

УДК 539.3

© 2002 г. Р.С. НОВОКШАНОВ, А.А. РОГОВОЙ

О ПОСТРОЕНИИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

На основе кинематики наложения малых упругих и малых пластических деформаций на конечные упругопластические, получены эволюционные определяющие соотношения упругопластичности для любого упругого и ассоциированного пластического законов с согласованными с этими уравнениями коротационными производными. Показана их термодинамическая непротиворечивость.

1. Введение. Общая теория определяющих уравнений базируется на законах термодинамики, принципах инвариантности и дополнительных предположениях, аксиомах и неравенствах. Законы термодинамики определяют общую структуру уравнений состояния и ограничения, налагаемые на термодинамические параметры. Принципы инвариантности представляют собой постулаты независимости определяющих соотношений от жесткого движения актуальной конфигурации и некоторых преобразований начальной конфигурации, учитывающих симметрию свойств среды. Дополнительные предположения, аксиомы и неравенства позволяют учесть известный из практики или эксперимента характер поведения материала в тех или иных условиях его работы и накладывают ограничения на уравнения состояния с целью исключения результатов, противоречащих физическому смыслу.

Для обеспечения объективности (материальной независимости от системы отсчета) эволюционных определяющих уравнений используют ту или иную коротационную производную. В ряде работ, например, в [1], критерием выбора типа коротационной производной объявляется физичность получающихся результатов. Авторы других работ необходимую коротационную производную согласовывают с той или иной мерой или тензором деформаций, исходя из энергетического смысла. Но такой выбор, как показано в [2], не единственен.

Фундаментальной величиной, определяющей кинематику в механике сплошных сред, является градиент места \mathbf{F} [1, 3–6]. Все меры и тензоры деформаций, скорости их изменения и тензор деформации скорости [1, 4, 5], элементарные объемы и поверхности в начальной и текущей конфигурациях представляются через этот тензор. Выражение для него через промежуточную конфигурацию, достигаемую или не достигаемую в действительности, имеет вид

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{F}_0 \quad (1.1)$$

где \mathbf{F}_0 , \mathbf{f} и \mathbf{F} – градиенты места из начальной конфигурации в промежуточную, из промежуточной в текущую и из начальной в текущую, соответственно. Использование этого соотношения для определения кинематики в случае упругопластического процесса при конечных деформациях, когда промежуточной является разгруженная ненапряженная конфигурация с остаточными пластическими деформациями [7, 8] или пластическим градиентом места \mathbf{F}_p [9], приводит к невыполнению принципов индифферентности и термодинамической допустимости [5, 6].

Цель настоящей работы – опираясь на представление (1.1) градиента места, построить в рамках кинематики, определяемой наложением малых деформаций на конечные, уравнения состояния для конечных деформаций, в том числе упругопластические, с согласованными с этими уравнениями коротационными производными, и показать непротиворечивость полученных уравнений законам термодинамики.

2. Определяющие соотношения в промежуточной конфигурации. Для описания поведения среды при конечных деформациях будем, как обычно, использовать понятия начальной и текущей (актуальной) конфигураций [4, 10]. Первую определим радиус-вектором \mathbf{r} , вторую – \mathbf{R} . Каждый из этих радиус-векторов является функцией обобщенных координат q^i ($i = 1, 2, 3$). В каждой из конфигураций введем обычным образом локальный базис \mathbf{r}_i , \mathbf{r}^i и \mathbf{R}_i , \mathbf{R}^i и определим операторы Гамильтона $\nabla = \mathbf{r}^i \partial / \partial q^i$ для начальной и $\tilde{\nabla} = \mathbf{R}^i \partial / \partial q^i$ для текущей конфигураций, а также фундаментальную для кинематики величину – градиент места

$$\mathbf{F} = (\nabla \mathbf{R})^T = \mathbf{R}_i \mathbf{r}^i \quad (2.1)$$

и обратную ему величину

$$\mathbf{F}^{-1} = (\tilde{\nabla} \mathbf{r})^T = \mathbf{r}_i \mathbf{R}^i \quad (2.2)$$

Из последних выражений легко определить \mathbf{R}_i и \mathbf{R}^i :

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}^T, \quad \mathbf{R}^i = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{r}^i \quad (2.3)$$

В соответствии с теоремой Селерье – Рихтера или теоремой приведения Нолла [3] определяющее уравнение для простого материала, удовлетворяющее принципу объективности, имеет вид

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}_F \cdot \tilde{\mathbf{g}}_1(\mathbf{U}_F) \cdot \mathbf{R}_F^T \quad (2.4)$$

где \mathbf{T} – тензор истинных напряжений (тензор Коши), \mathbf{R}_F и \mathbf{U}_F – ортогональный тензор вращения и симметричный положительно определенный тензор чистой деформации в полярном разложении градиента места $\mathbf{F} = \mathbf{R}_F \cdot \mathbf{U}_F$, а $\tilde{\mathbf{g}}_1$ – отклик материала на чистую деформацию. Соотношение (2.4) может быть представлено в следующих эквивалентных формах:

$$\mathbf{T} = \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_2 \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_3 \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_4 \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_5 \cdot \mathbf{F}^T = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_6 \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.5)$$

также удовлетворяющих принципу материальной независимости от системы отсчета; функции отклика материала на чистую деформацию $\tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{U}_F)$ связаны между собой соотношениями

$$\tilde{\mathbf{g}}_1 = \mathbf{U}_F \cdot \tilde{\mathbf{g}}_2 \cdot \mathbf{U}_F = \mathbf{U}_F^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_3 \cdot \mathbf{U}_F^{-1} = \mathbf{U}_F \cdot \tilde{\mathbf{g}}_4 \cdot \mathbf{U}_F^{-1} = \mathbf{U}_F^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_5 \cdot \mathbf{U}_F = J^{-1} \mathbf{U}_F \cdot \tilde{\mathbf{g}}_6 \cdot \mathbf{U}_F$$

Здесь и в (2.5) $J = I_3(\mathbf{F})$ – третий главный инвариант \mathbf{F} , определяющий относительное изменение объема. Из соотношений (2.4), (2.5) следует, что простой физический смысл имеют функции $\tilde{\mathbf{g}}_1$ и $\tilde{\mathbf{g}}_6$. Первая определяет истинные (усилие, отнесенное к текущей площади), а вторая условные (усилие, отнесенное к начальной площади) напряжения при отсутствии вращения. Поэтому экспериментально удобнее определять их.

Уравнения (2.4), (2.5) в общем случае нелинейные и один из распространенных и наиболее мощных подходов к решению краевых задач с этими уравнениями, позволяющий к тому же отслеживать историю процесса, что необходимо при конечных деформациях, это линейризация уравнений. С этой целью будем рассматривать теперь три конфигурации: начальную, определяемую радиус-вектором \mathbf{r} , текущую (актуальную) с радиус-вектором \mathbf{R} и промежуточную с радиус-вектором $\hat{\mathbf{R}}$. Причем,

текущая и промежуточная конфигурации мало различаются между собой. Формализацией этого условия является соотношение

$$\mathbf{R} = \hat{\mathbf{R}} + \varepsilon \mathbf{u} \quad (2.6)$$

где \mathbf{u} – вектор перемещений из промежуточной конфигурации в актуальную, а ε – малый параметр (положительная величина), введение которого является удобным инструментом формализации малости не только вектора перемещений, но и всех других величин (в частности, производных), определяемых через \mathbf{u} [3]. Векторы \mathbf{g} , $\hat{\mathbf{R}}$ и \mathbf{R} зависят от одних и тех же обобщенных координат q^i ($i = 1, 2, 3$) (лагранжевы координаты). По этим векторам в каждой конфигурации строятся локальные базисы (основные \mathbf{g}_i , $\hat{\mathbf{R}}_i$, \mathbf{R}_i и взаимные \mathbf{g}^i , $\hat{\mathbf{R}}^i$, \mathbf{R}^i) и операторы Гамильтона (∇ , $\hat{\nabla}$, $\tilde{\nabla}$). Градиент места \mathbf{F} из начальной конфигурации в текущую тогда записывается в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{F}} \quad (2.7)$$

где $\hat{\mathbf{F}} = (\nabla \hat{\mathbf{R}})^T$ – градиент места из начальной конфигурации в промежуточную и $\mathbf{f} = (\hat{\nabla} \mathbf{R})^T$ – градиент места из промежуточной конфигурации в актуальную. С учетом соотношения (2.6), последнюю величину можно представить в виде

$$\mathbf{f} = (\hat{\nabla}(\hat{\mathbf{R}} + \varepsilon \mathbf{u}))^T = \mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{h} = \mathbf{g} + \varepsilon(\mathbf{e} + \mathbf{d}) \quad (2.8)$$

где \mathbf{g} – единичный тензор и $\mathbf{h} = (\hat{\nabla} \mathbf{u})^T$, $\mathbf{e} = (\mathbf{h} + \mathbf{h}^T)/2$ и $\mathbf{d} = (\mathbf{h} - \mathbf{h}^T)/2$ – тензоры малых деформаций и вращений текущей конфигурации относительно промежуточной. Тогда выражение (2.7) примет вид

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}} + \varepsilon(\mathbf{e} + \mathbf{d}) \cdot \hat{\mathbf{F}} \quad (2.9)$$

Соотношение (2.8) с точностью до линейных слагаемых по ε (эту точность будем сохранять во всех выражениях) можно представить в виде

$$\mathbf{f} = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{e}) \cdot (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{d}) = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{e})$$

откуда следует, что в полярном разложении $\mathbf{f} = \mathbf{V}_f \cdot \mathbf{R}_f = \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{U}_f$:

$$\mathbf{V}_f = \mathbf{U}_f = \mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{e}, \quad \mathbf{R}_f = \mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{d} \quad (2.10)$$

т.е. эти полярные разложения не различимы в рамках линейного представления по ε . Легко проверить, что тензор $\mathbf{V}_f = \mathbf{U}_f$ симметричный, а \mathbf{R}_f ортогональный, и удовлетворяются известные соотношения $\mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f} = \mathbf{U}_f^2$, $\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}^T = \mathbf{V}_f^2$ и $\mathbf{R}_f \cdot \mathbf{R}_f^T = \mathbf{R}_f^T \cdot \mathbf{R}_f = \mathbf{g}$. Выражения (2.10) позволяют представить тензор \mathbf{F} (2.7) в следующих эквивалентных формах:

