + \overline{\Phi(\bar{T}_1')} + e^{-2i\beta} \frac{dT_1'}{dt_1'} [\overline{T_1' \Phi'(T_1')} + \overline{\Psi(T_1')}] - p_1(t_1') = N_1 + iT_1, \quad t_1' \in L \quad (2.6)$$

$$p_1(t_1') = -N_1^0 - iT_1^0$$

что позволяет получить интегральное представление напряжений на поверхностях трещины в полуплоскости через производные от скачков смещений ее поверхностей (N_1^0 и T_1^0 — нормальная и касательная компоненты напряжения на линии разреза в сплошной полуплоскости, обусловленные иными, нежели (1.1), нагрузками). Отметим, что в (2.6) $\Phi(T_1')$ и $\Psi(T_1')$ — прямые значения комплексных потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, т.е. полученные непосредственной подстановкой $z = T_1'$ в выражения (2.3).

Пусть форма гладкого криволинейного разреза L определяется параметрическим уравнением

$$x_1 = x_1(\xi), \quad y_1 = y_1(\xi), \quad |\xi| \leq 1 \quad (2.7)$$

Тогда переменная точка контура представляется в следующем виде:

$$t_1 = \omega(\xi) = x_1(\xi) + iy_1(\xi), \quad t_1' = \omega(\eta) \quad (2.8)$$

Отметим, что для гладких контуров функции $x_1(\xi)$, $y_1(\xi)$, имеют непрерывные производные $x_1'(\xi)$, $y_1'(\xi)$, которые не обращаются одновременно в нуль. Тогда, на основе формул (2.3) и (2.6), получим

$$N_1 + iT_1 = \frac{1}{\pi\omega'(\eta)} \int_{-1}^1 [K_{hp}(\xi, \eta)g'(\xi) + L_{hp}(\xi, \eta)\overline{g'(\xi)}]d\xi + P_{hp}(\eta) - p_{cl}(\eta), \quad |\eta| < 1 \quad (2.9)$$

$$P_{hp}(\eta) = \frac{e^{-i\beta}}{\pi\omega'(\eta)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \operatorname{Im} \left[\frac{e^{i\beta}\omega'(\eta)}{T(\eta) - x} \right] p_{hp}(x) + \frac{\operatorname{Im}[(T(\eta) - x)e^{-i\beta}\overline{\omega'(\eta)}]}{(T(\eta) - x)^2} p_{hp}(x) \right\} dx \quad (2.10)$$

$$K_{hp}(\xi, \eta) = \operatorname{Re} \left[\frac{\omega'(\eta)}{\omega(\xi) - \omega(\eta)} \right] + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overline{\omega'}(\eta)}{\omega^*(\xi, \eta)} + \frac{\omega'(\eta)}{\overline{\omega^*}(\xi, \eta)} + \right. \\ \left. + \frac{\omega^*(\xi, \xi)}{\omega^{*2}(\xi, \eta)} \left[\overline{\omega'}(\eta) + \omega'(\eta)e^{2i\beta} + 2e^{2i\beta}\overline{\omega'}(\eta) \frac{\omega(\xi) - \omega(\eta)}{\omega^*(\xi, \eta)} \right] \right\} \quad (2.11)$$

$$L_{hp}(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\omega(\xi) - \omega(\eta)}{\overline{\omega}(\xi) - \overline{\omega}(\eta)} + \\ + \frac{\omega'(\eta)}{2} \left[\frac{1}{\omega^*(\xi, \eta)} + \frac{\omega(\xi) - \omega(\eta)}{\omega^{*2}(\xi, \eta)} \frac{\overline{\omega'}(\eta)}{\omega'(\eta)} + e^{-2i\beta} \frac{\overline{\omega^*}(\xi, \xi)}{\overline{\omega^*}^2(\xi, \eta)} \right] \quad (2.12)$$

$$\omega^*(\xi, \eta) = \overline{\omega(\eta)} - \omega(\xi)e^{2i\beta} - 2ie^{i\beta} \operatorname{Im} z_1^0$$

$$g'(\xi) = g_1'(t_1)\omega'(\xi), \quad p_{cl}(\eta) = p_1(\omega(\eta)), \quad T(\eta) = \omega(\eta)e^{i\beta} + z_1^0$$

Используя соотношение (2.1), получим выражение скачков нормальных и касательных компонент смещений поверхностей трещины в виде

$$v_n^+ - v_n^- = \frac{1+\kappa}{2G} \operatorname{Re} \left[\frac{d\bar{t}}{ds} \int_b^{t_1} g_1'(\zeta) d\zeta \right], \quad v_\tau^+ - v_\tau^- = -\frac{1+\kappa}{2G} \operatorname{Im} \left[\frac{d\bar{t}}{ds} \int_b^{t_1} g_1'(\zeta) d\zeta \right]$$

поскольку, в соответствии с (2.2), скачки компонент смещений равны нулю на конце разреза (точка b , см. фиг. 1). Используя замену (2.8) получим

$$[v_n^+ - v_n^-]_{t_1=\omega(\eta)} = \frac{1+\kappa}{2G} \operatorname{Re} \left[\frac{\overline{\omega'(\eta)}}{|\omega'(\eta)|} \int_1^\eta g'(\xi) d\xi \right] \quad (2.13)$$

$$[v_\tau^+ - v_\tau^-]_{t_1=\omega(\eta)} = -\frac{1+\kappa}{2G} \operatorname{Im} \left[\frac{\overline{\omega'(\eta)}}{|\omega'(\eta)|} \int_1^\eta g'(\xi) d\xi \right]$$

Выражения (2.9) и (2.13) позволяют строить сингулярные интегральные уравнения первой основной задачи для полуплоскости с разрезом произвольной формы. Так, подстановка выражения (2.9) в первое граничное условие (1.1) приводит к его тождественному удовлетворению, из других же граничных условий (1.1), на основе выражений (2.9)–(2.13), получим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned}\Delta_\tau(\eta) &= 0, & \Delta_n(\eta) &= 0, & \omega(\eta) &\in L_a \\ \Delta_n(\eta) &= 0, & \operatorname{Im} \Omega(\eta) &= \rho \operatorname{Re} \Omega(\eta), & \omega(\eta) &\in L_c \\ \operatorname{Re} \Omega(\eta) &= 0, & \operatorname{Im} \Omega(\eta) &= 0, & \omega(\eta) &\in L_f\end{aligned}\quad (2.14)$$

$$\Omega(\eta) = -p_{cl}(\eta) + P_{hp}(\eta) + \frac{1}{\pi \omega'(\eta)} \int_{-1}^1 [K_{hp}(\xi, \eta) g'(\xi) + L_{hp}(\xi) \overline{g'(\xi)}] d\xi, \quad |\eta| < 1 \quad (2.15)$$

$$\Delta_n(\eta) = \operatorname{Re} \left[\frac{\overline{\omega'(\eta)}}{|\omega'(\eta)|} \int_1^\eta g'(\xi) d\xi \right], \quad \Delta_\tau(\eta) = \operatorname{Im} \left[\frac{\overline{\omega'(\eta)}}{|\omega'(\eta)|} \int_1^\eta g'(\xi) d\xi \right] \quad (2.16)$$

которые описывают равновесное состояние внутренней криволинейной трещины с областями налегания и раскрытия, скольжения и сцепления в упругой полуплоскости.

