

УДК 539.3

© 2002 г. Д.Л. БЫКОВ, Д.Н. КОНОВАЛОВ

НЕЛИНЕЙНАЯ ЭНДОХРОННАЯ ТЕОРИЯ СТАРЕЮЩИХ ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Рассматривается обобщение нелинейной теории термовязкоупругости, позволяющее учитывать процессы старения, имеющие как механическую, так и немеханическую природу. Отличие этой теории от других нелинейных вариантов теории вязкоупругости [1] заключается в ее связи с механической моделью Максвелла, характеристики которой зависят от параметров, описывающих различные процессы нагружения и разгрузки, деформирования и накопления повреждений материала. Использование большого количества элементарных моделей такого типа позволяет с любой точностью аппроксимировать ядра релаксации суммой экспоненциальных функций. Зависимость коэффициентов вязкости в максвелловских моделях от указанных параметров приводит к эндохронной теории вязкоупругости, а аналогичная зависимость упругих характеристик этих моделей меняет чисто эндохронный вид теории, позволяя учитывать старение материалов. Именно такой подход и принят в настоящей работе. Рассмотрены вопросы, связанные с идентификацией материальных функций предложенной теории.

Использование модели Максвелла в качестве базовой позволяет анализировать структуру удельной работы внутренних сил при любых параметрах нелинейности. Существенное значение имеет представление удельной работы внутренних сил в виде суммы отдельных составляющих, имеющих ясный физический смысл: мгновенно- и замедленно-обратимых упругих энергий, рассеянной энергии, энергий механического и химического старения и удельной работы напряжений на температурных деформациях материала. Все перечисленные составляющие могут использоваться для описания различных процессов, происходящих в стареющих вязкоупругих материалах.

Предложен вариант кинетического уравнения для удельной поглощенной энергии, которая представляет собой часть рассеянной энергии, связанную с изменением структуры материала (накоплением повреждений). С использованием удельной поглощенной энергии сформулирован критерий длительной прочности. Применение этого критерия к процессу двухступенчатой ползучести наполненного полимерного материала позволило описать наблюдаемые в опытах особенности изменения остаточной долговечности материала.

1. Введение. Математическое моделирование сопротивления вязкоупругих материалов имеет фундаментальное значение для развития методов расчета прочности современных конструкций. Оно тесно связано с математическим аппаратом, который можно использовать для описания зависимостей между напряженно-деформированным состоянием, температурой и временем с учетом возможного влияния физических полей и химических реакций, протекающих в исследуемых материалах.

Ниже излагается вариант нелинейной теории термовязкоупругости, ориентированный в первую очередь на изотропные квазигомогенные наполненные полимерные материалы с высоким содержанием жестких малоразмерных частиц. Адгезионная прочность подобных материалов не допускает высоких предельных деформаций, что учитывается в рассматриваемой теории. Физически нелинейные свойства описывают-

ся обобщенной моделью Максвелла, позволяющей наглядно представить механизм вязкоупругого деформирования и структуру удельной работы внутренних сил.

В отличие от чисто эндохронной теории [2, 3], где нелинейность проявляется только через зависимость вязких свойств материала от его напряженно-деформированного состояния, температуры и параметра поврежденности, в рассматриваемом варианте теории от указанных величин могут зависеть как вязкие, так и мгновенно-упругие свойства материала. Это обобщение эндохронной теории делает ее пригодной для описания процессов старения вязкоупругих материалов.

Идентификация материальных констант и функций излагаемой теории существенно опирается на иерархическую структуру ее определяющих уравнений [4]. Наряду с традиционно используемыми в линейной теории ядрами релаксации здесь вводятся новые материальные функции: приведенные времена и функции старения. Для идентификации этих функций, как функций параметров состояния, предложено использовать двухуровневую схему обработки результатов базовых экспериментов. На первом уровне определяются зависимости этих функций от истинного времени, а на втором – для каждой материальной функции определяется набор параметров состояния и ее зависимость от этих параметров из условия наилучшего приближения соответствующих временных зависимостей, полученных на первом уровне обработки. Ниже приводятся примеры идентификации теории и указывается связь между названными материальными функциями и составляющими удельной работы внутренних сил.

2. Определяющие уравнения. Приведем конструктивный вывод определяющих уравнений в соответствии с их иерархической структурой, включающей три уровня детализации связи между параметрами напряженно-деформированного состояния [4]. На первом уровне связь между напряжениями и деформациями представляется с помощью тензорнолинейных обобщенных операторов Больцмана – Вольтерра

$$\sigma(t) = \varphi_1(t) \int_0^t K[t_1(t) - t_1(\tau)] d[\theta(\tau) - \theta_T(\tau)]$$

$$S_{ij}(t) = 2\varphi_2(t) \int_0^t G[t_2(t) - t_2(\tau)] d\mathcal{E}_{ij}(\tau) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

$$\sigma = \sigma_{ij} / 3, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad \theta = \varepsilon_{ij}, \quad \mathcal{E}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \theta / 3, \quad \theta_T = 3\alpha \Delta T$$

$$K(t) = \sum_{m=1}^M K_m e^{-t/\eta_m} + K_{M+1}, \quad G(t) = \sum_{n=1}^N G_n e^{-t/\tau_n} + G_{N+1} \quad (2.2)$$

Здесь σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно; S_{ij} , $\mathcal{E}_{ij}$ – компоненты девиаторов этих тензоров; σ – среднее напряжение; θ – объемная деформация; θ_T – объемная деформация свободного температурного расширения; α – коэффициент линейного температурного расширения; ΔT – перепад между эксплуатационной $T(t)$ и равновесной T_0 температурами; $K(t)$, $G(t)$ – ядра объемной и сдвиговой релаксации соответственно; $K_1, \dots, K_{M+1}$, $\eta_1, \dots, \eta_M$, $G_1, \dots, G_{N+1}$, $\tau_1, \dots, \tau_N$ – набор неотрицательных параметров ядер; $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – функции старения; $t_1(t)$, $t_2(t)$ – приведенные времена; δ_{ij} – символ Кронекера; по повторяющимся индексам i, j здесь и в дальнейшем ведется суммирование от 1 до 3.

Использование приведенных времен в определяющих соотношениях является весьма распространенным и эффективным математическим приемом, позволяющим описать как влияние различных внешних факторов (температуры, влажности, дозы облучения и т.п.) на вязкоупругие свойства, так и собственно нелинейные свойства вязкоупругих материалов.