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}_F \cdot \mathbf{R}_F = \mathbf{R}_F \cdot \mathbf{U}_F = \mathbf{V}_f \cdot \mathbf{R}_f \cdot \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{V}_f \cdot \hat{\mathbf{V}} \cdot \hat{\mathbf{R}} \quad (2.11)$$

где \mathbf{R}_F , \mathbf{V}_F , \mathbf{U}_F – ортогональный тензор, левый и правый тензоры искажений в полярных разложениях градиента места \mathbf{F} , а $\hat{\mathbf{R}}$, $\hat{\mathbf{V}}$, $\hat{\mathbf{U}}$ – то же самое для градиента места $\hat{\mathbf{F}}$. Перепишав последнее соотношение в (2.11) в виде $\mathbf{R}_f \cdot \mathbf{V}_f \cdot \hat{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{R}_f^T \cdot \mathbf{R}_f \cdot \hat{\mathbf{R}}$, можно заключить, что

$$\mathbf{R}_F = \mathbf{R}_f \cdot \hat{\mathbf{R}} = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{d}) \cdot \hat{\mathbf{R}}$$

$$\mathbf{V}_F = \mathbf{R}_f \cdot \mathbf{V}_f \cdot \hat{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{R}_f^T = \hat{\mathbf{V}} + \varepsilon(\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{V}} + \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{V}} - \hat{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{d})$$

$$\mathbf{U}_F = \mathbf{R}_f^T \cdot \mathbf{V}_f \cdot \mathbf{R}_F = \hat{\mathbf{U}} + \varepsilon \hat{\mathbf{R}}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{U}} \quad (2.12)$$

Из соотношений (2.9) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_F^2 &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \hat{\mathbf{V}}^2 + \varepsilon(\hat{\mathbf{V}}^2 \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{V}}^2 + \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{V}}^2 - \hat{\mathbf{V}}^2 \cdot \mathbf{d}) \\ \mathbf{U}_F^2 &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \hat{\mathbf{U}}^2 + 2\varepsilon \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{F}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из соотношений же (2.12) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_F^2 &= \hat{\mathbf{V}}^2 + \varepsilon(\hat{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{V}} + \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{V}}^2 + \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{V}}^2 - \hat{\mathbf{V}}^2 \cdot \mathbf{d}) \\ \mathbf{U}_F^2 &= \hat{\mathbf{U}}^2 + \varepsilon(\hat{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{F}} + \hat{\mathbf{R}}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{U}}^2) \end{aligned} \quad (2.14)$$

и $\mathbf{R}_F \cdot \mathbf{R}_F^T = \mathbf{R}_F^T \cdot \mathbf{R}_F = \mathbf{g}$. Выражения (2.13) и (2.14) совпадут, если тензор $\hat{\mathbf{R}}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{R}}$ будет коммутировать с тензором $\hat{\mathbf{U}}$ и тензор \mathbf{e} с тензором $\hat{\mathbf{V}}$. Покажем, что это выполняется.

В текущей конфигурации правый и левый тензоры чистой деформации и ортогональный тензор представляются в главных осях в виде

$$\mathbf{V}_F = \sum_{i=1}^3 U_i \tilde{\mathbf{K}}_i \tilde{\mathbf{K}}_i, \quad \mathbf{U}_F = \sum_{i=1}^3 U_i \mathbf{K}_i \mathbf{K}_i, \quad \mathbf{R}_F = \sum_{i=1}^3 \tilde{\mathbf{K}}_i \mathbf{K}_i \quad (2.15)$$

и тогда

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 U_i \tilde{\mathbf{K}}_i \mathbf{K}_i \quad (2.16)$$

Эти же тензоры в промежуточной конфигурации записываются как

$$\hat{\mathbf{V}} = \sum_{i=1}^3 \hat{U}_i \tilde{\mathbf{k}}_i \tilde{\mathbf{k}}_i, \quad \hat{\mathbf{U}} = \sum_{i=1}^3 \hat{U}_i \mathbf{k}_i \mathbf{k}_i, \quad \hat{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^3 \tilde{\mathbf{k}}_i \mathbf{k}_i \quad (2.17)$$

и тогда

$$\hat{\mathbf{F}} = \sum_{i=1}^3 \hat{U}_i \tilde{\mathbf{k}}_i \mathbf{k}_i \quad (2.18)$$

Причем, в силу малого различия этих конфигураций

$$U_i = \hat{U}_i + \varepsilon u_i \quad (2.19)$$

Из первого соотношения (2.12), которое, с учетом последних выражений в (2.15) и (2.17), перепишем в виде

$$\sum_{i=1}^3 \tilde{\mathbf{K}}_i \mathbf{K}_i = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{d}) \cdot \sum_{i=1}^3 \tilde{\mathbf{k}}_i \mathbf{k}_i$$

закключаем, что

$$\tilde{\mathbf{K}}_i = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{d}) \cdot \tilde{\mathbf{k}}_i = \tilde{\mathbf{k}}_i \cdot (\mathbf{g} - \varepsilon \mathbf{d}), \quad \mathbf{K}_i = \mathbf{k}_i \quad (2.20)$$

Используя теперь представления (2.15)–(2.20) для определения $\mathbf{f} = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{F}}^{-1}$, получаем, что

$$\mathbf{f} = \mathbf{g} + \varepsilon(\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{V}}^{-1} + \mathbf{d}), \quad \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \tilde{\mathbf{k}}_i \tilde{\mathbf{k}}_i$$

(тензор \mathbf{u} , введенный и используемый только здесь, не путать с вектором перемещений \mathbf{u}) откуда следует, что

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{V}}^{-1} = \sum_{i=1}^3 u_i \hat{U}_i^{-1} \tilde{\mathbf{k}}_i \tilde{\mathbf{k}}_i \quad (2.21)$$

и этот тензор коммутирует с $\hat{\mathbf{V}}$. Соотношение $\hat{\mathbf{R}}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{R}}$ есть простое преобразование базисных векторов в (2.21) к векторам \mathbf{k}_i . Отсюда вытекает коммутация тензора $\hat{\mathbf{R}}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{R}}$ с тензором $\hat{\mathbf{U}}$. В результате выражения (2.13) и (2.14) совпадают и только что доказанная коммутруемость тензоров будет использована при применении соотношений (2.12).

Имея представление для тензора \mathbf{U}_F (2.12), можно получить разложения для функций отклика материала $\tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{U}_F)$ (2.4), (2.5):

$$\tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{U}_F) = \tilde{\mathbf{g}}_i(\hat{\mathbf{U}} + \varepsilon \hat{\mathbf{R}}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{U}}) = \tilde{\mathbf{g}}_i(\hat{\mathbf{U}}) + \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}_i}{\partial \mathbf{U}_F} \cdot \mathbf{C}_{\text{II}}^{\text{IV}} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}_F}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon \quad (2.22)$$

Здесь $\mathbf{C}_{\text{II}}^{\text{IV}}$ – второй изотропный тензор четвертого ранга (основное его свойство: $\mathbf{C}_{\text{II}}^{\text{IV}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}_{\text{II}}^{\text{IV}} = \mathbf{A}^T$, где \mathbf{A} – тензор второго ранга [4]) и использовано правило дифференцирования тензорной функции по промежуточному тензорному аргументу [4]:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{S}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{B}} \cdot \mathbf{C}_{\text{II}}^{\text{IV}} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{S}}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{B}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{S}) \quad (2.23)$$

Производная $\partial \mathbf{U}_F / \partial \varepsilon$ легко определяется и равна $\hat{\mathbf{R}}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{U}}$. Тогда, учитывая свойство тензора $\mathbf{C}_{\text{II}}^{\text{IV}}$ и указанную выше коммутативность, разложение (2.22) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{U}_F) &= \tilde{\mathbf{g}}_i(\hat{\mathbf{U}}) + \varepsilon \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}_i}{\partial \mathbf{U}_F} \Big|_{\mathbf{U}_F = \hat{\mathbf{U}}} \cdot (\hat{\mathbf{U}}^{1/2} \cdot \hat{\mathbf{R}}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{1/2}) = \\ &= \tilde{\mathbf{g}}_i(\hat{\mathbf{U}}) + \varepsilon \left((\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{1/2}) \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}_i}{\partial \mathbf{U}_F} \Big|_{\mathbf{U}_F = \hat{\mathbf{U}}} \cdot (\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{1/2})^T \right) \cdot \mathbf{e} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Здесь символ \cdot в выражении $\mathbf{A} \cdot \mathbf{H}^{\text{IV}}$ означает позиционное скалярное умножение тензора второго ранга \mathbf{A} слева на n -й базисный вектор тензора четвертого ранга \mathbf{H}^{IV} . Введя обозначение

$$\mathbf{L}_i^{\text{IV}} = (\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{1/2}) \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}_i}{\partial \mathbf{U}_F} \Big|_{\mathbf{U}_F = \hat{\mathbf{U}}} \cdot (\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{1/2})^T \quad (2.25)$$

где \mathbf{L}_i^{IV} – тензор четвертого ранга, определяющий отклик материала на малые деформации относительно промежуточной конфигурации, разложение (2.24) принимает окончательный вид

$$\tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{U}_F) = \tilde{\mathbf{g}}_i(\hat{\mathbf{U}}) + \varepsilon \mathbf{L}_i^{\text{IV}} \cdot \mathbf{e} \quad (2.26)$$

Выясним смысл выражения (2.25) при $i = 1$. Тензор истинных напряжений \mathbf{T} принято записывать в текущем базисе \mathbf{R}_i или \mathbf{r}^i . Тогда соотношения (2.3), (2.4) позволяют заключить, что базис тензора $\tilde{\mathbf{g}}_i$ есть $\check{\mathbf{r}}_i = \mathbf{U}_F \cdot \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{U}_F$ или $\check{\mathbf{r}}^i = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{U}_F^{-1} = \mathbf{U}_F^{-1} \cdot \mathbf{r}^i$, т.е.

$$\tilde{\mathbf{g}}_1 = (\tilde{g}_1)^{ij} \check{\mathbf{r}}_i \check{\mathbf{r}}_j = (\tilde{g}_1)_{ij} \check{\mathbf{r}}^i \check{\mathbf{r}}^j = (\tilde{g}_1)^j_i \check{\mathbf{r}}^i \check{\mathbf{r}}_j \quad (2.27)$$