Эта система имеет единственное решение в классе функций, не ограниченных на концах контура интегрирования, при выполнении дополнительного условия [14]:

$$\int_{-1}^1 g'(\xi) d\xi = 0 \quad (2.17)$$

которое обеспечивает однозначность смещений при обходе контура L и является следствием условия (2.2).

Отметим, что уравнения (2.14), содержащие функцию $\Omega(\eta)$, являются сингулярными интегральными уравнениями (СИУ) первого рода с ядром Коши. Таким образом, система интегральных уравнений (2.14) при дополнительном условии (2.17) описывает равновесное состояние внутренней криволинейной трещины со взаимодействующими с трением поверхностями в полуплоскости, нагруженной краевыми усилиями (1.1).

Коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) на концах трещины определяются по формуле [2]:

$$k_1^\pm - ik_2^\pm = \mp \lim_{t_1 \rightarrow t^\pm} [\sqrt{2|t_1 - t^\pm|} |g'(t)|] \quad (2.18)$$

Здесь и далее нижние знаки относятся к левому концу трещины (началу) $t_1 = a = t^-$, а верхние – к правой (концу) $t_1 = b = t^+$.

При рассмотрении краевой трещины будем полагать, что точка a (или, что то же самое, $\xi = -1$) принадлежит границе полуплоскости. В этом случае система СИУ (2.14) не претерпевает никаких изменений, в то время как условие (2.17) принимает вид

$$\int_{-1}^1 g'(\xi) d\xi = -g(-1) \quad (2.19)$$

причем величину скачка смещений поверхностей трещины на границе полуплоскости следует определять в процессе построения решения задачи.

Интегральные ядра (2.11), (2.12) известны в замкнутой форме также для плоскости, полосы, клина и кругового диска, что позволяет строить системы СИУ, описывающие краевые задачи о равновесии криволинейных разрезов с областями налегания в указанных областях на основе изложенного метода.

4. Численное решение СИУ. Один из методов решения СИУ связан с процедурой регуляризации и последующим решением полученных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Однако данный подход является трудоемким и нерегулярным,

требующим проведения процедуры регуляризации в каждом конкретном случае. При наличии на трещине областей контакта, скольжения и сцепления процедура регуляризации усложняется еще больше. С другой стороны, в последнее время в численных расчетах наибольшее распространение получили прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений, которые, минуя регуляризацию, приводят к решению конечных систем алгебраических уравнений. Среди них следует отметить метод механических квадратур (ММК), основанный на определенных формулах для интерполяционного полинома и квадратурных формулах для сингулярных интегралов [2, 3, 6, 15–18]. В данной работе используется указанный метод ММК, адаптированный к специфике задач о внутренних и краевых трещинах.

Внутренняя трещина. Поскольку решение вблизи вершин внутренней трещины в полуплоскости имеет корневую особенность (см., например, [2]), то вспомогательная функция

$$u(\xi) = g'(\xi)\sqrt{1-\xi^2}, \quad |\xi| \leq 1 \quad (3.1)$$

непрерывна в области своего определения.

Применяя, с учетом (3.1), квадратурные формулы Гаусса – Чебышева [2, 16–18] к выражению (2.15) получим

$$\Omega(\eta_m) = \frac{1}{n\omega'(\eta_m)} \sum_{k=1}^n [K_{hp}(\xi_k, \eta_m)u(\xi_k) + L_{hp}(\xi_k, \eta_m)\overline{u(\xi_k)}] - p_0(\eta_m) + P_{hp}(\eta_m) \quad (3.2)$$

$$T_n(\xi_k) = 0, \quad \xi_k = \cos(\pi(2k-1)/(2n)) \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (3.3)$$

$$U_{n-1}(\eta_m) = 0, \quad \eta_m = \cos(\pi m/n) \quad (m=1, 2, \dots, n-1) \quad (3.4)$$

где $T_n(\xi)$ и $U_n(\xi)$ соответственно полиномы Чебышева первого и второго рода.

Выражения (2.16), с учетом замены (3.1), перепишем в виде

$$\Delta_n(\eta) = \operatorname{Re} \left[\frac{\overline{\omega'(\eta)}}{|\omega'(\eta)|} \int_1^\eta \frac{u(\xi)d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right], \quad \Delta_\tau(\eta) = \operatorname{Im} \left[\frac{\overline{\omega'(\eta)}}{|\omega'(\eta)|} \int_1^\eta \frac{u(\xi)d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right] \quad (3.5)$$

Рассмотрим интеграл следующего вида:

$$I(\eta) = \int_1^\eta \frac{u(\xi)d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad |\eta| < 1 \quad (3.6)$$

На основе замены переменной $\xi = \cos x$, используя (3.4), преобразуем его к виду

$$I(\eta_m) = - \int_0^{\pi m/n} u(\cos(x))dx \quad (3.7)$$

Разделив промежуток интегрирования $x \in [0, \pi m/n]$ на m одинаковых интервалов длиной π/n , выберем в качестве их внутренних точек абсциссы $x_k = \pi(2k-1)/(2n)$. Тогда, в соответствии с (3.3), ординатами в этих точках будут являться значения функции $u(\xi_k)$, что позволяет аппроксимировать интеграл (3.7) суммой

$$I(\eta_m) = - \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{k \leq m} u(\xi_k) \quad (3.8)$$

Таким образом, выражения (3.5) можно переписать в виде

$$\Delta_n(\eta_m) = - \frac{\pi}{n} \operatorname{Re} \left[\frac{|\omega'(\eta_m)|}{\omega'(\eta_m)} \sum_{k=1}^{k \leq m} u(\xi_k) \right], \quad \Delta_\tau(\eta_m) = - \frac{\pi}{n} \operatorname{Im} \left[\frac{|\omega'(\eta_m)|}{\omega'(\eta_m)} \sum_{k=1}^{k \leq m} u(\xi_k) \right] \quad (3.9)$$

Следовательно, на основе (3.2) и (3.9) система СИУ (2.14) сводится к системе алгебраических уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \Delta_{\tau}(\eta_m) &= 0, & \Delta_n(\eta_m) &= 0, & \omega(\eta_m) &\in L_a \\ \Delta_n(\eta_m) &= 0, & \operatorname{Im} \Omega(\eta_m) &= \rho \operatorname{Re} \Omega(\eta_m), & \omega(\eta_m) &\in L_c \\ \operatorname{Re} \Omega(\eta_m) &= 0, & \operatorname{Im} \Omega(\eta_m) &= 0, & \omega(\eta_m) &\in L_f \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь функционалы $\Omega(\eta_m)$ и $\Delta_n(\eta_m)$, $\Delta_{\tau}(\eta_m)$ имеют вид (3.2) и (3.9) соответственно. Дополнительное условие (2.17) преобразуется к виду [2, 17, 18]:

$$\sum_{k=1}^n u(\xi_k) = 0 \quad (3.11)$$

Отметим, что из вида системы (2.14) следует, что в любой точке трещины L справедливы два вещественных интегральных уравнения (сингулярных или несингулярных) относительно скачка производной от смещений. Это обстоятельство, а также учет комплексного уравнения (3.11), позволяет в рамках изложенной дискретизации (система алгебраических уравнений (3.10)) согласовать количество неизвестных с количеством уравнений.