Нетрудно видеть, что каждому из уравнений (2.1) соответствует структурная модель в виде системы параллельно соединенных одномерных стареющих вязкоупругих

элементов типа "пружина – демпфер", причем синхронное изменение коэффициентов жесткости упругих элементов описывается функциями $\varphi_k(t)$, а синхронное изменение коэффициентов вязкости демпфирующих элементов – функциями $\varphi_k(t)[dt_k(t)/dt]^{-1}$ ($k = 1$ для модели, соответствующей первому уравнению (2.1), и $k = 2$ для модели, соответствующей остальным уравнениям этой системы).

В дальнейшем относительно функций старения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и приведенных времен $t_1(t)$, $t_2(t)$ принимаются следующие допущения, которые предполагаются справедливыми при любых процессах деформирования, включая процессы со скачками деформаций: функции старения являются непрерывными положительными функциями времени, принимающими в начальный момент $t = 0$ единичные значения, т.е. $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 1$; приведенные времена являются непрерывными монотонно возрастающими функциями времени, принимающими в начальный момент нулевые значения, т.е. $t_1(0) = t_2(0) = 0$.

Из последнего допущения следует взаимно-однозначное соответствие между истинным (физическим) временем t и приведенными временами t_1 , t_2 ($t = t_K(t_1) = t_G(t_2)$). Здесь функции $t_K(t_1)$, $t_G(t_2)$ соответствуют ядрам $K(t)$ и $G(t)$. С учетом этого соответствия система определяющих соотношений (2.1) может быть представлена в следующем виде:

$$\tilde{\sigma}(t_1) = \int_0^{t_1} K(t_1 - t_*) d[\tilde{\theta}(t_*) - \tilde{\theta}_T(t_*)], \quad \tilde{S}_{ij}(t_2) = 2 \int_0^{t_2} G(t_2 - t_*) d\tilde{S}_{ij}(t_*) \quad (2.3)$$

$$\tilde{\sigma}(t_1) = \sigma[t_K(t_1)] / \varphi_1[t_K(t_1)], \quad \tilde{\theta}(t_1) = \theta[t_K(t_1)], \quad \tilde{\theta}_T(t_1) = 3\alpha\Delta T[t_K(t_1)]$$

$$\tilde{S}_{ij}(t_2) = S_{ij}[t_G(t_2)] / \varphi_2[t_G(t_2)]; \quad \tilde{\mathcal{E}}_{ij}(t_2) = \mathcal{E}_{ij}[t_G(t_2)] \quad (2.4)$$

Из представления (2.3) следует обобщенная (в приведенных временах) обратимость определяющих соотношений (2.1):

$$\tilde{\theta}(t_1) - \tilde{\theta}_T(t_1) = \int_0^{t_1} \Pi_K(t_1 - t_*) d\tilde{\sigma}(t_*), \quad \mathcal{E}_{ij}(t_2) = \int_0^{t_2} \Pi_G(t_2 - t_*) d\tilde{S}_{ij}(t_*) \quad (2.5)$$

где $\Pi_K(t)$, $\Pi_G(t)$ – резольвенты ядер $K(t)$ и $2G(t)$ соответственно.

На втором уровне построения определяющих соотношений вводится гипотеза о том, что мгновенные значения функций старения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и скоростей изменения приведенных времен $dt_1(t)/dt$, $dt_2(t)/dt$ зависят только от мгновенных значений параметров состояния, образующих в общем случае следующие 4 группы:

(1) внешние параметры $p_i^{(e)}(t)$ (температура, влажность, степень полимеризации, концентрация пластификатора, поглощенная доза облучения и т.п.). Предполагается, что эти параметры являются известными функциями времени;

(2) деформационные параметры $p_m^{(e)}(t)$. К числу этих параметров могут относиться инварианты тензора деформаций и их производные по времени, инварианты тензора скоростей деформаций, параметры, характеризующие степень разгрузки материала по деформациям (например, отношение мгновенного значения интенсивности деформаций $\epsilon_u(t)$ к максимальному из ранее достигнутых значений $\epsilon_{\max}(t) = \max \epsilon_u(\tau) : 0 \leq \tau \leq t$) и некоторые другие;

(3) силовые параметры $p_n^{(\sigma)}(t)$. В качестве этих параметров могут выступать инварианты тензора напряжений и их производные по времени, нормированный градиент максимального главного напряжения $|\text{grad}(\sigma_1)|/\sigma_1$, параметры, характеризующие степень разгрузки материала по напряжениям (например, параметр $\sigma_u(t)/[\max \sigma_u(\tau) : 0 \leq \tau \leq t]$, где $\sigma_u(t)$ – интенсивность напряжений) и некоторые

другие. Введение интенсивности напряжений $\sigma_u(t)$ в число параметров, от которых зависит производная dt_1/dt , позволяет описать влияние сдвиговых напряжений на объемные вязкоупругие свойства материала, а введение среднего напряжения σ в число параметров, от которых зависит производная dt_2/dt , позволяет описать влияние гидростатического давления на сдвиговые вязкоупругие свойства материала;

(4) энергетические параметры $p_r^{(A)}(t)$, характеризующие уровни обратимых и необратимых структурных изменений материала в процессе его деформирования (процессы накопления повреждений и заживаемости). Вопросы, связанные с этими параметрами, будут обсуждаться ниже.

Таким образом, на втором уровне построения определяющих соотношений к шести интегральным уравнениям (2.1) добавляются четыре уравнения следующего вида:

$$\begin{aligned}\Phi_k(t) &= F_k[p_l^{(e)}(t), p_r^{(A)}(t)] \quad (k=1, 2) \\ dt_k(t)/dt &= \Phi_k[p_l^{(e)}(t), p_m^{(e)}(t), p_n^{(\sigma)}(t), p_r^{(A)}(t)] \quad (k=1, 2)\end{aligned}\quad (2.6)$$

Деформационные и силовые параметры не включены в число аргументов функций F_1 и F_2 , так как согласно сделанным выше допущениям функции старения $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ должны оставаться непрерывными в точках скачков напряжений и деформаций. Физически это оправдано тем, что состояние "состаренности" материала не может меняться мгновенно. Что касается внешних и энергетических параметров, то аргументами функций F_1 и F_2 могут быть только те из них, которые по своему физическому смыслу являются непрерывными функциями времени.