Тензор \mathbf{U}_F , являющийся аргументом функции отклика материала $\tilde{\mathbf{g}}_i$, в том числе и $\tilde{\mathbf{g}}_1$, удобно представить в базисе $\check{\mathbf{r}}_i$ или $\check{\mathbf{r}}^i$, где

$$\check{\mathbf{r}}_i = \mathbf{U}_F^{1/2} \cdot \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{U}_F^{1/2}, \quad \check{\mathbf{r}}^i = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{U}_F^{-1/2} = \mathbf{U}_F^{-1/2} \cdot \mathbf{r}^i \quad (2.28)$$

основной и взаимный базисы, что легко проверяется, и тогда $U_F = G_{ij} \check{r}^i \check{r}^j$, $U_F^{-1} = G^{ij} \check{r}_i \check{r}_j$, где G^{ij} и G_{ij} – составляющие метрического тензора \mathbf{G} в текущей конфигурации. Действительно, вспоминая, что $U_F^2 = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ и $U_F^{-2} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T}$, получаем из выражений (2.1) и (2.2) известные соотношения: $U_F^2 = G_{ij} r^i r^j$, $U_F^{-2} = G^{ij} r_i r_j$. Тогда

$$U_F = U_F^{-1/2} \cdot U_F^2 \cdot U_F^{-1/2} = G_{ij} (U_F^{-1/2} \cdot r^i) (r^j \cdot U_F^{-1/2}) = G_{ij} \check{r}^i \check{r}^j$$

и

$$U_F^{-1} = U_F^{1/2} \cdot U_F^{-2} \cdot U_F^{1/2} = G^{ij} (U_F^{1/2} \cdot r_i) (r^j \cdot U_F^{1/2}) = G^{ij} \check{r}_i \check{r}_j$$

Таким образом в базе \check{r}^i ковариантные составляющие тензора U_F совпадают с ковариантными составляющими метрического тензора \mathbf{G} :

$$U_F = U^{ij} \check{r}_i \check{r}_j = U_{ij} \check{r}^i \check{r}^j = U_j^i \check{r}_i \check{r}^j = U_i^j \check{r}^i \check{r}_j \quad (2.29)$$

и $U_{ij} = G_{ij}$, а контравариантные составляющие метрического тензора \mathbf{G} являются и контравариантными составляющими тензора U_F^{-1} в базе \check{r}_i . Заметим, что базисы \check{r}_i , \check{r}^i и взаимные к ним, определенные выше через тензор U_F , связаны с текущей конфигурацией. Используя же тензор \hat{U} , они будут относиться к промежуточной конфигурации.

Теперь, принимая во внимание соотношения (2.27) и (2.29), нетрудно записать производную, входящую в выражение (2.25):

$$\frac{\partial \check{g}_1}{\partial U_F} = \frac{\partial (\check{g}_1)^{ij}}{\partial U^{kl}} \check{r}_i \check{r}_j \check{r}_k \check{r}_l$$

и тогда, учитывая соотношения (2.3) и (2.28),

$$\begin{aligned} L_1^{IV} &= (\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{U}^{1/2})^3 \frac{\partial \check{g}_1}{\partial U_F} \Big|_{U_F = \hat{U}} \cdot (\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{U}^{1/2})^T = \frac{\partial (\check{g}_1)^{ij}}{\partial U^{kl}} \check{r}_i \check{r}_j (\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{U}^{1/2} \cdot \check{r}_k) (\check{r}_l \cdot \hat{U}^{1/2} \cdot \hat{\mathbf{R}}^T) = \\ &= \frac{\partial (\check{g}_1)^{ij}}{\partial U^{kl}} \check{r}_i \check{r}_j \hat{\mathbf{R}}_k \hat{\mathbf{R}}_l \end{aligned} \quad (2.30)$$

Таким образом, соотношение (2.25) есть не что иное, как преобразование двух последних базисных векторов тензора четвертого ранга $\partial \check{g}_1 / \partial U_F$ в промежуточную конфигурацию.

Первое равенство в соотношении (2.5), с учетом выражения (2.3), позволяет заключить, что базис тензора \check{g}_2 есть r_i или r^i , т.е. просто базис начальной конфигурации. Поэтому

$$L_2^{IV} = \frac{\partial (\check{g}_2)^{ij}}{\partial U^{kl}} r_i r_j \hat{\mathbf{R}}_k \hat{\mathbf{R}}_l$$

Аналогичным образом можно выяснить смысл выражения (2.25) при остальных значениях i .

Тензор \mathbf{F}^{-1} , входящий в уравнения состояния (2.5), определяется, что легко проверить, выражением

$$\mathbf{F}^{-1} = \hat{\mathbf{F}}^{-1} \cdot (\mathbf{g} - \epsilon \mathbf{h}) \quad (2.31)$$

и якобиан J , будучи третьим главным инвариантом тензора \mathbf{F} , будет равен

$$J = I_3(\mathbf{F}) = I_3(\mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{F}}) = I_3(\hat{\mathbf{F}}) I_3(\mathbf{f}) = \hat{J} I_3(\mathbf{f}), \quad \hat{J} = I_3(\hat{\mathbf{F}})$$

Далее, по (2.23):

$$I_3(\mathbf{f}) = I_3(\mathbf{f})|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial I_3(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \dots \mathbf{C}_{II}^{IV} \dots \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon} |_{\varepsilon=0} \varepsilon$$

и вспоминая, что [4] $\partial I_3(\mathbf{f}) / \partial \mathbf{f} = I_3(\mathbf{f}) \mathbf{f}^{-T}$, получаем

$$I_3(\mathbf{f}) = I_3(\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{h}) = 1 + \varepsilon I_1(\mathbf{h}) = 1 + \varepsilon I_1(\mathbf{e})$$

где I_1 – первый главный инвариант. С учетом этого выражения

$$J = \hat{J}(1 + \varepsilon I_1(\mathbf{e})) \quad (2.32)$$

а J^{-1} строится как разложение (2.32) в ряд, с сохранением только линейных по ε членов

$$J^{-1} = \hat{J}^{-1}(1 - \varepsilon I_1(\mathbf{e})) \quad (2.33)$$

Имея теперь разложения для \mathbf{F} (2.9), \mathbf{U}_F и \mathbf{R}_F (2.12), $\tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{U}_F)$ (2.26), а также \mathbf{F}^{-1} (2.31) и J^{-1} (2.33), определяющее уравнение (2.4) переписывается, с точностью до линейных слагаемых по ε , в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{R}_F \cdot \tilde{\mathbf{g}}_1 \cdot \mathbf{R}_F^T = (\hat{\mathbf{R}} + \varepsilon \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{R}}) \cdot (\tilde{\mathbf{g}}_1 + \varepsilon \mathbf{L}_1^{IV} \dots \mathbf{e}) \cdot (\hat{\mathbf{R}}^T - \varepsilon \hat{\mathbf{R}}^T \cdot \mathbf{d}) = \\ &= \hat{\mathbf{T}} + \varepsilon \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{T}} - \varepsilon \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{d} + \varepsilon \tilde{\mathbf{L}}_1^{IV} \dots \mathbf{e} \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_1(\hat{\mathbf{U}}) \cdot \hat{\mathbf{R}}^T, \quad \tilde{\mathbf{L}}_1^{IV} = \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{L}_1^{IV} \overset{*}{*} \hat{\mathbf{R}}^T$$

Здесь символ $(\overset{*}{*})$ в выражении $\mathbf{H}^{IV} \overset{*}{*} \mathbf{A}$ означает позиционное скалярное умножение тензора второго ранга \mathbf{A} справа на n -й базисный вектор тензора четвертого ранга \mathbf{H}^{IV} .

Вспоминая структуру тензора \mathbf{L}_1^{IV} (см. (2.30)), легко понять, что $\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{L}_1^{IV} \overset{*}{*} \hat{\mathbf{R}}^T$ есть просто преобразование двух первых базисных векторов тензора четвертого ранга \mathbf{L}_1^{IV} в промежуточную конфигурацию, т.е. все базисные векторы тензора $\tilde{\mathbf{L}}_1^{IV}$ отнесены к промежуточной конфигурации, к которой отнесен и тензор малых деформаций \mathbf{e} .

Поступая аналогичным образом с соотношениями (2.5), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \hat{\mathbf{T}} + \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{h}^T + \tilde{\mathbf{L}}_2^{IV} \dots \mathbf{e}, \quad \mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}} - \mathbf{h}^T \cdot \hat{\mathbf{T}} - \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{h} + \tilde{\mathbf{L}}_3^{IV} \dots \mathbf{e} \\ \mathbf{T} &= \hat{\mathbf{T}} + \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{T}} - \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{h} + \tilde{\mathbf{L}}_4^{IV} \dots \mathbf{e}, \quad \mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}} - \mathbf{h}^T \cdot \hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{h}^T + \tilde{\mathbf{L}}_5^{IV} \dots \mathbf{e} \\ \mathbf{T} &= (1 - I_1(\mathbf{e})) \hat{\mathbf{T}} + \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{h}^T + \tilde{\mathbf{L}}_6^{IV} \dots \mathbf{e} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Здесь параметр ε опущен и введены обозначения

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}} &= \hat{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_2(\hat{\mathbf{U}}) \cdot \hat{\mathbf{F}}^T = \hat{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_3(\hat{\mathbf{U}}) \cdot \hat{\mathbf{F}}^{-1} = \hat{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_4(\hat{\mathbf{U}}) \cdot \hat{\mathbf{F}}^{-1} = \hat{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_5(\hat{\mathbf{U}}) \cdot \hat{\mathbf{F}}^T = \hat{J}^{-1} \hat{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_6(\hat{\mathbf{U}}) \cdot \hat{\mathbf{F}}^T \\ \tilde{\mathbf{L}}_2^{IV} &= \hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{L}_2^{IV} \overset{*}{*} \hat{\mathbf{F}}^T, \quad \tilde{\mathbf{L}}_3^{IV} = \hat{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \mathbf{L}_3^{IV} \overset{*}{*} \hat{\mathbf{F}}^{-1} \\ \tilde{\mathbf{L}}_4^{IV} &= \hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{L}_4^{IV} \overset{*}{*} \hat{\mathbf{F}}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{L}}_5^{IV} = \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{L}_5^{IV} \overset{*}{*} \hat{\mathbf{F}}^T, \quad \tilde{\mathbf{L}}_6^{IV} = \hat{J}^{-1} \hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{L}_6^{IV} \overset{*}{*} \hat{\mathbf{F}}^T \end{aligned}$$

Можно также показать, что выражения для тензоров $\tilde{\mathbf{L}}_i^{IV}$ есть просто преобразование двух первых базисных векторов тензоров четвертого ранга \mathbf{L}_i^{IV} из начальной конфигурации в промежуточную.