Таким образом, система алгебраических уравнений (3.10), (3.11) позволяет однозначно определить набор значений $u(\xi_k)$ неизвестной функции, и в соответствии с формулами

$$[v_n^+ - v_n^-] |_{l_1 = \omega(\eta_m)} = -\frac{1+\kappa}{2G} \frac{\pi}{n} \operatorname{Re} \left[\frac{|\omega'(\eta_m)|}{\omega'(\eta_m)} \sum_{k=1}^{k \leq m} u(\xi_k) \right] \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} [v_{\tau}^+ - v_{\tau}^-] |_{l_1 = \omega(\eta_m)} &= \frac{1+\kappa}{2G} \frac{\pi}{n} \operatorname{Im} \left[\frac{|\omega'(\eta_m)|}{\omega'(\eta_m)} \sum_{k=1}^{k \leq m} u(\xi_k) \right] \\ N + iT |_{l_1 = \omega(\eta_m)} &= -p_0(\eta_m) + P_{hp}(\eta_m) + \\ &+ \frac{1}{n\omega'(\eta_m)} \sum_{k=1}^n [K_{hp}(\xi_k, \eta_m) u(\xi_k) + L_{hp}(\xi_k, \eta_m) \overline{u(\xi_k)}] \end{aligned} \quad (3.13)$$

рассчитать скачки смещений поверхностей трещины и напряжения на них.

Коэффициенты интенсивности напряжений определим по формуле

$$k_1^{\pm} - ik_2^{\pm} = \mp \sqrt{|\omega'(\pm 1)|} u(\pm 1) / \omega'(\pm 1) \quad (3.14)$$

которая следует из (2.18) с учетом замен (2.8), (3.1). Используя интерполяционный полином Лагранжа [2, 6, 18], получим

$$\begin{aligned} k_1^+ - ik_2^+ &= \frac{\sqrt{|\omega'(1)|}}{\omega'(1)} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k u(\xi_k) \operatorname{ctg} \frac{2k-1}{4n} \pi \\ k_1^- - ik_2^- &= \frac{\sqrt{|\omega'(-1)|}}{\omega'(-1)} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+N} u(\xi_k) \operatorname{tg} \frac{2k-1}{4n} \pi \end{aligned} \quad (3.15)$$

Краевая трещина. Переходя к рассмотрению краевых трещин, отметим, что в этом случае ядра (2.11), (2.12), кроме особенности типа Коши (первый член (2.11)), имеют неподвижную особенность в точке $\xi = \eta = -1$ (вторые члены в ядрах), т.е. являются обобщенными ядрами. Как следствие, решение в окрестности краевой вершины трещины, выходящей на границу полуплоскости, может быть ограничено, либо иметь особенность, отличающуюся от корневой [2, 17].

В случае, если поверхности трещины не контактируют вблизи этой вершины ($a \in L_f$), реализуется первая ситуация. Этот вывод легко сделать, если учесть, что функция $g'_1(t)$ определяется через граничные значения комплексного потенциала $\Phi(z)$ на контуре трещины (см. формулу (2.3)), а также принять во внимание, что функция $\Phi(z)$ в окрестности угловой точки в клиновидных областях ограничена для углов при вершине $\vartheta \leq \pi$ [19].

Поскольку вблизи внутренней вершины трещины решение имеет корневую особенность, вспомогательная функция

$$u(\xi) = g'(\xi) \sqrt{(1+\xi)/(1-\xi)}, \quad |\xi| \leq 1 \quad (3.16)$$

непрерывна в области своего определения и для решения системы СИУ, соответствующих такой задаче, следует использовать квадратуры Гаусса – Якоби [16–18].

Следуя путем, который применялся при выводе системы уравнений (3.10), получим [18]:

$$\begin{aligned} \Delta_\tau(\eta_m) &= 0, & \Delta_n(\eta_m) &= 0, & \omega(\eta_m) &\in L_a \\ \Delta_n(\eta_m) &= 0, & \operatorname{Im} \Omega(\eta_m) &= \rho \operatorname{Re} \Omega(\eta_m), & \omega(\eta_m) &\in L_c \\ \operatorname{Re} \Omega(\eta_m) &= 0, & \operatorname{Im} \Omega(\eta_m) &= 0, & \omega(\eta_m) &\in L_f \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \Omega(\eta_m) &= -p_0(\eta_m) + P_{hp}(\eta_m) + \\ &+ \frac{2}{(2n+1)\omega'(\eta_m)} \sum_{k=1}^n (1+\xi_k) [K_{hp}(\xi_k, \eta_m) u(\xi_k) + L_{hp}(\xi_k, \eta_m) \overline{u(\xi_k)}] \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\Delta_n(\eta_m) = -\frac{2\pi}{2n+1} \operatorname{Re} \left[\frac{|\omega'(\eta_m)|}{\omega'(\eta_m)} \sum_{k=1}^{k \leq m} (1+\xi_k) u(\xi_k) \right] \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \Delta_\tau(\eta_m) &= \frac{2\pi}{2n+1} \operatorname{Im} \left[\frac{|\omega'(\eta_m)|}{\omega'(\eta_m)} \sum_{k=1}^{k \leq m} (1+\xi_k) u(\xi_k) \right] \\ \xi_k &= \cos(\pi(2k-1)/(2n)) \quad (k=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\eta_m = \cos(2m\pi/(2n+1)) \quad (m=1, 2, \dots, n)$$

Решение системы (3.17) существует и единственно без наложения на него дополнительных условий [2, 17].

