МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2002

УДК 539.374

© 2002 г. Д.Д. ИВЛЕВ, А.Ю. ИШЛИНСКИЙ, Р.И. НЕПЕРШИН

О ВНЕДРЕНИИ ЖЕСТКОЙ ПИРАМИДЫ В ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Приведено автомодельное решение задачи о внедрении жесткой треугольной и квадратной пирамиды в идеально пластическое полупространство при условии полной пластичности с учетом контактного трения на гранях пирамиды. Задача моделирует испытание материалов на твердость внедрением жесткой пирамиды. Давление на пирамиду и форма пластического отпечатка удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

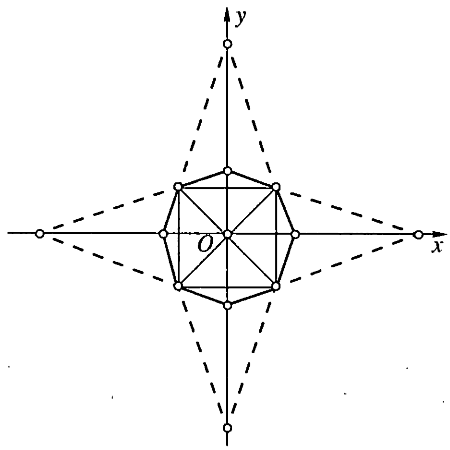
Условию полной пластичности идеально пластического тела соответствуют ребра призмы Треска–Сен-Венана в пространстве главных напряжений. Только при условии полной пластичности возможна пространственная деформация сдвигом по двум плоскостям скольжения, в которых касательное напряжение достигает предела текучести при сдвиге. Пространственная задача теории идеальной пластичности при условии полной пластичности является статически определимой и гиперболической и перспективна для решения практических задач [1–5].

Характеристические соотношения для напряжений и скоростей перемещений пространственной задачи при условии полной пластичности приведены в [6], где показано, что известные соотношения для плоской и осесимметричной деформации являются частными случаями соотношений общей пространственной задачи. Эти соотношения применены в [6] для решения задач о давлении плоских штампов различной формы в плане на идеально пластическое полупространство.

В настоящей работе характеристические соотношения [6] применены для решения пространственной автомодельной задачи о внедрении жесткой пирамиды в идеально пластическое полупространство с учетом контактного трения на ее гранях. Эта задача моделирует испытания металлов на твердость вдавливанием жесткой пирамиды. Форма пластического отпечатка и давление на пирамиду удовлетворительно согласуются с экспериментами [7].

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим внедрение правильной жесткой треугольной или квадратной пирамиды в идеально пластическое полупространство по нормали к его границе в декартовых координатах $\{x, y, z\}$. Ось z направим по нормали к границе полупространства и по оси пирамиды. Ось x направим по нормали к середине стороны правильного треугольника или квадрата, которые образуют основание пирамиды на плоскости $z = 0$ (фиг. 1).

Область пластического течения в рассматриваемой задаче имеет плоскости симметрии, ортогональные к границе полупространства и проходящие через ребра и середины граней. Рассмотрим пластическую область, ограниченную двумя плоскостями симметрии, гранью пирамиды и границей полупространства. Координаты, напряжения и скорости перемещений будем считать безразмерными величинами, принимая полудлину стороны правильного треугольника или квадрата за характерную длину, напряжение текучести материала при одноосном сжатии за характерное напряжение и скорость движения пирамиды по оси z за характерную скорость.



Фиг. 1

Условие полной пластичности в пространстве главных напряжений для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\sigma_1 = \sigma_2, \ \ \sigma_3 = \sigma_1 - 1, \ \ \sigma = \sigma_1 - 1/3 \tag{1.1}$$

где σ – среднее напряжение.

Принимаем, что при внедрении пирамиды вектор скорости пластического течения находится в плоскостях y = const, ортогональных к границе полупространства и к граням пирамиды. Для плоскости $y = 0$ это условие является точным вследствие симметрии пластического течения. При $0 < y < 1$ это условие обеспечивает геометрическое подобие пластической области во всех сечениях y = const. При $y = 1$ пластическая область перед гранью пирамиды стягивается в точку, совпадающую с точкой пересечения ребра пирамиды с недеформированной границей полупространства $z = 0$, что подтверждается экспериментами [7].