Заметим, что соотношение (2.34) приведено в [3], а последнее в (2.35) в [10, 11].

Определяющие уравнения (2.34) и (2.35) весьма удобны для пошагового решения краевых задач, что в большинстве случаев и осуществляется при численной реализации нелинейных проблем, и такой формы записи в дальнейшем и будем придерживаться. Но их просто привести и к дифференциальным (эволюционным) уравнениям. Действительно, перенося все слагаемые в этих соотношениях за исключением последнего в левую часть, деля на приращение времени перехода из промежуточной конфигурации в актуальную и устремляя промежуточную конфигурацию к текущей, получаем в пределе

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^J &= \tilde{\mathbf{L}}_1^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{T}^{Ol} = \tilde{\mathbf{L}}_2^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{T}^{CR} = \tilde{\mathbf{L}}_3^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}} \\ \mathbf{T}^L &= \tilde{\mathbf{L}}_4^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{T}^{Rt} = \tilde{\mathbf{L}}_5^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{T}^{Tr} = \tilde{\mathbf{L}}_6^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Здесь \mathbf{T}^J , \mathbf{T}^{Ol} , \mathbf{T}^{CR} и т.д. – коротационные производные Яуманна, Олдройда, Коттер – Ривлина, левая и правая конвективные и Трусделла [12, 13]. Отметим, что первое равенство в (2.34), где $\tilde{\mathbf{g}}_1$ – отклик материала на чистую деформацию относительно начальной конфигурации, приводит к R -коротационной производной (известной еще как производная Зарембы, Грина – Нагди, Грина – МакИнниса, Диенеса), в то время как конечное соотношение в (2.34) с функцией отклика материала относительно промежуточной конфигурации, мало отличающейся от текущей, дает производную Яуманна.

Объективность левых частей определяющих уравнений (2.36) следует из объективности коротационных производных. Объективность же правых частей вытекает из объективности соотношений $\tilde{\mathbf{L}}_i^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}}$, что легко показать. Действительно

$$\dot{\mathbf{e}} = \lim_{\hat{\mathbf{v}} \rightarrow \hat{\mathbf{v}}} \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{V}}\dot{\mathbf{u}} + (\hat{\mathbf{V}}\dot{\mathbf{u}})^T) = \frac{1}{2} (\mathbf{I} + \mathbf{I}^T) = \mathbf{D}$$

Тензор деформации скорости \mathbf{D} – объективный тензор, преобразующийся по закону $\mathbf{D}' = \mathbf{O} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{O}^T$, где \mathbf{O} – произвольный ортогональный тензор. Базисные векторы тензора $\tilde{\mathbf{L}}_i^{IV}$ преобразуются по закону $\mathbf{R}'_i = \mathbf{O} \cdot \mathbf{R}_i$, а аргумент $\mathbf{U}'_F = \mathbf{U}_F$. Тогда

$$(\tilde{\mathbf{L}}_n^{IV})' \cdot \dot{\mathbf{e}}' = \frac{\partial(\tilde{\mathbf{g}}_n)^{ij}}{\partial U^{kl}} (\mathbf{O} \cdot \mathbf{R}_i)(\mathbf{R}_j \cdot \mathbf{O}^T)(\mathbf{O} \cdot \mathbf{R}_k)(\mathbf{R}_l \cdot \mathbf{O}^T) \cdot (\mathbf{O} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{O}^T) = \mathbf{O} \cdot (\tilde{\mathbf{L}}_n^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}}) \cdot \mathbf{O}^T$$

Рассмотрим теперь интересный и принципиальный для следующего раздела статьи частный случай, когда градиент места \mathbf{f} в композиции (2.7) переводит промежуточную конфигурацию в текущую, не меняя напряженного состояния в том смысле, что

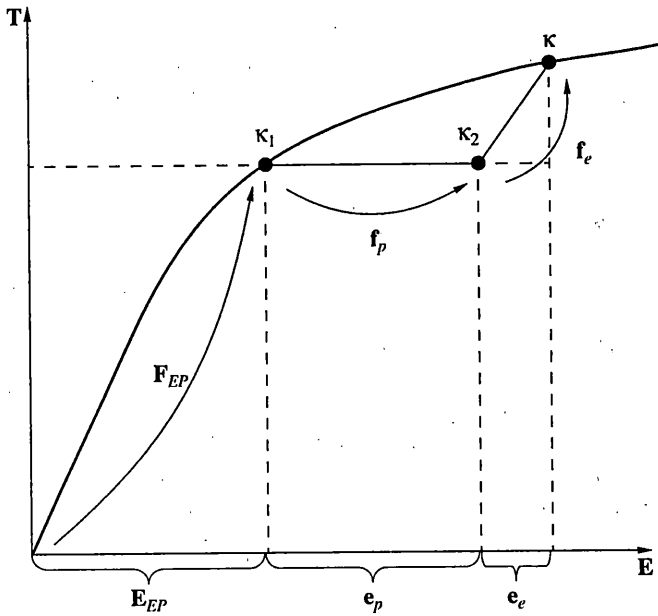
$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}} \quad (2.37)$$

Из соотношения (2.34) тогда получаем, что $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}} + 2\hat{\mathbf{T}} \cdot \tilde{\mathbf{L}}_1^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}}$ и для выполнения условия (2.37) при произвольном тензоре $\hat{\mathbf{T}}$ необходимо, чтобы $\tilde{\mathbf{L}}_1^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}} = 0$. Определяющее уравнение (2.34) при этом сводится к виду

$$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}} + \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{T}} - \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{d} \quad (2.38)$$

Вспомня, что $\mathbf{h} = \mathbf{e} + \mathbf{d}$, $\mathbf{h}^T = \mathbf{e} - \mathbf{d}$, легко показать, что и уравнения (2.35) при условии (2.37) сводятся также к виду (2.38).

3. Определяющие соотношения упругопластичности. Хорошо известное разложение Ли градиента места в упругопластических деформациях [9] имеет вид $\mathbf{F} = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{F}_P$, где \mathbf{F}_P – градиент пластической деформации из начальной конфигурации в промежуточную, а \mathbf{F}_E – градиент упругой деформации из промежуточной конфигурации в текущую. Промежуточная конфигурация в данном случае определяется из текущей,



Фиг. 1

возникающей в упругопластических процессах, путем упругой разгрузки до нулевых напряжений. В общем случае эта конфигурация не евклидова [7, 8], поэтому в рассмотрение вводится концепция касательной разгруженной конфигурации [7, 8, 14, 15]. Она имеет смысл конфигурации однородно деформированного тела и упругопластический процесс в ней трактуется как упругий процесс с такой отсчетной конфигурацией [7, 8, 16]. Разгруженная конфигурация определяется с точностью до ортогональных преобразований.

Придерживаясь концепции наложения малых деформаций на конечные, и подхода, изложенного в работах [17, 18], представим полный градиент места в виде композиции малых упругих, малых пластических и конечных упругопластических деформаций

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}_E \cdot \mathbf{f}_P \cdot \mathbf{F}_{EP} \quad (3.1)$$

Градиент места \mathbf{F}_{EP} переводит начальную конфигурацию, определяемую радиус-вектором \mathbf{r} , в первую промежуточную κ_1 . Градиент \mathbf{f}_P переводит конфигурацию κ_1 во вторую тоже промежуточную конфигурацию κ_2 . И, наконец, градиент \mathbf{f}_E переводит конфигурацию κ_2 в текущую с радиус-вектором \mathbf{R} . Причем, конфигурации κ_1 , κ_2 и текущая близки между собой, что формализуется выражениями

$$\mathbf{R}_{\kappa_2} = \mathbf{R}_{\kappa_1} + \varepsilon \mathbf{u}_P, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_{\kappa_2} + \varepsilon \mathbf{u}_E \quad (3.2)$$

где ε – малый параметр (положительная величина), а \mathbf{u}_P и \mathbf{u}_E – векторы пластических и упругих перемещений, последовательно переводящие конфигурацию κ_1 в κ_2 и κ_2 в текущую. Причем, до решения задачи конфигурации κ_2 и текущая – неизвестны.

Градиенту \mathbf{F}_{EP} соответствует накопленное напряженное состояние \mathbf{T}_{κ_1} (фиг. 1). Градиент \mathbf{f}_P переводит конфигурацию κ_1 с этим напряженным состоянием в конфигурацию κ_2 , не меняя при этом напряженного состояния в смысле соотношения (2.37) (это также следует из фиг. 1). Тогда, в соответствии с выражением (2.38), напряженное состояние в этой конфигурации определяется соотношением

$$\mathbf{T}_{\kappa_2} = \mathbf{T}_{\kappa_1} + \varepsilon \mathbf{d}_P \cdot \mathbf{T}_{\kappa_1} - \varepsilon \mathbf{T}_{\kappa_1} \cdot \mathbf{d}_P, \quad \mathbf{d}_P = ((\nabla_{\kappa_1} \mathbf{u}_P)^T - \nabla_{\kappa_1} \mathbf{u}_P) / 2 \quad (3.3)$$

где \mathbf{d}_P – тензор малых пластических поворотов. Напряжения \mathbf{T}_{κ_2} являются начальными для кинематики, определяемой упругим градиентом места \mathbf{f}_E , и поэтому, в соответствии с уравнением состояния (2.34), тензор истинных напряжений запишется в виде

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\kappa_2} + \varepsilon \mathbf{d}_E \cdot \mathbf{T}_{\kappa_2} - \varepsilon \mathbf{T}_{\kappa_2} \cdot \mathbf{d}_E + \varepsilon \tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{IV} \cdot \mathbf{e}_E \quad (3.4)$$

$$\mathbf{e}_E = (\nabla_{\kappa_2} \mathbf{u}_E + (\nabla_{\kappa_2} \mathbf{u}_E)^T) / 2, \quad \mathbf{d}_E = ((\nabla_{\kappa_2} \mathbf{u}_E)^T - \nabla_{\kappa_2} \mathbf{u}_E) / 2$$

где $\tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{IV}$ – упругий отклик материала в конфигурации κ_2 . Таким образом, следуя [8, 14–16], упругопластический процесс трактуется как упругий, но не с разгруженной отчетной конфигурацией, а с напряженной κ_2 .