Таким образом, система алгебраических уравнений (3.17) позволяет однозначно определить набор значений $u(\xi_k)$ неизвестной функции, и в соответствии с формулами

$$[v_n^+ - v_n^-]_{l_1=\omega(\eta_m)} = -\frac{1+\kappa}{2G} \frac{2\pi}{2n+1} \operatorname{Re} \left[\frac{|\omega'(\eta_m)|}{\omega'(\eta_m)} \sum_{k=1}^{k \leq m} (1+\xi_k) u(\xi_k) \right] \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} [v_\tau^+ - v_\tau^-]_{l_1=\omega(\eta_m)} &= \frac{1+\kappa}{2G} \frac{2\pi}{2n+1} \operatorname{Im} \left[\frac{|\omega'(\eta_m)|}{\omega'(\eta_m)} \sum_{k=1}^{k \leq m} (1+\xi_k) u(\xi_k) \right] \\ N + iT|_{l_1=\omega(\eta_m)} &= -p_0(\eta_m) + P_{hp}(\eta_m) + \\ &+ \frac{2}{(2n+1)\omega'(\eta_m)} \sum_{k=1}^n (1+\xi_k) [K_{hp}(\xi_k, \eta_m) u(\xi_k) + L_{hp}(\xi_k, \eta_m) \overline{u(\xi_k)}] \end{aligned} \quad (3.22)$$

рассчитать скачки смещений поверхностей трещины и напряжения на них.

Коэффициенты интенсивности напряжений во внутренней вершине трещины, используя интерполяционный полином Лагранжа, определим по формуле

$$k_1 - ik_2 = -\frac{\sqrt{|\omega'(1)|}}{\omega'(1)} \sum_{k=1}^n u(\xi_k) \prod_{j \neq k} \frac{1 - \xi_j}{\xi_k - \xi_j} \quad (3.23)$$

которая следует из (3.14).

В случае, если поверхности трещины в окрестности ее краевой вершины контактируют, т.е. $a \notin L_f$ необходим дополнительный асимптотический анализ. Он заключается в выявлении параметров задачи, при которых решение в окрестности краевой вершины имеет особенность, а также в определении величины последней. Такого рода анализ может быть выполнен на основе решения краевой задачи, рассмотренной в п. 6. Показано, что существует диапазон углов между касательной к линии трещины, проведенной в ее краевой вершине, и границей полуплоскости (фиг. 2), в котором решение имеет особенность, отличающуюся от корневой (фиг. 3). При увеличении коэффициента трения этот диапазон расширяется, причем величина особенности возрастает. Напротив, в отсутствие трения, решение в окрестности краевой вершины ограничено во всем диапазоне углов $0 < \alpha \leq 90^\circ$. Отметим также, что особенность в решении вблизи краевой вершины существует только в том случае, когда режим скольжения поверхностей трещины соответствует перемещению ее поверхности, принадлежащей остроугольной области (см. фиг. 2, область 1) вглубь полуплоскости (относительно другой поверхности) (см. п. 6).

Для учета указанной особенности в окрестности краевой вершины, представляется целесообразным применять приближенный метод, использовавшийся в [2, 6]. В этих работах при рассмотрении краевых трещин (без учета контакта поверхностей), использовался метод численного решения СИУ задачи, соответствующий поиску его решения в виде (3.1). При этом вместо условия (2.17), известного для внутренних трещин, на решение задачи налагалось дополнительное условие

$$u(-1) = 0 \quad (3.24)$$

указывающее на то, что функция $g'(\xi)$ имеет вблизи краевой вершины (при $\xi = -1$) особенность меньшего порядка, чем $1/\sqrt{1+\xi}$.

Таким образом, в рамках данного приближенного метода, система СИУ задачи о краевой трещине в полуплоскости при наличии особенности в решении в ее краевой вершине (см. п. 6), сводится к алгебраической системе уравнений следующего вида [18]:

$$\begin{aligned} \Delta_\tau(\eta_m) &= 0, & \Delta_n(\eta_m) &= 0, & \omega(\eta_m) &\in L_a \\ \Delta_n(\eta_m) &= 0, & \operatorname{Im} \Omega(\eta_m) &= \rho \operatorname{Re} \Omega(\eta_m), & \omega(\eta_m) &\in L_c \\ \operatorname{Re} \Omega(\eta_m) &= 0, & \operatorname{Im} \Omega(\eta_m) &= 0, & \omega(\eta_m) &\in L_f \end{aligned} \quad (3.25)$$

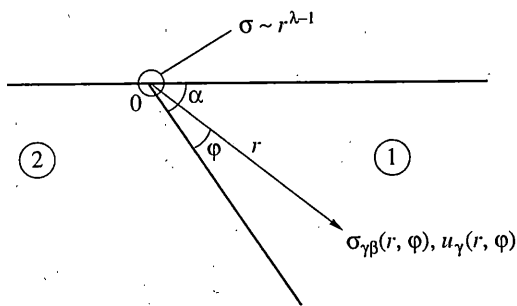
Здесь функционалы $\Omega(\eta_m)$ и $\Delta_n(\eta_m)$, $\Delta_\tau(\eta_m)$ имеют вид (3.2) и (3.9) соответственно.

Дополнительное условие (3.24), которое обеспечивает единственность решения системы (3.25), используя интерполяционный полином Лагранжа, можно записать в виде

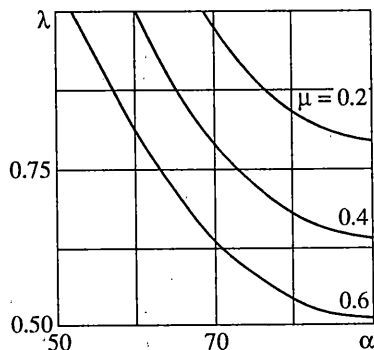
$$\sum_{k=1}^n (-1)^k u(\xi_k) \operatorname{tg}(\pi(2k-1)/(4n)) = 0 \quad (3.26)$$

Скачки смещений поверхностей трещины и напряжения на них определяются по формулам (3.12) и (3.13) соответственно, а коэффициенты интенсивности напряжений во внутренней вершине трещины вычисляются следующим образом:

$$k_1 - ik_2 = \frac{\sqrt{|\omega'(1)|}}{\omega'(1)} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k u(\xi_k) \operatorname{ctg} \frac{2k-1}{4n} \pi \quad (3.27)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

4. Алгоритм определения областей раскрытия, скольжения и сцепления. Алгоритм определения областей раскрытия, скольжения и сцепления поверхностей трещины, основан на установленном в [20] свойстве непрерывности скачков смещений на трещине при малой вариации, как нагрузки, так и областей раскрытия и взаимных сдвиговых смещений.