Направляющие косинусы напряжения σ_3 с осями координат x, y, z имеют вид $n_1 = \cos\theta$, $n_2 = 0$, $n_3 = \sin\theta$, где θ – угол между направлением напряжения σ_3 и осью x, а ненулевые компоненты тензора напряжений при условии (1.1) определяются выражениями

$$\sigma_x = \sigma + 1/3 - \cos^2\theta, \ \ \sigma_y = \sigma + 1/3, \ \ \sigma_z = \sigma + 1/3 - \sin^2\theta \tag{1.2}$$

$$\tau_{xz} = -\sin\theta\cos\theta \tag{1.3}$$

Главное напряжение σ_2 направлено по оси y. Ортогональные характеристики в плоскостях y = const совпадают с линиями скольжения ξ и η, которые определяются дифференциальными уравнениями

$$dz/dx = \operatorname{tg}\varphi \ \text{ для } \xi, \quad dz/dx = -\operatorname{ctg}\varphi \ \text{ для } \eta \tag{1.4}$$

с дифференциальными соотношениями для напряжений и скоростей перемещений, совпадающими с уравнениями Генки и Гейрингер [6]:

$$d\sigma - d\varphi = 0 \ \text{ вдоль } \xi, \quad d\sigma + d\varphi = 0 \ \text{ вдоль } \eta \tag{1.5}$$

$$dV_\xi - V_\eta d\varphi = 0 \ \text{ вдоль } \xi, \quad dV_\eta + V_\xi d\varphi = 0 \ \text{ вдоль } \eta \tag{1.6}$$

где φ – угол между касательной к линии скольжения ξ и осью x и V_ξ и V_η – проекции вектора скорости на линии скольжения. Углы φ и θ связаны соотношением $\theta = \varphi - \pi/4$.

2. Автомодельное решение. Рассмотрим пластическую область и граничные условия задачи в плоскости y = const (фиг. 2). Глубина внедрения пирамиды h определяется формулами

$$h = (1 - y)/(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha) \text{ или } h = (1 - y)/\mathrm{tg}\,\alpha, \ 0 \leqslant y \leqslant 1 \tag{2.1}$$

для треугольной или квадратной пирамиды соответственно, где α – угол наклона грани пирамиды к оси z. Нормальные и касательные напряжения на границе контакта AE постоянны. В области ADE линии скольжения прямолинейны и напряженное состояние однородно. В области ACD прямолинейные линии скольжения η образуют центрированный веер с особой точкой A. В области ABC напряженное состояние также однородно и граница AB свободна от внешних напряжений.

При условии полной пластичности материал пластической области ABC находится в состоянии одноосного сжатия параллельно границе AB

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -1, \quad \sigma = -1/3 \text{ на } AB \tag{2.2}$$

На границе контакта AE задаем напряжение контактного трения μ, которое определяет угол наклона линии скольжения η к этой границе

$$\gamma = \tfrac{1}{2}\arccos 2\mu, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant \tfrac{1}{2} \text{ на } AE \tag{2.3}$$

Углы β и ψ связаны соотношением

$$\beta + \psi = \pi/4 + \alpha - \gamma \tag{2.4}$$

Углы α и μ являются параметрами задачи, которые по условию симметрии пластического течения относительно оси z должны удовлетворять неравенству, соответствующему предельному значению $\pi/2$ угла при вершине жесткой области в точке E:

$$\alpha \leqslant \pi/4 + \tfrac{1}{2}\arccos 2\mu \tag{2.5}$$

Для идеально гладкой пирамиды ($\mu = 0$) $\alpha \leqslant \pi/2$, для абсолютно шероховатой пирамиды ($\mu = {}^1/_2$) $\alpha \leqslant \pi/4$.