Из выражений (3.1) и (3.2) следует, что $\mathbf{f}_E \cdot \mathbf{f}_P = \mathbf{f}_P \cdot \mathbf{f}_E$, т.е. в рамках линейности всех соотношений по ε конфигурации κ_1 и κ_2 неразличимы. Поэтому все величины в уравнении состояния (3.4) можно считать отнесенными к конфигурации κ_1 и подставляя в это уравнение напряжение, определенное соотношением (3.3), и сохраняя опять только линейные по ε слагаемые, приходим к следующему выражению:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\kappa_1} + \varepsilon (\mathbf{d}_E + \mathbf{d}_P) \cdot \mathbf{T}_{\kappa_1} - \varepsilon \mathbf{T}_{\kappa_1} \cdot (\mathbf{d}_E + \mathbf{d}_P) + \varepsilon \tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{IV} \cdot \mathbf{e}_E$$

которое переписывается в виде

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\kappa_1} + \varepsilon \mathbf{d} \cdot \mathbf{T}_{\kappa_1} - \varepsilon \mathbf{T}_{\kappa_1} \cdot \mathbf{d} + \varepsilon \tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{IV} \cdot \mathbf{e}_E \quad (3.5)$$

где $\mathbf{d} = \mathbf{d}_E + \mathbf{d}_P$ – полный малый упругопластический поворот при переходе из конфигурации κ_1 , с накопленными в ней за счет градиента места \mathbf{F}_{EP} напряжениями \mathbf{T}_{κ_1} , в текущую.

Дифференцируя по времени определяющее уравнение (3.5), сведем его к эволюционному, левая часть которого совпадает с точностью до малого параметра ε с производной Яуманна тензора \mathbf{T} и такую производную будем обозначать \mathbf{T}_ε^J :

$$\mathbf{T}_\varepsilon^J \equiv \dot{\mathbf{T}} - \varepsilon \mathbf{d} \cdot \mathbf{T}_{\kappa_1} + \varepsilon \mathbf{T}_{\kappa_1} \cdot \dot{\mathbf{d}} = \varepsilon \tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}}_E \quad (3.6)$$

В соответствии с ассоциированным законом пластического течения скорость пластической деформации $\dot{\mathbf{e}}_P$ определяется соотношением

$$\dot{\mathbf{e}}_P = \frac{\sqrt{3} \dot{\xi}_P}{\sqrt{2} \sqrt{\partial F / \partial \mathbf{S} \cdot \partial F / \partial \mathbf{S}}} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}}, \quad \dot{\xi}_P = \int_0^t \sqrt{(2/3) (\dot{\mathbf{e}}_P \cdot \dot{\mathbf{e}}_P)} dt \quad (3.7)$$

для активного процесса нагружения ($F = 0$, $dF = 0$, $(\partial F / \partial \mathbf{S}) \cdot d\mathbf{S} > 0$), а при нейтральном нагружении ($F = 0$, $dF = 0$, $(\partial F / \partial \mathbf{S}) \cdot d\mathbf{S} = 0$), разгрузке из упругопластического состояния ($F = 0$, $dF = 0$, $(\partial F / \partial \mathbf{S}) \cdot d\mathbf{S} < 0$) или пассивном (продолженном упругом) нагружении ($F < 0$) $\dot{\mathbf{e}}_P = 0$. Здесь $F = F(\mathbf{S}, q)$ – функция текучести [8], \mathbf{S} и q – девиатор истинных напряжений и параметр упрочнения, ξ_P – накопленная интенсивность скоростей пластических деформаций – параметр Одквиста [8] (может служить параметром упрочнения q). Соотношение (3.7) объективное, так как $\dot{\mathbf{e}}_P = \mathbf{D}_P$ индифферентный тензор, а числитель и знаменатель – инвариантные величины. Производная же F по \mathbf{S} будет индифферентным тензором, если $F(\mathbf{S})$ инвариантная величина. Действительно

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right)' = \frac{\partial F'}{\partial \mathbf{S}'} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \cdot \mathbf{C}_{II}^{IV} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{S}'}$$

Так как $\mathbf{S} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{S}' \cdot \mathbf{O}$, то $\partial \mathbf{S} / \partial \mathbf{S}' = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{C}_{II}^{IV} \cdot \mathbf{O}$. Здесь использовано правило \mathbf{S}

дифференцирования скалярного произведения двух тензорных функций $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{X})$ тензорного аргумента \mathbf{X} (и то, и другое второго порядка) по аргументу \mathbf{X} :

$$\frac{\partial(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{X}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{X}}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right) &= \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right) \cdot \mathbf{C}_{II}^{IV} \cdot (\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{C}_{II}^{IV} \cdot \mathbf{O}) = \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right)^T \cdot (\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{C}_{II}^{IV} \cdot \mathbf{O}) = \mathbf{O} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right) \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{C}_{II}^{IV} = \mathbf{O} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right) \cdot \mathbf{O}^T \end{aligned}$$

Учитывая, что полная деформация \mathbf{e} при переходе из κ_1 конфигурации в текущую малая величина, ее можно представить как суперпозицию малых упругих и малых пластических деформаций. Тогда $\dot{\mathbf{e}}_E = \dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{e}}_P$. Следует отметить, что, по-видимому, впервые на возможность такого суммирования скоростей деформации (совпадающих в данном случае с деформациями скоростей) указал Л.И. Седов [7]. Подставляя в это выражение $\dot{\mathbf{e}}_P$ из соотношения (3.7) и полученное в определяющее уравнение (3.6), приходим к уравнению состояния, описывающему большие упругопластические деформации с конечными упругими и конечными пластическими деформациями при активном процессе нагружения

$$\mathbf{T}_\varepsilon^J = \varepsilon \tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{IV} \cdot \left(\dot{\mathbf{e}} - \frac{\sqrt{3} \dot{\xi}_P}{\sqrt{2} \sqrt{\partial F / \partial \mathbf{S}} \cdot \partial F / \partial \mathbf{S}} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right) \quad (3.8)$$

Исходя из уравнений состояния (2.35), можно получить и другие определяющие уравнения упругопластичности. Выбирая, например, второе уравнение из этого списка, получаем вместо (3.4):

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\kappa_2} - \varepsilon (\mathbf{e}_E - \mathbf{d}_E) \cdot \mathbf{T}_{\kappa_2} - \varepsilon \mathbf{T}_{\kappa_2} \cdot (\mathbf{e}_E + \mathbf{d}_E) + \varepsilon \tilde{\mathbf{L}}_{3E}^{IV} \cdot \mathbf{e}_E$$

Заменив здесь тензор \mathbf{T}_{κ_2} его определением (3.3), приходим к следующему выражению:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\kappa_1} - \varepsilon (\mathbf{h}^T - \mathbf{e}_P) \cdot \mathbf{T}_{\kappa_1} - \varepsilon \mathbf{T}_{\kappa_1} \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{e}_P) + \varepsilon \tilde{\mathbf{L}}_{3E}^{IV} \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{e}_P)$$

В эволюционной форме оно примет вид

$$\mathbf{T}_\varepsilon^{CR} \equiv \dot{\mathbf{T}} + \varepsilon \dot{\mathbf{h}}^T \cdot \mathbf{T}_{\kappa_1} + \varepsilon \mathbf{T}_{\kappa_1} \cdot \dot{\mathbf{h}} = \varepsilon (\dot{\mathbf{e}}_P \cdot \mathbf{T}_{\kappa_1} + \mathbf{T}_{\kappa_1} \cdot \dot{\mathbf{e}}_P + \tilde{\mathbf{L}}_{3E}^{IV} \cdot (\dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{e}}_P))$$

и, подставляя сюда соотношение (3.7), получаем еще одну форму уравнения состояния для больших упругопластических деформаций

$$\mathbf{T}_\varepsilon^{CR} = \varepsilon \frac{\sqrt{3} \dot{\xi}_P}{\sqrt{2} \sqrt{\partial F / \partial \mathbf{S}} \cdot \partial F / \partial \mathbf{S}} \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \cdot \mathbf{T}_{\kappa_1} + \mathbf{T}_{\kappa_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} - \tilde{\mathbf{L}}_{3E}^{IV} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right) + \varepsilon \tilde{\mathbf{L}}_{3E}^{IV} \cdot \dot{\mathbf{e}} \quad (3.9)$$

Таким образом, соотношение (3.8) (или (3.9)) описывает активный процесс нагружения ($F = 0$, $dF = 0$, $(\partial F / \partial \mathbf{S}) \cdot \partial \mathbf{S} > 0$), а (2.34) (или второе уравнение (2.35)), где \mathbf{d} , \mathbf{e} и \mathbf{h} – упругие малые поворот, деформация и градиент перемещения относительно промежуточной конфигурации – нейтральное нагружение, разгрузку из упругопластического состояния или пассивное (продолжающееся упругое) нагружение ($F = 0$, $dF = 0$, $(\partial F / \partial \mathbf{S}) \cdot \partial \mathbf{S} \leq 0$ или $F < 0$).

Конкретизируем теперь функцию текучести F , задав ее в простейшем виде

$$F(\mathbf{S}, q) = \sigma_i^2 - \sigma_T^2(q), \quad \sigma_i = \sqrt{(\frac{3}{2})(\mathbf{S} \cdot \mathbf{S})}$$

где σ_i – интенсивность напряжений и σ_T – предел текучести. Тогда $\partial F / \partial \mathbf{S} = (\frac{3}{2}) \partial(\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}) / \partial \mathbf{S} = 3\mathbf{S}$, $\dot{\epsilon}_p$ (выражение (3.7)) принимает известный вид $\dot{\epsilon}_p = (\frac{3}{2})(\dot{\xi}_p / \sigma_i)\mathbf{S}$, выбранная функция текучести удовлетворяет одному из следствий постулата Друккера, а именно $(\partial F / \partial \mathbf{S}) \cdot \dot{\epsilon}_p \geq 0$ и соотношения

$$\sigma_i = \sigma_T, \quad \dot{\sigma}_i = (\partial \sigma_T / \partial q) \dot{q}, \quad \dot{\sigma}_i > 0 \quad (3.10)$$

$$\sigma_i = \sigma_T, \quad \dot{\sigma}_i = (\partial \sigma_T / \partial q) \dot{q}, \quad \dot{\sigma}_i \leq 0 \text{ и } \sigma_i < \sigma_T$$

определяют активное нагружение (первая строка), нейтральное нагружение или разгрузку из упругопластического состояния (три первых соотношения во второй строке) и пассивное (продолжающееся упругое) нагружение (последнее неравенство во второй строке).