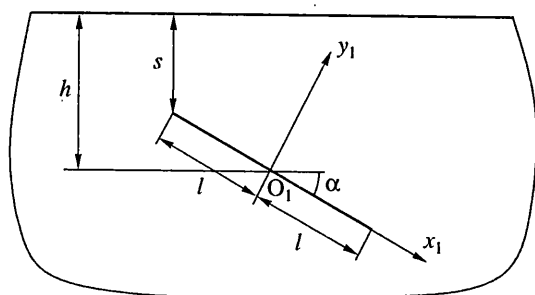
После решения системы (3.10), (3.11) (либо одной из других построенных систем алгебраических уравнений) следует на каждом шаге итерации выполнять расчет напряжений на поверхностях трещины в соответствии с (3.13) (либо в соответствии с (3.22)). Новое положение областей определяется на основе подстановки расчетных напряжений в условия (1.4). Итерационный процесс заканчивается, когда в рамках данной дискретизации перемещение границ областей прекращается (абсолютная погрешность определения положения границы в этом случае составляет $|\delta\xi| < 1/n$). Отметим, что данный алгоритм отыскания неизвестных границ характеризуется быстрой сходимостью итерационного процесса, приводит к построению адекватного их распределения с высокой точностью, причем вне зависимости от выбора начального приближения.

5. Результаты расчета. Для исследования совместного влияния внешних нагрузок, границы тела и налегания поверхностей трещины, расположенной вблизи нее, на предельное равновесие рассмотрим ряд задач о прямолинейных внутренних и краевых трещинах в полуплоскости. Будем анализировать предельное равновесие при различной ориентации и положении трещины по отношению к границе полуплоскости, различных условиях нагружения и коэффициентах трения между ее поверхностями.

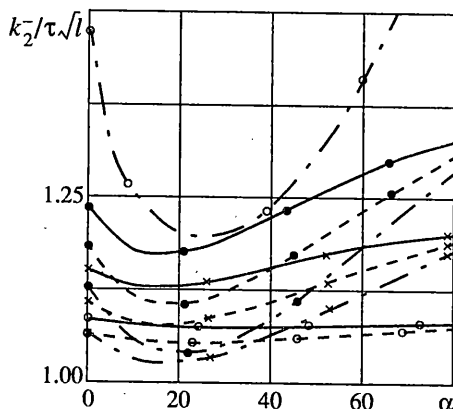
Будем полагать, что граница полуплоскости свободна от напряжений, а на поверхностях прямолинейной внутренней трещины заданы равномерно распределенные касательные напряжения τ , т.е. $p_1(t_1) = i\tau$ (фиг. 4). Отметим, что для получения решения указанной задачи (*задача 1*) следует применять предложенные в работе методы, поскольку при таких условиях нагружения на поверхностях трещины возникает область налегания [2].

На рисунках представлены расчетные зависимости коэффициентов интенсивности напряжений $k_2^\pm$, $k_1^\pm$ от величины угла наклона α (фиг. 4). Отметим, что для всех параметров расчета вблизи той вершины трещины, которая ближе к границе полуплоскости, образуется область контакта (скольжения), вследствие чего $k_1^- = 0$, а к противоположной вершине примыкает зона раскрытия ($k_1^+ \neq 0$).

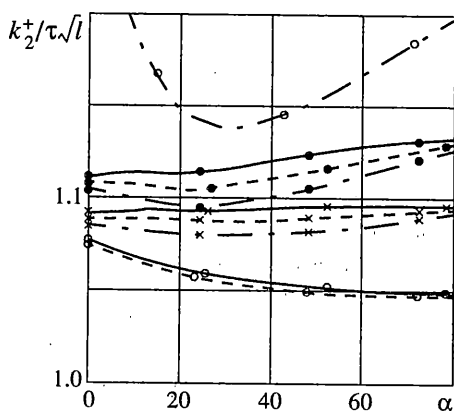
На фиг. 5, 6 приведены результаты расчета коэффициентов интенсивности напряжений соответственно в левой (k_2^-) и правой (k_2^+) вершинах трещины (отнесенных к $-\tau\sqrt{l}$ и $\tau\sqrt{l}$ соответственно). Расчет проводился для различных величин коэффи-



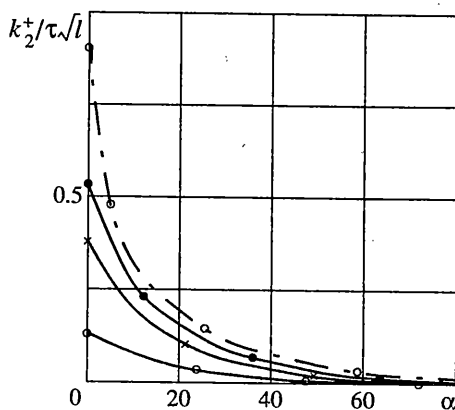
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

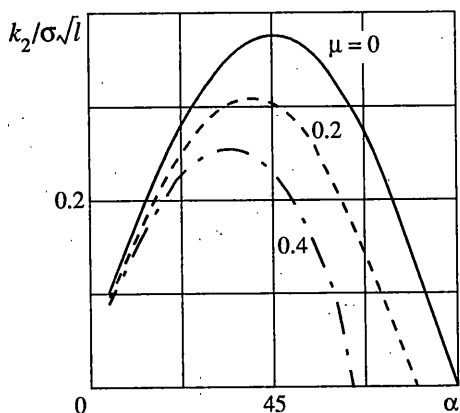


Фиг. 7

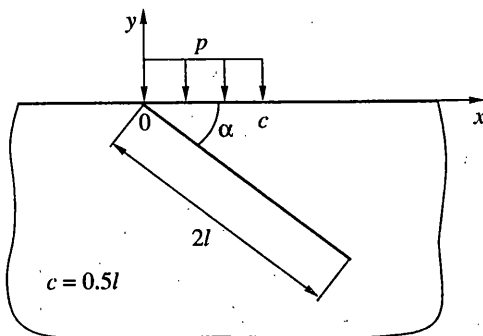
ента трения: сплошные кривые соответствуют $\mu = 0$, штриховые – $\mu = 0.2$, штрихпунктирные – $\mu = 0.4$. Приведена также зависимость КИН от величины $\chi = s/h$ (см. фиг. 4), характеризующей удаленность трещины от края полуплоскости: светлые точки соответствуют $\chi = 0.1$, темные точки – $\chi = 0.3$, косые кресты – $\chi = 0.5$.

На фиг. 7 приведены результаты расчета КИН k_1^+ (отнесенного к $\tau\sqrt{l}$), полученные для этой же задачи. Маркировка кривых и ее соответствие значениям параметров расчета то же, что и на фиг. 5, 6. С ростом коэффициента трения в пределах $0 \leq \mu \leq 0.2$ КИН k_1^+ уменьшается, однако для расчетных значений $0.1 \leq \chi \leq 0.5$, весьма слабо, в пределах 1%, поэтому соответствующие зависимости не приведены на фиг. 7. Напротив, при $\chi = 0.1$, $\mu = 0.4$ наблюдается существенное количественное изменение расчетных значений КИН k_1^+ (фиг. 7), причем аналогично ведут себя и величины k_2^- и k_2^+ (фиг. 5, 6).