На третьем уровне построения определяющих соотношений к уравнениям (2.1), (2.6) добавляется система кинетических уравнений для энергетических параметров $p_r^{(A)}(t)$ в следующем виде:

$$\frac{dp_r^{(A)}(t)}{dt} = \hat{P}_r[p_l^{(e)}(\tau), p_m^{(e)}(\tau), p_n^{(\sigma)}(\tau), p_r^{(A)}(\tau)]_{\tau=0}^{\tau=t} \quad (2.7)$$

Вопрос о количестве энергетических параметров и о форме операторов $\hat{P}_r$ может решаться с привлечением моделей микро- и/или мезомеханики применительно к конкретным классам материалов. Например, уровень структурных изменений наполненного полимерного материала может характеризоваться $N_f + 1$ параметрами, где N_f — количество различных фракций наполнителя. В этом случае в качестве энергетических параметров $p_r^{(A)}(t)$ могут использоваться удельные энергии, поглощенные в процессах адгезионного ($n = 1, \dots, N_f$) и когезионного ($n = N_f + 1$) микро-растрескивания. Если же допустить, что процесс структурных изменений может быть описан с достаточной точностью одним энергетическим параметром $A_a(t)$ (в дальнейшем этот параметр будет называться удельной поглощенной энергией), то появляется возможность построения кинетического уравнения типа (2.7) без привлечения моделей микро- или мезомеханики. Именно такой подход используется при построении большинства моделей накопления повреждений, в основу которых положено допущение о возможности описания процесса накопления повреждений с помощью одного, скалярного параметра поврежденности и введен ряд макроскопических гипотез о виде кинетического уравнения для этого параметра [5]. Следует отметить, что одни и те же энергетические параметры могут использоваться как в моделях микро-механики, так и в макромеханических моделях. Поэтому эти параметры образуют естественный "канал" обмена информацией между моделями микро- и макромеханики.

3. Структура удельной работы внутренних сил. Удельная поглощенная энергия. Используя вышеупомянутые структурные модели, соответствующие уравнениям (2.1),

рассмотрим следующие два вида удельной энергии, входящие в состав удельной работы внутренних сил: удельную запасенную энергию $A_e(t)$, равную суммарной упругой энергии, запасенной во всех упругих пружинных элементах этих структурных моделей в момент времени t ; удельную рассеянную энергию $A_*(t)$, равную суммарной энергии, рассеянной во всех вязких элементах к моменту времени t .

Тогда выражение для удельной работы внутренних сил $A(t)$ можно представить в виде четырех слагаемых

$$A(t) = A_T(t) + A_*(t) + A_e(t) + A_c(t) \quad (3.1)$$

Выражения для соответствующих удельных мощностей будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} W(t) &= \frac{dA(t)}{dt} = \sigma_{ij}(t) \frac{d\epsilon_{ij}(t)}{dt}, \quad W_T(t) = \frac{dA_T(t)}{dt} = \sigma(t) \frac{d\theta_T(t)}{dt} \\ W_*(t) &= \frac{dA_*(t)}{dt} = -\varphi_1(t) \frac{dt_1(t)}{dt} \int_0^t \int_0^t K'[2t_1(t) - t_1(x_1) - t_1(x_2)] d[\Delta\theta(x_1)] d[\Delta\theta(x_2)] - \\ &\quad - 2\varphi_2(t) \frac{dt_2(t)}{dt} \int_0^t \int_0^t G'[2t_2(t) - t_2(x_1) - t_2(x_2)] d\mathcal{E}_{ij}(x_1) d\mathcal{E}_{ij}(x_2) \\ W_e(t) &= \frac{dA_e(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\varphi_1(t)}{2} \int_0^t \int_0^t K[2t_1(t) - t_1(x_1) - t_1(x_2)] d[\Delta\theta(x_1)] d[\Delta\theta(x_2)] + \right. \\ &\quad \left. + \varphi_2(t) \int_0^t \int_0^t G[2t_2(t) - t_2(x_1) - t_2(x_2)] d\mathcal{E}_{ij}(x_1) d\mathcal{E}_{ij}(x_2) \right\} \\ W_c(t) &= \frac{dA_c(t)}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{d\varphi_1(t)}{dt} \int_0^t \int_0^t K[2t_1(t) - t_1(x_1) - t_1(x_2)] d[\Delta\theta(x_1)] d[\Delta\theta(x_2)] - \\ &\quad - \frac{d\varphi_2(t)}{dt} \int_0^t \int_0^t G[2t_2(t) - t_2(x_1) - t_2(x_2)] d\mathcal{E}_{ij}(x_1) d\mathcal{E}_{ij}(x_2) \\ K'(t) &= dK(t)/dt, \quad G'(t) = dG(t)/dt, \quad \Delta\theta(x) = \theta(x) - \theta_T(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Составляющие удельной работы внутренних сил $A(t)$ имеют следующий физический смысл:

(1) функция $A_T(t)$ представляет работу среднего напряжения $\sigma(t)$ на деформации свободного температурного расширения $\theta_T(t)$;

(2) монотонно возрастающая положительная функция $A_*(t)$ описывает процесс необратимого рассеяния энергии в материале. Нетрудно видеть, что в рамках принятой модели этот процесс продолжается даже тогда, когда удельная мощность внутренних сил $\sigma_{ij}(t) \cdot d\epsilon_{ij}(t)/dt$ падает до нуля, например, на участках релаксации напряжений ($\epsilon_{ij}(t) = \text{const}$) или на участках полной разгрузки (отдыха) по напряжениям ($\sigma_{ij}(t) = 0$). Единственным исключением является случай "элементарного" максвелловского материала, когда каждое из ядер релаксации $K(t)$, $G(t)$ представляется только одной экспонентой. В этом материале на участках отдыха не происходит ни рассеяния энергии, ни обратной ползучести;

(3) положительная функция $A_e(t)$ описывает изменение удельной энергии, запасенной в упругих элементах структуры материала. Если на участке релаксации напряжений или на участке отдыха температура остается постоянной и материал не стареет ($d\varphi_1/dt = d\varphi_2/dt = 0$), то на этом участке удельная запасенная энергия $A_e(t)$ убывает вследствие рассеяния, при этом сумма $A_e(t) + A_*(t)$ остается постоянной величиной;

(4) функция $A_e(t)$ описывает вклад процесса старения материала в общий баланс энергии. Поведение этой функции зависит от направления процесса старения. На тех участках деформирования, где процесс старения приводит к "размягчению" материала ($d\varphi_1/dt < 0$, $d\varphi_2/dt < 0$) функция $A_e(t)$ монотонно возрастает. Если же процесс старения приводит к ужесточению материала, то эта функция монотонно убывает.