Из гипотезы единой кривой следует $\sigma_i = \Theta(\xi_p)$, откуда

$$\dot{\sigma}_i = \frac{\partial \Theta(\xi_p)}{\partial \xi_p} \dot{\xi}_p = H(\xi_p) \dot{\xi}_p \quad (3.11)$$

Разрешая это равенство относительно $\dot{\xi}_p$ и подставляя его в выражение для $\dot{\epsilon}_p$, получаем

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{3\dot{\sigma}_i}{2H\sigma_i} \mathbf{S} \quad (3.12)$$

Для выбранного закона пластического течения конкретизируются теперь и соотношения (3.8) и (3.9)

$$\mathbf{T}_e^J = \varepsilon \tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{IV} \cdot \left(\dot{\epsilon} - \frac{3\dot{\sigma}_i}{2H\sigma_i} \mathbf{S} \right) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{T}_e^{CR} = \varepsilon \tilde{\mathbf{L}}_{3E}^{IV} \cdot \dot{\epsilon} + \varepsilon \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}_i}{H\sigma_i} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}_{\kappa_1} + \mathbf{T}_{\kappa_1} \cdot \mathbf{S} - \tilde{\mathbf{L}}_{3E}^{IV} \cdot \mathbf{S}) \quad (3.14)$$

Эти соотношения справедливы для активного процесса упругопластического нагружения с любым уравнением состояния для конечных упругих деформаций. Выберем в качестве последнего упрощенный закон Синьорини [10]:

$$\mathbf{T}_E = [\lambda j_1 + (\lambda + G) j_1^2 / 2] \mathbf{g} + 2[G - (\lambda + G) j_1] \mathbf{A}_E \quad (3.15)$$

где λ и G – материальные константы, а j_1 – первый инвариант тензора упругих деформаций Альманзи \mathbf{A}_E , и определим для него функции отклика материала $\tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{IV}$ и $\tilde{\mathbf{L}}_{3E}^{IV}$.

Учитывая, что тензор деформаций Альманзи $\mathbf{A} = (\mathbf{g} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1})/2$, и используя выражение (2.31), получаем

$$\mathbf{A}_E = \hat{\mathbf{A}}_E + \varepsilon \mathbf{e}_E - \varepsilon \mathbf{h}_E^T \cdot \hat{\mathbf{A}}_E - \varepsilon \hat{\mathbf{A}}_E \cdot \mathbf{h}_E, \quad j_1(\mathbf{A}_E) = j_{10} + \varepsilon (\mathbf{g} - 2\hat{\mathbf{A}}_E) \cdot \mathbf{e}_E \quad (3.16)$$

где $\hat{\mathbf{A}}_E$ – тензор Альманзи в промежуточной конфигурации κ_1 и $j_{10} = j_1(\hat{\mathbf{A}}_E)$. Подставляя эти выражения в упрощенный закон Синьорини (3.15), получаем, опуская параметр ε :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_E &= \hat{\mathbf{T}}_E - \mathbf{h}_E^T \cdot \hat{\mathbf{T}}_E - \hat{\mathbf{T}}_E \cdot \mathbf{h}_E + [2G(1 - j_{10}) + (\lambda + G) j_{10}^2] \mathbf{e}_E + \\ &+ \{[\lambda + (\lambda + G) j_{10}] \mathbf{g} (\mathbf{g} - 2\hat{\mathbf{A}}_E) - 2(\lambda + G) \hat{\mathbf{A}}_E (\mathbf{g} - 2\hat{\mathbf{A}}_E)\} \cdot \mathbf{e}_E \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $\hat{\mathbf{T}}_E$ определяется соотношением (3.15), аргументом у которого является тензор $\hat{\mathbf{A}}_E$. Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}_{3E}^{IV} = & [2G(1 - j_{10}) + (\lambda + G)j_{10}^2] \mathbf{C}_{II}^{IV} + \\ & + \{[\lambda + (\lambda + G)j_{10}] \mathbf{g}(\mathbf{g} - 2\hat{\mathbf{A}}_E) - 2(\lambda + G)\hat{\mathbf{A}}_E(\mathbf{g} - 2\hat{\mathbf{A}}_E)\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Вспомяная связь между \mathbf{h} , \mathbf{e} и \mathbf{d} , из выражения (3.17) получаем

$$\tilde{\mathbf{L}}_{1E}^{IV} = \tilde{\mathbf{L}}_{3E}^{IV} - \hat{\mathbf{T}}_E \cdot \mathbf{C}_{II}^{IV} - \mathbf{C}_{II}^{IV} \cdot \hat{\mathbf{T}}_E \quad (3.19)$$

Теперь соотношения (3.18), (3.19) позволяют конкретизировать определяющие уравнения (3.13) и (3.14) и описать конечные упругопластические деформации с большими упругими деформациями, подчиняющимися упрощенному закону Синьори-ни, и большими пластическими деформациями, удовлетворяющими закону Прандтля-Рейсса

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_E^J = & 2[G - (\lambda + G)j_{10}] \left[\left(\dot{\mathbf{e}} - \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}_i}{H\sigma_i} \mathbf{S} \right) - \hat{\mathbf{A}}_E \cdot \left(\dot{\mathbf{e}} - \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}_i}{H\sigma_i} \mathbf{S} \right) - \left(\dot{\mathbf{e}} - \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}_i}{H\sigma_i} \mathbf{S} \right) \cdot \hat{\mathbf{A}}_E \right] + \\ & + \{[\lambda + (\lambda + G)j_{10}] \mathbf{g}(\mathbf{g} - 2\hat{\mathbf{A}}_E) - 2(\lambda + G)\hat{\mathbf{A}}_E(\mathbf{g} - 2\hat{\mathbf{A}}_E)\} \cdot \left(\dot{\mathbf{e}} - \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}_i}{H\sigma_i} \mathbf{S} \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_E^{CR} = & \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}_i}{H\sigma_i} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}_{\kappa_1} + \mathbf{T}_{\kappa_1} \cdot \mathbf{S}) + [2G(1 - j_{10}) + (\lambda + G)j_{10}^2] \left(\dot{\mathbf{e}} - \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}_i}{H\sigma_i} \mathbf{S} \right) + \\ & + \{[\lambda + (\lambda + G)j_{10}] \mathbf{g}(\mathbf{g} - 2\hat{\mathbf{A}}_E) - 2(\lambda + G)\hat{\mathbf{A}}_E(\mathbf{g} - 2\hat{\mathbf{A}}_E)\} \cdot \left(\dot{\mathbf{e}} - \frac{3}{2} \frac{\dot{\sigma}_i}{H\sigma_i} \mathbf{S} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

В этих соотношениях $\hat{\mathbf{A}}_E, \mathbf{T}_{\kappa_1}$ – тензоры упругих деформаций Альманзи и накопленных напряжений в конфигурации κ_1 (напряжения предыдущего шага нагружения). Последние могут быть найдены и из упругого закона (3.15) при $\mathbf{A}_E = \hat{\mathbf{A}}_E$. Производную $\dot{\sigma}_i$ можно определить через \mathbf{S} , $\dot{\mathbf{e}}$ и $\hat{\mathbf{A}}_E$. Замечая, что $\mathbf{T}^J = (\frac{1}{3})I_1(\dot{\mathbf{T}})\mathbf{g} + \mathbf{S}^J$, имеем

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}_E^J = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}_E^J = (\frac{2}{3})\sigma_i \dot{\sigma}_i, \quad \mathbf{S}_E^J = \dot{\mathbf{S}} - \varepsilon \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{S}} + \varepsilon \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{d} \quad (3.22)$$

Подставляя в соотношение (3.22) выражение для \mathbf{T}_E^J , получаем линейное уравнение относительно $\dot{\sigma}_i$, решением которого будет

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_i = & 3H\sigma_i \times \\ & \times \frac{[G - (\lambda + G)j_{10}](\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{e}} - 2\mathbf{S} \cdot (\hat{\mathbf{A}}_E \cdot \dot{\mathbf{e}})) - (\lambda + G)(I_1(\dot{\mathbf{e}}) - 2\hat{\mathbf{A}}_E \cdot \dot{\mathbf{e}})(\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{A}}_E)}{H\sigma_i^2 - [G - (\lambda + G)j_{10}](9\mathbf{S} \cdot (\hat{\mathbf{A}}_E \cdot \mathbf{S}) - 3\sigma_i^2) + 9(\lambda + G)(\hat{\mathbf{A}}_E \cdot \mathbf{S})^2} \end{aligned}$$

В случае малых упругих деформаций, когда $\hat{\mathbf{A}}_E$ имеет тот же порядок малости, что и \mathbf{e} или $\dot{\mathbf{e}}$, из последнего выражения получаем с точностью до членов первого порядка малости

$$\dot{\sigma}_i = \frac{3GH}{\sigma_i(H + 3G)} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{e}}$$

и соотношение (3.20) сводится к известному уравнению (см., например, [19]–[21]):

$$\mathbf{T}_E^J = \lambda I_1(\dot{\mathbf{e}})\mathbf{g} + 2G\dot{\mathbf{e}} - 2GMS \frac{\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{e}}}{\sigma_i^2}, \quad M = \frac{9G}{2(H + 3G)} \quad (3.23)$$

Таким образом, для активного процесса упругопластического нагружения, т.е. когда выполняются соотношения, записанные в первой строке формул (3.10), уравнениями состояния являются эволюционные уравнения (3.20) или (3.21) ((3.23) при малых упругих деформациях). При этом изменение объема материала является чисто упругим. Последнее есть следствие соотношений (3.12) и (2.32). Из первого вытекает, что ϵ_p – девиатор (так как \mathbf{S} – девиатор), а из второго, так как $\mathbf{e} = \mathbf{e}_E + \epsilon_p$, что относительное изменение объема $J = \hat{J}(1 + \epsilon I_1(\mathbf{e}_E))$ есть функция только упругих деформаций.

При нейтральном нагружении, разгрузке из упругопластического состояния или пассивном (продолжающемся упругом) нагружении, условия осуществления которых определяются соотношениями второй строки (3.10), определяющим уравнением является уравнение (3.17).