Полученные результаты позволяют проанализировать влияние границы тела на предельное равновесие трещины, расположенной вблизи его поверхности. Отметим, что коэффициенты интенсивности напряжений в этих условиях оказываются большими, нежели КИН в вершинах трещины в бесконечной плоскости, причем в вершине трещины, которая расположена ближе к границе полуплоскости, КИН для указанных параметров расчета больше ($k_2^- > k_2^+$, фиг. 5, 6). Кроме того, существенно,



Фиг. 8



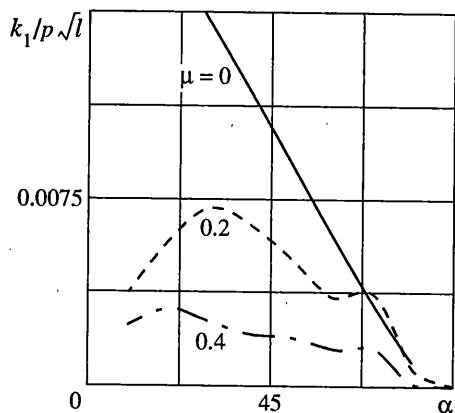
Фиг. 9

что КИН достигают максимального значения внутри промежутка $\chi \in (0.1, 0.5)$, т.е. в случае $\chi = s/h = 0.3$ (см. фиг. 4) предельное равновесие может быть достигнуто при меньшей величине приложенной нагрузки τ , нежели при $\chi = s/h = 0.1$ (за исключением случая $\mu = 0.4$). Отметим также, что КИН k_1^+ сильно возрастает при малых величинах угла наклона α (особенно для больших значений коэффициента трения, фиг. 7). Результаты расчета КИН для аналогичной задачи о краевой трещине приведены в работе [18].

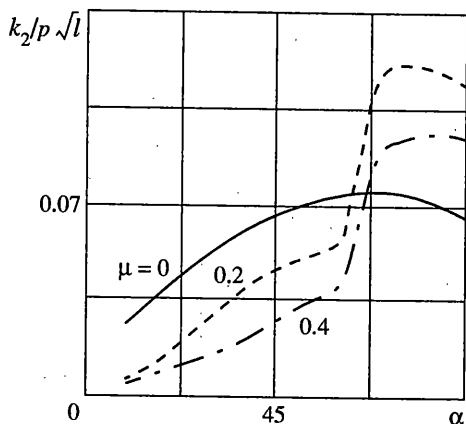
Рассмотрим задачу о прямолинейной краевой трещине длины $2l$ в условиях, когда на бесконечности параллельно границе полуплоскости приложены сжимающие усилия σ (задача 2). Результаты расчета КИН k_2 во внутренней вершине (отнесенного к $-\sigma\sqrt{l}$) в зависимости от угла наклона трещины α к границе полуплоскости для такой задачи представлены на фиг. 8. Расчет, как и выше, проводился для различных величин коэффициента трения: сплошные кривые соответствуют $\mu = 0$, штриховые — $\mu = 0.2$, штрихпунктирные — $\mu = 0.4$. При таких условиях нагружения вблизи внутренней вершины трещины образуется область скольжения (как следствие, КИН $k_1 = 0$), а к противоположной вершине примыкает зона раскрытия (решение вблизи краевой вершины ограничено). Как видно, в отсутствие трения максимальное значение КИН достигается при угле наклона трещины $\alpha = 45^\circ$ (фиг. 8). Учет трения, которое препятствует скольжению, приводит к общему снижению величины КИН ($\forall \alpha$) и уменьшению величины угла наклона, при котором достигается его максимальное значение. Отметим, что в небольшом диапазоне углов ($5^\circ - 10^\circ$) вблизи $\alpha = 45^\circ$ наблюдается образование второй, очень малой области скольжения, примыкающей к краевой вершине трещины, причем контактные напряжения в этой области в 5–10 раз больше внешних нагрузок. В этом случае решение вблизи краевой вершины также ограничено, поскольку $v_+^+ - v_-^- < 0$ (см. п. 6).

Результаты решения данной задачи позволяют выявить следующую аналогию. Согласно теории Кулона [21] разрушение тела при одноосном сжатии должно происходить в плоскости, составляющей угол $\beta = 45^\circ - (\arctg \kappa)/2$ с направлением сжатия. Здесь κ — "коэффициент внутреннего трения" [21]. Величина угла наклона трещины α , при котором достигается максимальное значение КИН, имеет аналогичную функциональную зависимость от коэффициента трения μ , т.е. $k_{2\max} = k_2(\alpha_0)$, где $\alpha_0 = 45^\circ - (\arctg \mu)/2$ (фиг. 8).

Рассмотрим также задачу о краевой трещине в полуплоскости в случае, когда нагрузки приложены на ее границе (фиг. 9, задача 3). На фиг. 10, 11 представлены результаты расчета КИН во внутренней вершине прямолинейной краевой трещины в



Фиг. 10



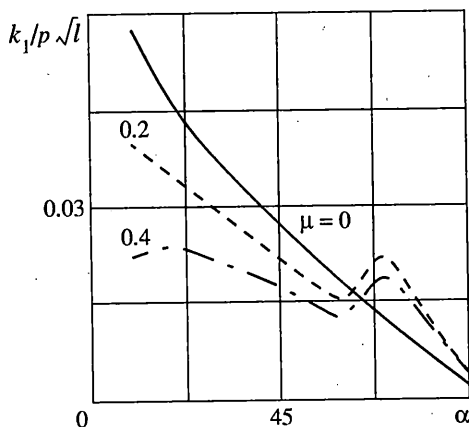
Фиг. 11

полуплоскости при заданном равномерном давлении на участке ее границы. Один из концов участка совпадает с краевой вершиной трещины, а его длина составляет четверть длины трещины (см. фиг. 9). При таких условиях нагружения вблизи внутренней вершины трещины образуется область раскрытия, а вблизи краевой вершины — область скольжения. При малых значениях угла α ($\alpha = 10^\circ - 40^\circ$) и при достаточно большом коэффициенте трения ($\mu = 0.2 - 0.4$), в зоне налегания образуется область сцепления, примыкающая к краевой вершине [18].

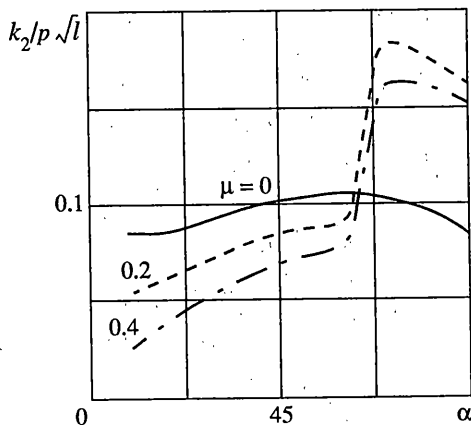
Как видно, КИН k_1 достигает максимума при малых значениях угла излома ($\alpha < 30^\circ$, фиг. 10), а КИН k_2 — при больших ($\alpha > 70^\circ$, фиг. 11). В диапазоне углов наклона $\alpha < 70^\circ$ при $\mu = 0.2$ ($\alpha \leq 60^\circ$ при $\mu = 0.4$), а также в отсутствие трения, решение вблизи краевой вершины ограничено (см. п. 6) и КИН монотонно убывает с ростом коэффициента трения. Сильный рост КИН при соответствующих значениях угла наклона α и коэффициента трения μ обусловлен тем, что при этих параметрах задачи решение вблизи краевой вершины имеет особенность, отличающуюся от корневой (см. п. 6). Отметим, что численное решение задачи в этом случае строится на основе алгебраической системы уравнений (3.25), (3.26). Как видно, качественное изменение поведения решения вблизи краевой вершины оказывает существенное влияние на КИН k_1 и k_2 во внутренней вершине трещины, которые сильно возрастают (фиг. 10, 11).