Рассмотрим теперь вопрос о том, какая часть запасенной энергии $A_e(t)$ является обратимой, т.е. может быть возвращена в виде механической работы при полной разгрузке. Пусть разгрузка происходит на временном интервале $[t_0, t_0 + \Delta t]$ ($\sigma_{ij}(t_0 + \Delta t) = 0$) в изотермических условиях с постоянным тензором скоростей деформаций. При этих допущениях линейное по Δt приближение для приращения работы внутренних сил ΔA при разгрузке будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta A = & \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \sigma_{ij}(t) d\varepsilon_{ij}(t) \approx \\ \approx & -\frac{\sigma^2(t_0)}{2\varphi_1(t_0)K(0)} \left[1 + \Delta t \left(\frac{1}{3\varphi_1(t_0)} \frac{d\varphi_1(t_0^+)}{dt} + \frac{dt_1(t_0^+)}{dt} \frac{\bar{\sigma}(t_0)}{\sigma(t_0)} - \frac{dt_1(t_0^+)}{dt} \frac{K'(0)}{3K(0)} \right) \right] - \\ - & \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{S_{ij}^2(t_0)}{4\varphi_2(t_0)G(0)} \left[1 + \Delta t \left(\frac{1}{3\varphi_2(t_0)} \frac{d\varphi_2(t_0^+)}{dt} + \frac{dt_2(t_0^+)}{dt} \frac{\bar{S}_{ij}(t_0)}{S_{ij}(t_0)} - \frac{dt_2(t_0^+)}{dt} \frac{G'(0)}{3G(0)} \right) \right] \quad (3.3) \end{aligned}$$

$$\bar{\sigma}(t_0) = \varphi_1(t_0) \int_0^{t_0} K'(t_1(t_0) - t_1(\tau)) d[\theta(\tau) - \theta_T(\tau)], \quad \bar{S}_{ij}(t_0) = 2\varphi_2(t_0) \int_0^{t_0} G'(t_2(t_0) - t_2(\tau)) d\varepsilon_{ij}(\tau)$$

Аргумент t_0^+ в выражении (3.3) указывает на то, что соответствующие производные могут испытывать разрывы в начальный момент разгрузки t_0 . В выражении (3.3) предполагается, что среднее напряжение $\sigma(t_0)$ и все компоненты девиатора $S_{ij}(t_0)$ перед началом разгрузки отличны от нуля. Если же $\sigma(t_0) = 0$ и/или $S_{ij}(t_0) = 0$, то выражение для работы внутренних сил при разгрузке может быть получено из (3.3) путем соответствующего предельного перехода. Из выражения (3.3) следует, что величина

$$A_0(t_0) = -\Delta A|_{\Delta t=0} = \frac{\sigma^2(t_0)}{2\varphi_1(t_0)K(0)} + \frac{S_{ij}^2(t_0)}{4\varphi_2(t_0)G(0)}$$

имеет смысл удельной энергии, возвращаемой в виде механической работы при полной мгновенной ($\Delta t = 0$) разгрузке (удельная мгновенно обратимая энергия). Пользуясь неравенством Коши–Буняковского и учитывая представления ядер $K(t)$ и $G(t)$ в виде сумм экспонент, нетрудно показать, что величина мгновенно обратимой энергии $A_0(t_0)$ не превосходит величины запасенной энергии $A_e(t_0)$. В результате мгновенной разгрузки величина запасенной энергии $A_e(t_0)$ скачком уменьшается на величину мгновенно обратимой энергии $A_0(t_0)$, а затем начинается процесс рассеяния оставшейся части запасенной энергии $A_e(t_0) - A_0(t_0)$, сопровождаемый процессом обратной ползучести (об особом случае "элементарного" максвелловского материала говорилось выше).

В выражении (3.3) линейные по Δt члены не являются знакоопределенными функциями, и, следовательно, "растягивание" процесса разгрузки по времени может в некоторых случаях приводить к увеличению возвращаемой энергии по сравнению с мгновенно обратимой энергией $A_0(t_0)$, в других же случаях может иметь место обратный эффект. В этом нетрудно убедиться, рассматривая следующий одномерный аналог уравнения (3.3) в случае деформирования линейного нестареющего материала ($t_1 = t_2 = t$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$) с постоянной скоростью деформации на интервале $[0, t_0]$ и

последующей полной разгрузки за малый интервал времени Δt :

$$\Delta A \approx -\frac{\sigma^2(t_0)}{2E(0)} \left[1 + \frac{\Delta t}{\tau_1} g(\tilde{t}_0) \right]$$

$$E(t) = E_1 e^{-t/\tau_1} + E_2, \quad \tilde{t}_0 = \frac{t_0}{\tau_1}, \quad g(x) = \frac{1}{3(1+\beta)} - \frac{1-e^{-x}}{1-e^{-x}+\beta x}, \quad \beta = \frac{E_2}{E_1} \quad (3.4)$$

где $E(t)$ – ядро релаксации. При $\beta > 0$ уравнение $g(x) = 0$ имеет единственный корень $x(\beta)$, причем функция $g(x)$ является монотонно возрастающей. Из этого следует, что, если "быстрая" (но не мгновенная) разгрузка начинается до момента $\tau_1 x(\beta)$, то возвращаемая энергия $|\Delta A|$ составляет лишь часть мгновенно обратимой энергии $A_0(t_0)$. В противном случае ($t_0 > \tau_1 x(\beta)$) возвращаемая энергия превосходит мгновенно обратимую энергию.