В заключение этого раздела покажем, что полученные определяющие уравнения удовлетворяют термодинамическому неравенству Клаузиуса–Дюгема [1, 3, 4] $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \rho \dot{\Psi} \geq 0$ для изотермического процесса, где ρ – плотность материала в текущей конфигурации, Ψ – свободная энергия единицы массы в текущей конфигурации и $\mathbf{D} = (\mathbf{1} + \mathbf{1}^T)/2$. В свою очередь $\mathbf{1} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$. Подставляя сюда выражения (2.9) и (2.31), получаем с точностью до линейных членов по ϵ , что $\mathbf{1} = \epsilon \mathbf{h}$, где $\mathbf{h} = (\hat{\mathbf{V}}\mathbf{u})^T = (\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{u}_E + \mathbf{u}_p))^T = \mathbf{h}_E + \mathbf{h}_p$. Таким образом $\mathbf{D} = \epsilon(\dot{\mathbf{e}}_E + \dot{\epsilon}_p)$.

Следуя работам [22, 23], полагаем свободную энергию функцией только упругой деформации Коши–Грина

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi(\mathbf{E}_E) = \Psi(\hat{\mathbf{E}}_E + \epsilon \hat{\mathbf{F}}_E^T \cdot \epsilon_E \cdot \hat{\mathbf{F}}_E) = \\ &= \Psi(\hat{\mathbf{E}}_E) + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}_E} \right|_{\mathbf{E}_E = \hat{\mathbf{E}}_E} \cdot (\hat{\mathbf{F}}_E^T \cdot \epsilon \epsilon_E \cdot \hat{\mathbf{F}}_E) \end{aligned}$$

где для получения \mathbf{E}_E использовано соотношение (2.13). Далее

$$\dot{\Psi} = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}_E} \right|_{\mathbf{E}_E = \hat{\mathbf{E}}_E} \cdot (\hat{\mathbf{F}}_E^T \cdot \epsilon \dot{\epsilon}_E \cdot \hat{\mathbf{F}}_E) = \left(\hat{\mathbf{F}}_E \cdot \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}_E} \right|_{\mathbf{E}_E = \hat{\mathbf{E}}_E} \cdot \hat{\mathbf{F}}_E^T \right) \cdot \epsilon \dot{\epsilon}_E$$

С учетом (2.33), $\rho = \rho_0 \hat{J}^{-1}(1 - \epsilon I_1(\mathbf{e}_E))$, где ρ_0 – плотность материала в начальной конфигурации. Принимая во внимание что $\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}} + \epsilon \mathbf{t}$, где второе слагаемое есть приращение напряжений, и подставляя выражения для \mathbf{D} , $\dot{\Psi}$ и ρ в неравенство Клаузиуса–Дюгема, получаем, удерживая только члены первого порядка малости

$$\left(\hat{\mathbf{T}} - \hat{J}^{-1} \rho_0 \hat{\mathbf{F}}_E \cdot \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}_E} \right|_{\mathbf{E}_E = \hat{\mathbf{E}}_E} \cdot \hat{\mathbf{F}}_E^T \right) \cdot \dot{\epsilon}_E + \hat{\mathbf{T}} \cdot \dot{\epsilon}_p \geq 0$$

Откуда обычным анализом приходим к двум соотношениям для промежуточной конфигурации

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{J}^{-1} \rho_0 \hat{\mathbf{F}}_E \cdot \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}_E} \right|_{\mathbf{E}_E = \hat{\mathbf{E}}_E} \cdot \hat{\mathbf{F}}_E^T, \quad \hat{\mathbf{T}} \cdot \dot{\epsilon}_p \geq 0$$

В текущей конфигурации они принимают известный вид

$$\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F}_E \cdot \left. \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}_E} \right|_{\mathbf{E}_E = \hat{\mathbf{E}}_E} \cdot \mathbf{F}_E^T, \quad \mathbf{T} \cdot \dot{\epsilon}_p \geq 0$$

где $W = \rho_0 \Psi$ – упругий потенциал на единицу недеформированного объема, из которого и получен используемый в этом разделе закон Синьорини. Закон же пластического течения (3.7) удовлетворяет, как известно, неравенству $\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{e}}_p \geq 0$.

4. Результаты решения упругопластической задачи. Используя определяющие уравнения (3.20), (3.21) и (3.23), рассматривалась упругопластическая задача о простом сдвиге при сжатии

$$\mathbf{R} = (x_1 + stx_2)\mathbf{i} + (1 - \alpha t)x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \quad (4.1)$$

где s, α – скорости сдвига и осадки, t – время. Так как в данном процессе поля деформаций и напряжений однородные, нет необходимости ставить краевую задачу, что значительно упрощает алгоритм решения, сводя его к следующему. Разбивая заданную кинематику на последовательность достаточно малых шагов, определяем из (4.1) приращение перемещений $\mathbf{u} = s(t-t_0)x_2\mathbf{i} - \alpha(t-t_0)x_2\mathbf{j}$ при переходе из промежуточной конфигурации, определяемой моментом времени t_0 , в текущую t , основной и взаимный базисы в этих конфигурациях, оператор Гамильтона в промежуточной конфигурации

$$\hat{\nabla} = \left(\mathbf{i} - \frac{st_0}{1-\alpha t_0} \mathbf{j} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{1-\alpha t_0} \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

тензоры

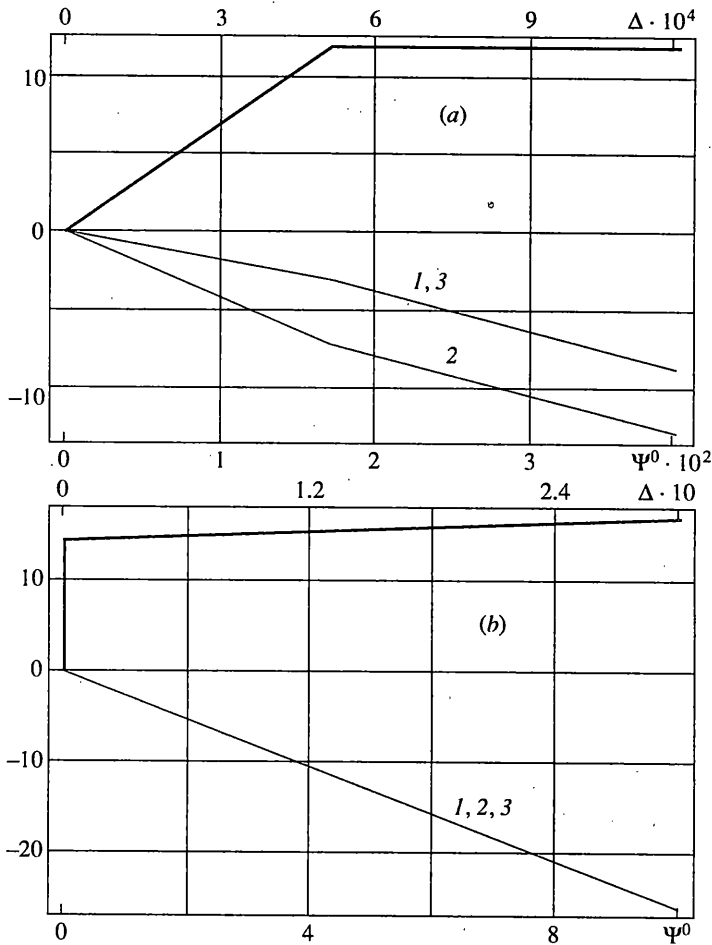
$$\mathbf{h} = (\hat{\nabla} \mathbf{u})^T = \frac{s(t-t_0)}{1-\alpha t_0} \mathbf{ij} - \frac{\alpha(t-t_0)}{1-\alpha t_0} \mathbf{jj}$$

(см. (2.8)) и малых деформаций и поворотов

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} \frac{s(t-t_0)}{1-\alpha t_0} (\mathbf{ij} + \mathbf{ji}) - \frac{\alpha(t-t_0)}{1-\alpha t_0} \mathbf{jj}, \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2} \frac{s(t-t_0)}{1-\alpha t_0} (\mathbf{ij} - \mathbf{ji})$$

Из (3.16) определяем тензор упругих деформаций Альманзи \mathbf{A}_E и по соотношению (3.15) находим тензор истинных напряжений \mathbf{T} . Если σ_i становится больше σ_T , переходим, учитывая выражение для $\hat{\sigma}_i$, к соотношению (3.20) (или (3.21)). Интегрируя его по малому промежутку времени $\delta t = t - t_0$, получаем тензорное уравнение относительно \mathbf{T} . Для решения этого тензорного уравнения (или 6 скалярных уравнений для координатных составляющих) использовалось два подхода. В первом величины, присутствующие в правой части в конфигурации t , представлялись через их значения в конфигурации t_0 плюс приращения за промежуток времени δt , и решение уравнения (3.20) свелось к решению системы 6-ти линейных алгебраических уравнений с 6-ью неизвестными приращениями составляющих тензора истинных напряжений \mathbf{T} . Во втором подходе в правой части тензорного уравнения оставались члены того же порядка малости, что и в левой части. Это позволило, не переходя к системе уравнений, сразу записать выражения для приращений составляющих тензора напряжений, что, конечно же, предпочтительнее. Результаты этих двух подходов оказались идентичными для достаточно малого δt .