Рассмотрим аналогичную задачу о прямолинейной краевой трещине в полуплоскости в условиях, когда на том же участке ее границы, помимо нормальных нагрузок p (см. фиг. 9), приложены равномерно распределенные касательные нагрузки $\tau > 0$ (задача 4). На фиг. 12, 13 представлены результаты расчета КИН при $\tau = 0.4p$, что моделирует трение между поверхностью и штампом при его перемещении. Качественно, распределение областей налегания и раскрытия в данном случае носит аналогичный характер, однако область сцепления вблизи краевой вершины не образуется ($\forall \alpha$ при $\mu \leq 0.4$) [18]. Аналогично предыдущей задаче, наблюдается уменьшение КИН с ростом коэффициента трения и величины угла наклона в тех случаях, когда решение вблизи краевой вершины ограничено, а также заметное увеличение КИН в тех случаях, когда решение в этой вершине имеет особенность (см. фиг. 12, 13). В то же время следует отметить, что сдвиговая нагрузка приводит к увеличению КИН в 1.5–2 раза.

Таким образом, проведенное исследование позволило выявить ряд закономерностей, определяющих предельное равновесие трещин в упругой полуплоскости. По результатам проведенных расчетов можно сделать вывод, что трение в большинстве случаев приводит к увеличению внешних нагрузок, при которых трещина может до-



Фиг. 12



Фиг. 13

стигать предельного равновесия. С другой стороны, в некоторых случаях (задача 1 при $\chi = 0.1$) может наблюдаться обратная ситуация. При образовании области контакта вблизи краевой вершины трещины и при наличии трения в этой области решение в определенном диапазоне углов имеет особенность (см. п. б), что также может приводить к КИН при наличии трения большим, нежели в случае гладкого контакта (задачи 3, 4).

Результаты расчета показывают, что в зависимости от коэффициента трения заданное значение КИН (нормированное по отношению к приложенной нагрузке и длине трещины) может быть достигнуто при различных ориентациях трещины. Кроме того, результаты расчета позволяют определить наиболее опасные с точки зрения предельного равновесия ориентации трещины при заданных внешних нагрузках и коэффициенте трения.

Полученные результаты позволяют определить начальное направление роста трещины с использованием одного из известных критериев, например, критерия локальной симметрии [23]. В соответствии с этим критерием, при нагрузке, достигшей предельного значения, трещина растет в направлении, которое образует с проведенной в ее вершине касательной угол

$$\theta = 2 \arctg \frac{k_1 - \sqrt{k_1^2 + 8k_2^2}}{4k_2} \quad (5.1)$$

Используя этот критерий, можно сделать вывод, что трещина, рассмотренная в задаче 1, из левой вершины будет (на начальном этапе) развиваться в направлении границы полуплоскости ($k_2^- < 0$), а из правой, напротив, вглубь полуплоскости ($k_2^+ > 0$). Краевые трещины задач 3, 4 при достижении предельного равновесия также будут развиваться вглубь полуплоскости. Напротив, трещина задачи 2 будет развиваться в направлении границы полуплоскости для углов ориентации $\alpha \leq 70.5^\circ$ (см. (5.1) при $k_1 = 0$, $k_2 < 0$). Отметим, что анализ направления распространения трещин задач 3, 4 важен с позиций исследования долговечности поверхности при действии на нее штампа.

6. Приложение. Рассмотрим двумерную задачу линейной теории упругости о распределении напряжений и смещений в окрестности вершины разреза, лежащей на границе полуплоскости, при учете образования зоны контакта его поверхностей. В полярной системе координат, связанной с краевым концом разреза (фиг. 2), гранич-

ные условия такой задачи имеют вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_{r\varphi}^{(1)}(r, \alpha) &= \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}(r, \alpha) = 0 \\
 \sigma_{r\varphi}^{(2)}(r, \alpha + \pi) &= \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}(r, \alpha + \pi) = 0 \\
 u_{\varphi}^{(1)}(r, 0) &= u_{\varphi}^{(2)}(r, 2\pi) \\
 \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}(r, 0) &= \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)}(r, 2\pi) \\
 \sigma_{r\varphi}^{(1)}(r, 0) &= \mu \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)}(r, 0) \frac{u_r^{(1)}(r, 0) - u_r^{(2)}(r, 2\pi)}{|(u_r^{(1)}(r, 0) - u_r^{(2)}(r, 2\pi))|} \\
 \sigma_{r\varphi}^{(1)}(r, 0) &= -\sigma_{r\varphi}^{(2)}(r, 2\pi)
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Здесь α – угол между касательной к линии разреза, проведенной в его краевом конце, и границей полуплоскости.

Для получения уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние в каждой из характерных областей 1 и 2, запишем известные комплексные представления [13]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^{(j)} + \sigma_{\varphi\varphi}^{(j)} &= 2[\varphi_j'(z) + \overline{\varphi_j'(z)}] \\
 \sigma_{\varphi\varphi}^{(j)} - \sigma_{rr}^{(j)} + 2i\sigma_{r\varphi}^{(j)} &= 2[\bar{z}\varphi_j''(z) + \psi_j'(z)]e^{2i\varphi} \\
 2G(u_r^{(j)} + iu_{\varphi}^{(j)}) &= e^{-i\varphi}[\kappa\varphi_j'(z) - z\overline{\varphi_j'(z)} - \overline{\psi_j(z)}] \\
 z &= re^{i\varphi}, \quad \bar{z} = re^{-i\varphi} \quad (j=1, 2)
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Здесь нижние индексы в комплексных потенциалах обозначают принадлежность к той или иной области упругой полуплоскости.

Решение системы (6.2) в каждой из областей запишем в виде

$$\varphi_j(z) = a_j z^{\lambda}, \quad \psi_j(z) = b_j z^{\lambda} \tag{6.3}$$

Здесь a_j и b_j – неизвестные комплексные постоянные, λ полагаем вещественным числом. В этом случае выражения (6.2) будут определять поля напряжений и смещений. Отметим, что показатель асимптотики λ не меняется при переходе от одной области решения к другой, что обусловлено граничными условиями типа сшивки (см. третье и четвертое условия (6.1)).