Рассмотрим теперь вопросы, связанные с построением кинетического уравнения типа (2.7) для единственного энергетического параметра A_a , описывающего изменение структуры материала (удельной поглощенной энергии). Результаты экспериментов, а также повседневный опыт, свидетельствуют о том, что деформирование вязкоупругих материалов сопровождается, по крайней мере, двумя необратимыми процессами: тепловыделением и процессом структурных изменений материала (накоплением повреждений). Первый процесс внешне проявляется в виде повышения температуры материала (если условия теплообмена близки к адиабатическим). Внешние проявления процесса накопления повреждений менее заметны, за исключением его последней стадии – разрушения материала. Однако интенсивность этого процесса может контролироваться различными микроструктурными и косвенными методами (измерение уровня акустической эмиссии, скорости ультразвука, степени разрыхлений и др.). Результаты экспериментов по деформированию вязкоупругих материалов свидетельствуют о том, что соотношение интенсивностей указанных процессов существенно зависит от уровня и характера напряженно-деформированного состояния. Например, при одноосном растяжении образца типичного высоконаполненного полимерного материала с постоянной скоростью деформации повышение его температуры вплоть до момента разрушения не превышает 0.1°C . Если же образец этого материала подвергнуть низкоинтенсивному (с амплитудой напряжения, составляющей $0.1\% - 1\%$ стандартного разрушающего напряжения) циклическому растяжению с достаточно высокой частотой, то температура материала может возрасти на несколько десятков градусов без заметных признаков накопления повреждений. Из этого примера можно сделать вывод о том, что при низкоинтенсивном высоко-частотном нагружении практически вся рассеянная энергия переходит в тепло. С учетом вышесказанного может быть предложена следующая "пороговая" модель для выделения удельной поглощенной энергии $A_a(t)$ из удельной рассеянной энергии $A_s(t)$:

$$dA_a(t)/dt = k_a [W_s(t) - W_s] h(W_s(t) - W_s) \quad (3.5)$$

где W_s – пороговая мощность рассеяния, $h(x)$ – функция Хэвисайда, k_a – коэффициент поглощения, с помощью которого выделяется та часть "избыточной" мощности рассеяния $W_s(t) - W_s$, которая поглощается в процессе накопления повреждений ($0 < k_a < 1$). Введенные характеристики материала W_s и k_a должны, вообще говоря, зависеть от внешних параметров состояния $p_l^{(e)}$, а также от степени поврежденности материала, характеризуемой удельной поглощенной энергией A_a . При этом пороговая мощность W_s должна быть убывающей функцией, а коэффициент поглощения k_a – возрастающей функцией поглощенной энергии A_a . Последнее обстоятельство связано с тем хорошо известным фактом, что при всех прочих равных условиях процесс накопления повреждений идет более интенсивно в более поврежденном материале.

В опытах на двухступенчатую ползучесть до разрушения это проявляется в виде зависимости времени до разрушения от порядка приложения нагрузки [9]. По-видимому, одну из характеристик W_s , k_a следует считать зависящей от тех деформационных или силовых параметров состояния, которые позволяют различать процессы активного нагружения и разгрузки (например, от скорости интенсивности напряжений $d\sigma_u(t)/dt$), поскольку при всех прочих равных условиях (одинаковых значениях параметров $p_l^{(e)}$, W_s , A_a) процесс разгрузки должен сопровождаться менее интенсивным накоплением повреждений, чем процесс активного нагружения. С учетом вышесказанного одна из возможных форм кинетического уравнения для удельной поглощенной энергии A_a может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{dA_a(t)}{dt} = k_a \left(p_l^{(e)}(t), A_a(t), \frac{d\sigma_u(t)}{dt} \right) [W_*(t) - W_s(p_l^{(e)}(t), A_a(t))] h(W_*(t) - W_s(p_l^{(e)}(t), A_a(t))) \quad (3.6)$$

Это уравнение замыкает систему определяющих соотношений (2.1), (2.6), (3.2, третье уравнение).

4. Идентификация материальных функций. Основная сложность идентификации материальных функций рассматриваемой теории состоит в том, что наборы аргументов функций F_k , Φ_k ($k = 1, 2$, см. соотношения (2.6)) заранее не известны и должны определяться в процессе идентификации. В свою очередь набор базовых экспериментов, необходимых для идентификации, существенно зависит от состава аргументов этих материальных функций. Поэтому для рассмотренного выше общего варианта теории не представляется возможным однозначно определить набор базовых экспериментов и указать общий метод идентификации. Тем не менее, иерархическая структура определяющих соотношений позволяет указать общую схему идентификации, которая включает четыре этапа.

На первом этапе проводится идентификация ядер релаксации $K(t)$, $G(t)$ с использованием набора опытов, в которых состояние материала не выходит за пределы области линейного поведения. Соответствующие методы идентификации достаточно хорошо разработаны [6]. Если опыты проводятся при различных (но постоянных во времени) значениях внешних параметров (температуры, влажности и т.п.), то наряду с ядрами релаксации идентифицируются также зависимости функций F_k , Φ_k ($k = 1, 2$) от внешних параметров. Эти зависимости представляются, как правило, в виде системы коэффициентов "вертикального и горизонтального смещения" (температурно-временного, влажностно-временного и т.п.). Следует отметить, что временные интервалы, на которых необходимо идентифицировать ядра $K(t)$, $G(t)$ (интервалы $[\eta_1, \eta_M]$, $[\tau_1, \tau_N]$), должны выбираться с учетом диапазонов возможного изменения приведенных времен t_1 , t_2 , которые, вообще говоря, заранее не известны. Расчеты процессов деформирования высоконаполненных полимерных материалов показывают, что вблизи точек разрушения значения приведенного времени могут на 5–10 порядков превосходить значение физического времени. В подобных случаях при идентификации ядер $K(t)$, $G(t)$ необходимо использовать экстраполяционные процедуры.

На втором этапе идентификации для каждого из имеющихся в распоряжении опытов определяются временные зависимости функций старения с использованием следующей системы условий связи между скачками деформаций ($\Delta\theta$, $\Delta\mathcal{E}_{ij}$) и скачками напряжений ($\Delta\sigma$, ΔS_{ij}):

$$\Delta\sigma(t_\Delta) = \varphi_1(t_\Delta)K(0)\Delta\theta(t_\Delta), \quad \Delta S_{ij}(t_\Delta) = 2\varphi_2(t_\Delta)G(0)\Delta\mathcal{E}_{ij}(t_\Delta) \quad (4.1)$$

где t_Δ – момент скачка напряжений и деформаций. Эти соотношения следуют из соотношений (2.1) и допущения о непрерывности функций старения. Покажем, каким образом эти соотношения могут использоваться для определения временных зависи-