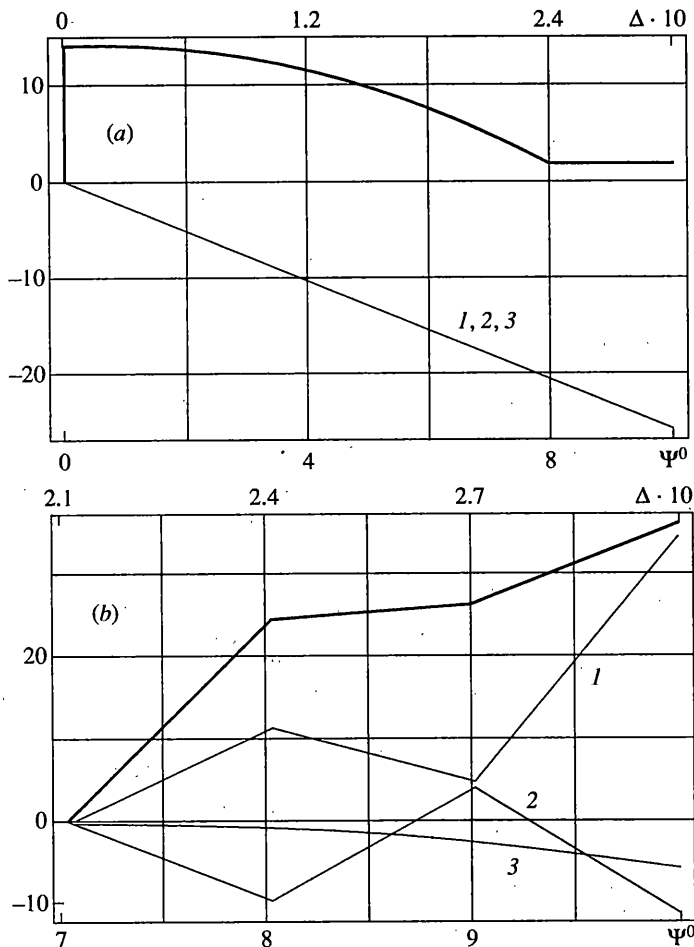
Определив удовлетворяющий поверхности текучести (это контролировалось точностью выполнения соотношения (3.11)) тензор истинных напряжений \mathbf{T} на данном шаге деформирования, необходимо по соотношению (3.16) найти тензор упругих деформаций Альманзи $\hat{\mathbf{A}}_E$, входящий в уравнение (3.20) как начальный для следующего шага деформирования. Т.е. необходимо найти тензор \mathbf{h}_E , составляющие которого можно определить тоже двумя способами. В первом использовалось соотношение (3.17), \mathbf{T}_E и $\hat{\mathbf{T}}_E$, в котором полагались равными истинным напряжениям \mathbf{T}



Фиг. 2

текущего и предыдущего шага, полученным из решения уравнения (3.20). В результате получали систему 9-ти линейных алгебраических уравнений для определения 9-ти составляющих тензора \mathbf{h} . Но, как показали численные эксперименты, система оказалась плохо обусловленной и для ее решения необходимо было привлекать известные методы регуляризации. Во втором способе из уравнения (3.12) сразу определяли тензор пластических деформаций \mathbf{e}_p , а тензор пластических вращений \mathbf{d}_p находился из соотношения (3.3), в котором напряжения \mathbf{T}_{x_1} и \mathbf{T}_{x_2} — это напряжения текущего и предыдущего шага, полученные из (3.20). В результате приходим к системе для определения трех неизвестных составляющих кососимметричного тензора \mathbf{d}_p (диагональные составляющие его равны нулю). Зная теперь из кинематики полные тензоры деформаций \mathbf{e} и вращений \mathbf{d} , определяли $\mathbf{e}_E = \mathbf{e} - \mathbf{e}_p$ и $\mathbf{d}_E = \mathbf{d} - \mathbf{d}_p$, а, значит, и тензор \mathbf{h} .

Исследовался процесс деформирования меди при простом сдвиге с осадкой. Параметры материала полагались равными: $\lambda = 6 \cdot 10^4$ МПа, $G = 4 \cdot 10^4$ МПа, $\sigma_T = 20$ МПа, а модуль пластического упрочнения $H = 50$ МПа. Скорость сдвига $s = \pi/18$, скорость осадки $\alpha = 3 \cdot 10^{-4}$, δt полагалось равным 10^{-3} . Уругопластический процесс рассчитывался по соотношениям (3.20), (3.21) и, так как материал — металл (упругие деформации малы), по соотношениям (3.23). При этом использовались как



Фиг. 3

согласованные (вытекающие из теории и присутствующие в этих уравнениях) коротационные производные (фиг. 2), так и не согласованная производная Олдройда (фиг. 3). Нижняя шкала на этих фигурах – угол сдвига Ψ , в градусах, верхняя – осадка Δ , в процентах. Все напряжения приведены в МПа: T^{12} – полужирная линия, T^{11} – кривая 1, T^{22} – кривая 2 и T^{33} – кривая 3. Результаты расчетов при использовании уравнений (3.20), (3.21) и (3.23) с согласованными производными полностью совпали и приведены на фиг. 2, а – для начального (в основном упругого) этапа нагружения и (б) – для последующего упругопластического процесса, в конце которого максимальная главная деформация Коши–Грина достигала по модулю 9.5%. На фиг. 2, а показаны нормальные напряжения $T^{11} \cdot 10$, $T^{22} \cdot 10$ и $T^{33} \cdot 10$. Эти же напряжения на фиг. 2, б даны в масштабе $T^{11} \cdot 10^{-1}$, $T^{22} \cdot 10^{-1}$ и $T^{33} \cdot 10^{-1}$. Относительная невязка удовлетворения соотношения (3.11) составляла менее $6 \cdot 10^{-3}\%$ для выражений (3.20) и (3.23) и около 2% для выражения (3.21).

На фиг. 3, а приведены в том же масштабе, что и на фиг. 2, б, результаты расчета рассматриваемого процесса по соотношениям (3.23), но с коротационной производной Олдройда. Нормальные напряжения не изменились, в то время как составляющая T^{12} монотонно убывает, что совершенно не физично. К тому же соотношение (3.11)

совершенно не удовлетворяется. Использование соотношения (3.20) с коротационной производной Олдройда дает до угла сдвига $\Psi = 7^\circ$ те же результаты. Осцилляции, возникающие при $\Psi > 7^\circ$, показаны на фиг. 3, в, где все напряжения даны в масштабе $T \cdot 10^{-3}$.

5. Заключение. Основные моменты изложенного выше подхода к построению непротиворечивого (термодинамике, принципу объективности, композиции градиентов места) уравнения состояния упругопластичности при конечных деформациях следующие.

Кинематика процесса деформирования трактуется как переход из промежуточной конфигурации с известным напряженно-деформированным состоянием в достаточно близкую текущую, т.е. как наложение (композиция) малых деформаций на конечные. По-видимому, любой процесс деформирования допускает такую трактовку: все зависит от масштаба времени осуществления процесса.

Этот переход определяется через полные малые деформации и вращения относительно промежуточной конфигурации, являющиеся простой суперпозицией (суммой) частных малых деформаций и вращений, отвечающих за проявление различных свойств сложной среды, например, упругих и пластических. На языке имитационных (механических) моделей, которые полезны для объяснения явления и кинематика которых должна теперь определяться композицией соответствующих градиентов места, это означает последовательное соединение упругого и пластического элементов. В силу малого отличия промежуточной и текущей конфигураций порядок действия этих частных деформаций и вращений безразличен.

Осуществляя малую упругую разгрузку из текущей конфигурации в конфигурацию κ с напряжениями T_0 , равными по модулю (в смысле соотношений (2.37)) напряжениям \hat{T} промежуточной конфигурации, приходим к соотношению $T_0 = \hat{T} + d \cdot \hat{T} - \hat{T} \cdot d$, где d – сумма всех малых частных вращений, кроме упругого. Поэтому определяющее уравнение сложной среды (может быть эволюционное) трактуется как уравнение состояния упругой среды с начальными напряжениями T_0 и функцией отклика упругого материала, зависящей от упругой кинематики, достигнутой в конфигурации κ , и действующей на малые упругие деформации, переводящие конфигурацию κ в текущую: $T = T_0 + d_E \cdot \hat{T} - \hat{T} \cdot d_E + \tilde{L}_E^{IV}(\hat{U}_E) \cdot e_E$.

Определяя малую пластическую деформацию (скорость) своим уравнением состояния (через напряжение T в силу последовательного соединения упругого и пластического элементов), представляя малую упругую деформацию (или ее скорость) разностью малых полной и пластической деформаций (их скоростей), замыкаем определяющее уравнение предыдущего пункта.

Работа выполнена в Институте механики сплошных сред УрО РАН при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 01-01-96494).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации. М.: Наука, 1986. 232 с.
2. Бровко Г.Л. Некоторые подходы к построению определяющих соотношений пластичности при больших деформациях // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 68–81.
3. Труделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
4. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
5. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987. 231 с.
6. Palmov V.A. Large strains in viscoelastoplasticity // Acta Mechanica. 1997. V. 125. P. 129–139.
7. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. М.: ГИФМЛ, 1962. 284 с.

8. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Издан. второе, исправл. и дополн. Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.
9. *Lee E.H.* Elastic-plastic deformation at finite strains // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1969. V. 36. № 1. P. 1–6.
10. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
11. *Никитин Л.В.* Об анизотропии упругой среды с начальными напряжениями // *Изв. АН СССР. Физика Земли.* 1983. № 12. С. 29–33.
12. *Астарита Дж., Марруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
13. *Szabo L., Balla M.* Comparison of some stress rates // *Intern. J. Solids Struct.* 1989. V. 25. № 3. P. 279–297.
14. *Кондауров В.И.* Уравнения релаксационного типа для вязко-упругих сред с конечными деформациями // *ПММ.* 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 791–800.
15. *Никитин Л.В.* Направления развития моделей упруговязкопластических тел // *Механика и научно-технический прогресс.* Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. С.136–153.
16. *Кондауров В.И., Никитин Л.В.* Конечные деформации вязкоупругих мышечных тканей // *ПММ.* 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 443–452.
17. *Rogovoy A.A.* Large elastic-plastic deformations in the technological process of rotary forming of cylindrical workpieces // *Metallurgy and Foundry Engineering.* 1994. V. 20. № 3. P. 343–350.
18. *Rogovoy A.A.* The finite elasto-plastic deformations in the technological process of rotary forming of cylindrical workpieces // *Proc. Intern. Conf. Mechan. Solids and Mater. Eng.* 1995. V. B. (Mechanics of Structures). Singapore: 1995. Nanyang Technol. Univ. P. 556–561.
19. *Bathe K.-J., Ozdemir H.* Elastic-plastic large deformation static and dynamic analysis // *Comput. Struct.* 1976. V. 6. № 2. P. 81–92.
20. *Lubarda V.A., Lee E.H.* A correct definition of elastic and plastic deformation and its computational significance // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1981. V. 48. № 1. P. 35–40.
21. *McMeeking R.M., Rice J.R.* Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation // *Intern. J. Solids Struct.* 1975. V. 11. № 5. P. 601–616.
22. *Kondaurov V.I., Kukudjanov V.N.* On constitutive equations and numerical solution of the multidimensional problems of the dynamics of nonisothermic elastic-plastic media with finite deformations // *Arch. Mech.* 1979. V. 31. № 5. P. 623–647.
23. *Кукуджанов В.Н.* Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред // *Успехи механики.* 1985. Т. 8. Вып. 4. С. 21–65.

Пермь

Поступила в редакцию
26.03.1999