Введем следующие обозначения для a_j и b_j :

$$a_j = A_j + iB_j, \quad b_j = C_j + iD_j \quad (j=1, 2) \tag{6.4}$$

Используя соотношения (6.2), (6.3) и (6.4), получим выражения для напряжений и смещений в характерных областях ($j=1, 2$):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\varphi\varphi}^{(j)} &= \lambda r^{\lambda-1} [A_j(\lambda+1)\cos(\lambda-1)\varphi - B_j(\lambda+1)\sin(\lambda-1)\varphi + C_j\cos(\lambda+1)\varphi - D_j\sin(\lambda+1)\varphi] \\
 \sigma_{rr}^{(j)} &= \lambda r^{\lambda-1} [A_j(3-\lambda)\cos(\lambda-1)\varphi - B_j(3-\lambda)\sin(\lambda-1)\varphi - C_j\cos(\lambda+1)\varphi + D_j\sin(\lambda+1)\varphi] \\
 u_{\varphi}^{(j)} &= \frac{r^{\lambda}}{2G} [A_j(\lambda+\kappa)\sin(\lambda-1)\varphi + B_j(\lambda+\kappa)\cos(\lambda-1)\varphi + C_j\sin(\lambda+1)\varphi + D_j\cos(\lambda+1)\varphi] \\
 u_r^{(j)} &= \frac{r^{\lambda}}{2G} [A_j(\kappa-\lambda)\cos(\lambda-1)\varphi - B_j(\kappa-\lambda)\sin(\lambda-1)\varphi - C_j\sin(\lambda+1)\varphi + D_j\cos(\lambda+1)\varphi]
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Отметим, что напряжения, соответствующие этому решению, будут при $\lambda < 1$ иметь вблизи точки излома сингулярность порядка $1 - \lambda$.

Таким образом, задача сведена к определению неизвестных постоянных A_j, B_j, C_j, D_j ($j = 1, 2$) и величины λ . Значения показателя λ ищутся в энергетическом классе решений $\lambda \geq 1/2$.

Подстановка явных выражений для напряжений и смещений в области 1 и их аналогов в области 2 в граничные условия (6.1) приводит к системе однородных по $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ уравнений. Для существования нетривиального решения необходимо положить ее определитель равным нулю, что приводит к характеристическому уравнению относительно λ . В качестве показателя сингулярности решения следует выбирать минимальное значение λ , удовлетворяющее ограничению $\lambda \geq 1/2$.

Отметим, что альтернативой предложенному методу определения поведения упругого поля вблизи особых точек является асимптотический анализ сингулярных интегральных уравнений, описывающих соответствующую краевую задачу [17, 21].

На фиг. 3 приведены результаты решения рассмотренной краевой задачи. Приведена зависимость показателя асимптотики $\lambda = \lambda(\alpha)$ от угла между касательной к линии разреза на краевом конце и границей полуплоскости для различных величин коэффициента трения (см. фиг. 2). Как видно, существует диапазон углов, в котором решение имеет особенность, причем при увеличении коэффициента трения этот диапазон, расширяется, а порядок особенности возрастает. Напротив, в отсутствие трения, решение на краевом конце разреза ограничено. Отметим также, что особенность в решении на краевом конце разреза имеет место только в том случае, когда $u_r^{(1)}(r, 0) - u_r^{(2)}(r, 2\pi) > 0$ (см. пятое условие (6.1)).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 00-15-96066).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдштейн Р.В., Савова Л.Н. Об определении раскрытия и коэффициентов интенсивности напряжений для гладкой криволинейной трещины в упругой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 2. С. 69–78.
2. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 323 с.
3. Андреев А.В., Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В. Равновесие криволинейных разрезов с учетом образования областей налегания, скольжения и сцепления берегов трещины // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 137–148.
4. Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В., Морозова Т.М. Равновесие системы разрезов при образовании на них областей налегания и раскрытия // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 672–678.
5. Comninou M., Chang F.-K. Effects of partial closure and friction on a radial crack emanating from a circular hole // Intern. J. Fracture. 1985. V. 28. № 1. P. 29–36.
6. Панасюк В.В., Саврук М.П., Давышшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
7. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1966. 246 с.
8. Zang W., Gudmundson P. An integral equation method for piece-wise smooth cracks in an elastic half-plane // Engng. Fracture Mech. 1989. V. 32. № 6. P. 889–897.
9. Petrova V., Tamuzs V., Mescheryakova T. Fracture of a semi-infinite medium containing a macrocrack and microcracks // Proc. Fracture: Mechanisms and Mechanics Damage and Failure. 11th Biennial Europ. Conf. on Fracture. France, 1996. V. 1. P. 283–288.
10. Zang W., Gudmundson P. Frictional contact problems of kinked cracks modelled by a boundary integral method // Intern. J. Number. Methods in Eng. 1991. V. 31. № 3. P. 427–446.
11. Давышшин А.П., Марченко Г.П., Панасюк В.В. К теории развития трещин при контакте качения // Физ.-хим. механика материалов. 1993. № 4. С. 49–61.

12. *Datsyshyn O.P., Panasyuk V.V.* Durability and fracture calculation model of solids under their contact interaction // Proc. Fracture: Mechanisms and Mechanics Damage and Failure. 11th Biennial Europ. Conf. on Fracture. France, 1996. V. 2. P. 1381–1385.
13. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
14. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
15. *Линьков А.М.* Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. СПб: Наука, 1999. 382 с.
16. *Chawla M.M., Ramacrishnan T.R.* Modified Gauss–Jacobi quadrature formulas for the numerical evaluation of Cauchy type singular integrals // BIT. 1974. V. 14. № 1. P. 14–21.
17. *Erdogan F.E., Gupta G.D., Cook T.S.* The numerical solution of singular integral equations // Mechanics of Fracture. Leyden: Noordhoff Intern. Publ., 1973. V. 1. P. 368–425.
18. *Андреев А.В., Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В.* Расчет предельного равновесия внутренних и краевых трещин со взаимодействующими поверхностями в упругой полуплоскости. Препринт № 692. М.: Ин-т проблем механики РАН. 2001. 59 с.
19. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. App. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 526–528.
20. *Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В.* Анализ процесса скольжения поверхностей трещины с учетом сил трения при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 139–148.
21. *Theocaris P.S., Ioakimidis N.I.* The V-notched elastic half-plane problem // Acta Mech. 1979. V. 32. № 1–3. P. 125–140.
22. *Paul B.* Macroscopic criteria for plastic flow and brittle fracture. Fracture (Ed. H. Liebowitz). N.Y.–L.: Acad. Press, 1968. V. 2. P. 313–496.
23. *Гольдштейн Р.В., Салганик Р.Л.* Хрупкое разрушение тел с произвольными трещинами // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 156–171.

Москва

Поступила в редакцию
8.04.2002