мостей функций старения. Пусть в опыте с номером q производится регистрация среднего напряжения $\sigma^{(q)}(t)$ и объемной деформации $\theta^{(q)}(t)$ на временном интервале $[0, t^{(q)}]$. Выбирая внутри этого интервала n_Δ точек и проводя для каждой точки отдельный опыт, отличающийся от исходного опыта лишь наличием скачков $\Delta\theta$, $\Delta\sigma$ в соответствующий момент времени, можно получить с помощью первого из соотношений (4.1) массив значений функции старения ϕ_1 на сетке из n_Δ точек. Аналогичным образом может быть получен массив значений функции старения ϕ_2 . При практическом использовании указанного подхода под скачком следует понимать заметное (например, не менее 10% от соответствующей величины в момент, предшествующий скачку) изменение деформации или напряжения за время, много меньшее минимального из времен релаксации $\eta_1, \dots, \eta_M$, $\tau_1, \dots, \tau_N$. Другой подход к определению временных зависимостей функций старения основан на использовании результатов опытов на устойчивость тонкостенных оболочек [7].

На третьем этапе идентификации для каждого из имеющихся в распоряжении опытов определяются временные зависимости производных приведенных времен dt_1/dt , dt_2/dt , а также временные зависимости удельной мощности рассеяния $W_*(t)$ и удельной поглощенной энергии $A_a(t)$. При этом соотношения (2.1) рассматриваются, как нелинейные интегральные уравнения относительно неизвестных функций $t_1(t)$, $t_2(t)$. Для численного решения каждого из этих уравнений может быть использован шаговый метод [4], который проиллюстрируем на следующем примере. Пусть в рассматриваемом опыте известна временная зависимость одной из компонент девиатора деформаций $\mathcal{E}_{ij}(t)$, а также временные зависимости соответствующей компоненты девиатора напряжений $S_{ij}(t)$ и функции старения $\phi_2(t)$. Тогда с учетом представления ядра $G(t)$ в виде суммы экспонент уравнение для приращения приведенного времени $\Delta t_2 = t_2(t + \Delta t) - t_2(t)$ на текущем временном шаге может быть представлено в следующем виде:

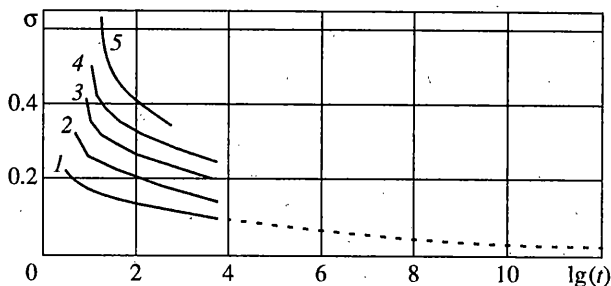
$$2 \sum_{n=1}^N G_n \psi \left(\frac{\Delta t_2}{\tau_n} \right) \left[\Delta \mathcal{E}_{ij} - \mathcal{E}_{ij}^{(n)}(t) \frac{\Delta t_2}{\tau_n} \right] + 2 G_{N+1} \Delta \mathcal{E}_{ij} - \frac{S_{ij}(t + \Delta t)}{\phi_2(t + \Delta t)} + \frac{S_{ij}(t)}{\phi_2(t)} = 0 \quad (4.2)$$

$$\Delta \mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ij}(t + \Delta t) - \mathcal{E}_{ij}(t), \quad \psi(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}, \quad \mathcal{E}_{ij}^{(n)}(t) = \int_0^t e^{-[t_2(t) - t_2(\tau)]/\tau_n} d\mathcal{E}_{ij}(\tau)$$

При получении уравнения (4.2) использовалось следующее соотношение для наследственных интегралов $\mathcal{E}_{ij}^{(n)}(t)$:

$$\mathcal{E}_{ij}^{(n)}(t + \Delta t) = \mathcal{E}_{ij}^{(n)}(t) e^{-\Delta t_2/\tau_n} + \Delta \mathcal{E}_{ij} \psi(\Delta t_2/\tau_n) \quad (4.3)$$

которое является точным, если функции $\mathcal{E}_{ij}(\tau)$ и $t_2(\tau)$ линейны на интервале $[t, t + \Delta t]$. Соотношение (4.3) может использоваться для "обновления" наследственных интегралов $\mathcal{E}_{ij}^{(n)}(t)$ при переходе к следующему временному шагу после того, как уравнение (4.2) решено относительно Δt_2 . Многочисленные расчеты, проведенные для ряда наполненных полимерных материалов, свидетельствуют о достаточно высокой скорости сходимости метода Ньютона при решении уравнения (4.2). Резкое уменьшение скорости сходимости и даже расходимость итерационного процесса наблюдались только в случае нарушения монотонности приведенного времени (т.е. в случае $\Delta t_2 \leq 0$). После определения указанным выше методом функций приведенных времен $t_1(t)$, $t_2(t)$ можно вычислить временную зависимость удельной мощности рассеяния $W_*(t)$ с использованием третьего из соотношений (3.2) и решить уравнение (3.6) относительно функции удельной поглощенной энергии $A_a(t)$. Вычисление функции $W_*(t)$ возможно для каждого из опытов, в которых известны временные зависимости всех компонент тензора деформаций. Что касается вычисления функции $A_a(t)$, то оно



Фиг. 1

требует предварительной идентификации коэффициента поглощения k_a и пороговой мощности рассеяния W_s . Однако, если рассматриваются достаточно интенсивные нагружения, то в первом приближении можно принять допущение об идентичности процессов рассеяния энергии и накопления повреждений, т.е. допущение $A_d(t) \approx A_s(t)$.

На четвертом (заключительном) этапе идентификации определяются материальные функции F_1 , F_2 , Φ_1 , Φ_2 с использованием системы соотношений типа (2.6) для каждого из опытов. В общем случае эта система имеет следующий вид:

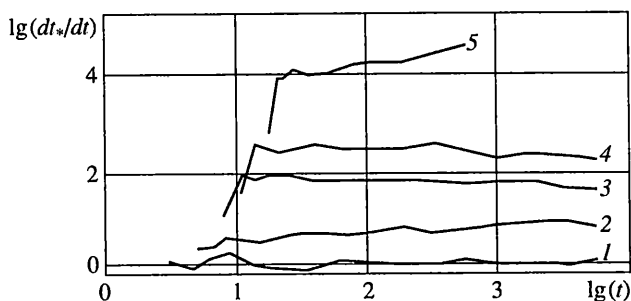
$$\begin{aligned} F_k[p_n^{(q)}(t)] &= \varphi_k^{(q)}(t) \quad (k=1,2; \quad q=1,\dots,N_t) \\ \Phi_k[p_n^{(q)}(t)] &= dt_k^{(q)}(t)/dt \quad (k=1,2; \quad q=1,\dots,N_t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

где верхний индекс q обозначает номер опыта, N_t – количество опытов, используемых в процессе идентификации, $p_n^{(q)}(t)$ – набор параметров состояния, которые либо непосредственно регистрируются в опыте с номером q (внешние, деформационные, силовые параметры), либо вычисляются для этого опыта на предыдущем этапе идентификации с использованием соотношений типа (4.2) (энергетические параметры). Для идентификации материальных функций в общем случае представим зависимость каждой из этих функций от параметров состояния отрезком ряда с неизвестными коэффициентами, которые должны определяться из условия минимума средне-взвешенной невязки системы (4.4). Задача идентификации значительно упрощается в тех случаях, когда в некоторой серии опытов обнаруживается достаточно слабое изменение скорости приведенного времени. В этом случае представляется естественным допущение о том, что соответствующая материальная функция (Φ_1 или Φ_2) зависит только от тех параметров состояния, которые не изменяются в опытах (например, от деформаций, если рассматривается серия опытов на релаксацию).

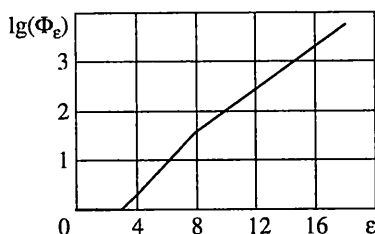
5. Пример идентификации модели при одноосном нагружении. Прогнозирование двухступенчатой ползучести. Рассмотрим пример применения одномерного варианта описанной выше нелинейной модели для прогнозирования двухступенчатой ползучести наполненного полимерного материала НПМ-1. Примем один из наиболее простых вариантов эндохронной модели – деформационный вариант, в котором производная приведенного времени зависит только от текущей деформации, т.е.

$$dt_*(t)/dt = \Phi_\epsilon(\epsilon) \quad (5.1)$$

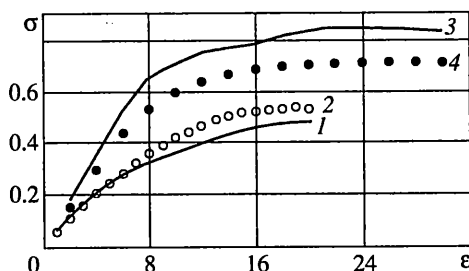
где $t_*(t)$ – функция приведенного времени, ϵ – деформация. Для идентификации ядра релаксации и материальной функции $\Phi_\epsilon(\epsilon)$ воспользуемся результатами опытов на релаксацию напряжений при значениях деформации $\epsilon_0 = 3, 5, 8, 11, 18[\%]$. Методика идентификации в одномерном случае детально изложена в работе [4]. Поскольку модель будет использоваться для расчетов процессов ползучести вплоть до разрушения, то ее идентификация проводится с использованием истинных напряжений (а не условных, как в работе [4]). Другое отличие от работы [4] состоит в расширении на 4 порядка временного диапазона идентификации ядра релаксации. На фиг. 1 показана



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ны результаты опытов на релаксацию напряжений (напряжение σ [МПа], время t [с], кривые 1–5 соответствуют $\epsilon_0 = 3, 5, 8, 11, 18[\%]$), а также результаты экстраполяции зависимости $\sigma(t)$ при $\epsilon_0 = 3\%$ (пунктирная линия). Ядро релаксации идентифицировалось на временном интервале от 1 с до 10^{12} с и представлялось в виде суммы 13 экспонент. На фиг. 2 для каждого из 5 опытов представлены результаты вычисления производной приведенного времени $dt_*(t)/dt$ с использованием шагового метода (4.2), а на фиг. 3 – полученная в результате идентификации зависимость логарифма материальной функции Φ_ϵ от деформации $\epsilon[\%]$. На фиг. 4 показаны результаты прогноза диаграмм одноосного растяжения материала НПИМ-1 (σ [МПа], $\epsilon[\%]$) со скоростями деформирования $d\epsilon/dt = 0.001 \text{ с}^{-1}, 1 \text{ с}^{-1}$ (кривые 1, 3), а также результаты соответствующих опытов (светлые и темные точки). Для прогнозирования процесса одномерной двухступенчатой ползучести этого материала вплоть до момента его разрушения был принят следующий критерий длительной прочности, который по существу представляет собой критерий нормированной поглощенной энергии [8]:

$$D(t_f) = \int_0^{t_f} \frac{dA_a(\tau)}{A_f(\sigma(\tau))} = 1 \quad (5.2)$$

где $D(t)$ – параметр поврежденности, t_f – время до разрушения, $A_a(t)$ – удельная поглощенная энергия, $A_f(\sigma)$ – удельная энергия, поглощенная в режиме ползучести при постоянном напряжении σ в течение всего времени действия этого напряжения вплоть до момента разрушения. При идентификации функции $A_f(\sigma)$ использовались следующие параметры стандартного уравнения долговечности $t_f(\sigma) = B/\sigma^m$: $m = 23.2$, $\lg B = -6.24$ (t_f [с], σ [МПа]). Величина поглощенной энергии $A_f(\sigma)$ вычислялась для четырех уровней напряжения σ , которым соответствуют следующие значения долговечности: $t_f(\sigma) = 1$ секунда, 1 минута, 1 час, 1 сутки. При вычислении поглощенной энергии принималось допущение об идентичности процессов рассеяния энергии и

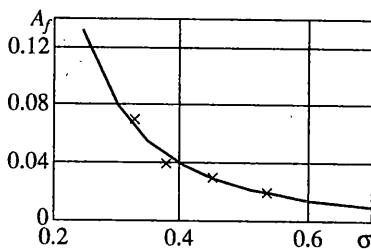
накопления повреждений, т.е. $A_d(t) = A_s(t)$. Ниже приведены значения функции $A_f(\sigma)$:

$t_f[\text{с}]$	1	60	3600	86400
$\sigma[\text{МПа}]$	0.5383	0.4512	0.3782	0.3298
$A_f(\sigma) [\text{МПа}]$	0.01871	0.02865	0.03918	0.07032

Для аппроксимации функций $A_f(\sigma)$ использовалась степенная зависимость, аналогичная уравнению долговечности:

$$A_f(\sigma) = B_A / \sigma^{m_A} \quad (5.3)$$

Параметры B_A и m_A определялись стандартным методом наименьших квадратов по 4-м точкам, указанным выше ($m_A = 2.577$, $\lg B_A = -2.436$). На фиг. 5 показана зависимость (5.3), а также отмечены 4 точки, по которым производилось определение

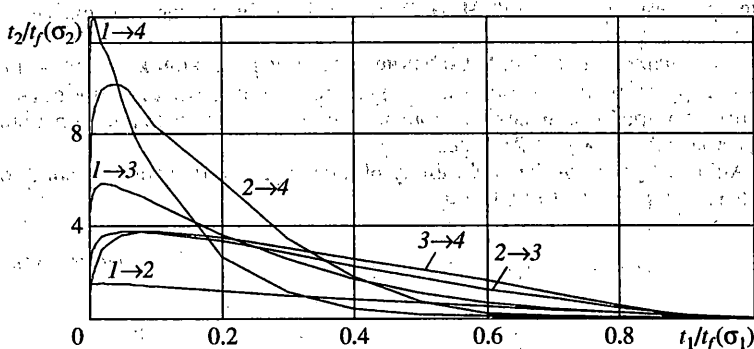


Фиг. 5

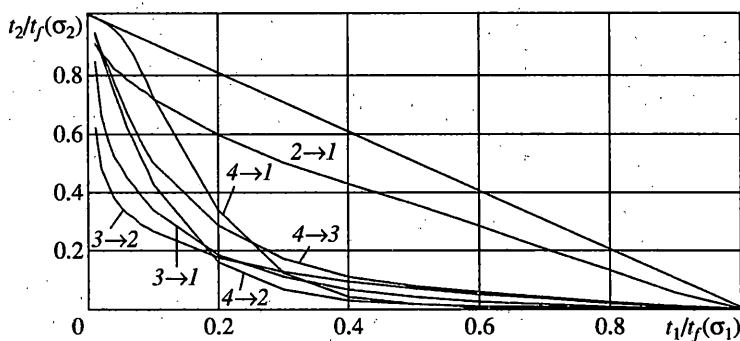
параметров B_A , m_A . При прогнозировании процесса двухступенчатой ползучести рассматривались все $4 \times 3 = 12$ вариантов, соответствующих указанным выше четырем уровням напряжения. На фиг. 6 представлены результаты прогнозов для случая, когда на 1-м этапе прикладывается более низкое напряжение, чем на втором, а на фиг. 7 – результаты прогнозов для обратного порядка приложения напряжений. Результаты представлены в плоскости линейных мер поврежденности $\omega_1 = t_1/t_f(\sigma_1)$, $\omega_2 = t_2/t_f(\sigma_2)$, причем величины долговечностей $t_f(\sigma_1)$, $t_f(\sigma_2)$ определены по энергетическому критерию (5.2). Кривая, отмеченная на этих рисунках маркером типа $(i \rightarrow j)$, соответствует варианту, в котором на первом этапе прикладывается i -я величина напряжения, а на втором (заключительном) этапе – j -я величина. При этом величины напряжения нумеруются в порядке их возрастания. Например, кривая $(2 \rightarrow 4)$ соответствует приложению на 1-м этапе напряжения 0.3782 МПа, а на 2-м этапе – 0.5383 МПа.

Как видно из фиг. 6, критерий нормированной поглощенной энергии (5.2) позволяет описать наблюдаемый в опытах с наполненными полимерными материалами эффект упрочнения, вызываемого предварительным кратковременным низкоинтенсивным нагружением (эффект приспособляемости). Долговечность материала, подвергнутого такому нагружению, увеличивается по сравнению с долговечностью исходного ("свежего") материала. В наполненных полимерных материалах этот эффект связан с перестройкой структуры материала, не сопровождающейся ростом дефектов. Зависимости, представленные на фиг. 7, описывают известный эффект снижения общей долговечности в случае приложения на 1-м этапе более интенсивной нагрузки [9].

6. Заключение. При практическом использовании изложенной теории возможно прогнозирование длительной прочности конструкций из наполненных полимерных материалов. Для этого проводятся форсированные испытания образцов, режимы которых определяются из условия равенства величины $D(t)$ в натурных и модельных условиях, а затем образцы, получившие заданный уровень поврежденности, испыты-



Фиг. 6



Фиг. 7

ваются стандартными методами до разрушения. При этом скалярный характер параметра поврежденности компенсируется сохранением направлений главных напряжений при форсированных испытаниях такими, какие реализуются в натуральных условиях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-01-00084).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильющин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
2. Быков Д.Л. Об учете повреждений в наполненных полимерных материалах. // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 1. С. 19–28.
3. D.L. Bykov. Modelling damage accumulation in filled polymers // Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures. November 1999. Vol. 22. № 11. P. 981–988.
4. Быков Д.Л., Коновалов Д.Н. Определение материальных функций нелинейной теории термовязкоупругости с использованием ее иерархической структуры. // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 5. С. 189–205.
5. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. М.: Наука, 1972. 327 с.
6. Уржумцев Ю.С. Прогнозирование длительного сопротивления полимерных материалов. М.: Наука, 1982. 222 с.
7. Быков Д.Л., Коновалов Д.Н. Особенности сопротивления вязкоупругих материалов при потере устойчивости тонкостенных конструкций // Физика процессов деформирования и разрушения и прогнозирование механического поведения материалов. Тр. Междунар. семинара

- "Актуальные проблемы прочности". Ч. II. Витебск: Витебский гос. технол. ун-т. Ч. 2. 2000. С. 428–433.
8. Быков Д.Л., Коновалов Д.Н. Использование функции рассеянной энергии для описания деформаций и разрушения полимерных конструкций. // Упругость и неупругость. Материалы Междунар. симп. по проблемам механики деформируемых тел, посвящ. 90-летию А.А. Ильюшина. М.: Изд-во МГУ, 2001. С. 250–262.
9. Carden J.P. An investigation of the applicability of a damage failure theory for solid rocket propellants // AIAA Paper. 1992. № 92–0132. P. 1–6.

Королев

Поступила в редакцию
12.02.2002