Если угол α превышает предельное значение (2.5), зависящее от трения, то на гранях пирамиды возникает "нарост" недеформируемого материала, образующего естественный клин с углом наклона $\alpha^* = \pi/4$, по которому происходит скольжение пластической области с максимальным трением. В этом случае давление на пирамиду не зависит от угла α, что подтверждается экспериментами [7] по внедрению шероховатой пирамиды без смазки при $\alpha > \pi/4$.

Из условия несжимаемости следует равенство площадей треугольников ABF и EOF, которое с использованием соотношения

$$h/l = \cos\alpha - \sqrt{2}\cos\gamma\sin\beta \tag{2.6}$$

где l – длина границы контакта AE, приводит к нелинейному уравнению относительно угла β:

$$\sin\beta(\cos\beta + \sqrt{2}\sin\alpha/\cos\gamma) - \tfrac{1}{4}\sin 2\alpha/\cos^2\gamma = 0 \tag{2.7}$$

которое имеет решение $\beta = 0$ для $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$. При $0 < \alpha < \pi/2$ угол β находим из уравнения (2.7) методом Ньютона. Затем из соотношений (2.4) и (2.6) находим угол ψ и длину границы контакта l.

Поле скоростей в пластической области определяется непрерывностью скоростей по нормали к грани пирамиды и по нормали к жесткопластической границе. Эти условия определяют скорость области AED и разрыв скорости $[V]$ вдоль жесткопластической границы, который возникает в точке E (фиг. 3). В соответствии с уравнениями (1.6) скорости постоянны вдоль прямолинейных линий скольжения η и определяются поворотом разрыва скорости вдоль границы DC, которая отображается на плоскости годографа дугой окружности с радиусом $[V]$. Из построений, показанных на плоскости годографа, находим $[V]$ и проекции вектора скорости по направлениям x и z:

$$[V]=\sin\alpha/\cos\gamma \tag{2.8}$$

$$V_x=[V]\cos\zeta,\ \ V_z=[V]\sin\zeta,\ \ \gamma-\alpha\leqslant\zeta\leqslant\pi/4-\beta \tag{2.9}$$

Среднее напряжение в области ADE находим интегрированием соотношения (1.5) вдоль линий скольжения ξ с использованием угла ψ, определяемого из уравнения (2.4), и граничного условия (2.2):

$$\sigma=-(1/3+\pi/4+\alpha-\gamma-\beta) \tag{2.10}$$

Нормальное давление на грань пирамиды находим из первого соотношения (1.2) направляя ось x по нормали к грани и используя угол $\theta=\nu-\pi/4$ для напряжения σ_3 и выражение (2.10) для σ:

$$p=\tfrac{1}{2}(1+\sin 2\gamma)+\pi/4+\alpha-\gamma-\beta \tag{2.11}$$

Давление, отнесенное к проекции площади пластического отпечатка на плоскость $z=0$, равно

$$q=p+\mu\operatorname{ctg}\alpha \tag{2.12}$$

Давление, отнесенное к площади основания пирамиды на плоскости $z=0$, находим из соотношений (2.1), (2.6) и (2.12):

$$q_n=q\chi\sin\alpha \tag{2.13}$$

$$\chi=1/(\sin\alpha-\sqrt{2}\cos\gamma\operatorname{tg}\alpha\sin\beta) \tag{2.14}$$

Вертикальная сила Q, действующая на треугольную и квадратную пирамиду равна $\sqrt{3}q_n$ и $4q_n$ соответственно.

Высоту поднятия пластической области по грани пирамиды над плоскостью $z=0$ и проекцию границы пластического отпечатка на эту плоскость находим из соотношений (2.1) и (2.6):

$$h^*=\sqrt{2}c(1-y)\chi\cos\gamma\sin\beta \tag{2.15}$$

$$x=c[y+(1-y)\chi\sin\alpha] \tag{2.16}$$

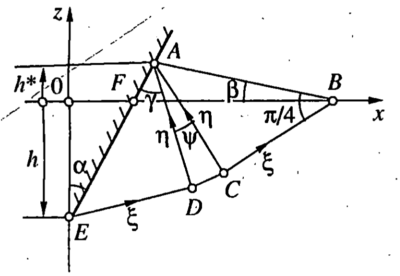
где χ определяется из уравнения (2.14) и $c=1/\sqrt{3}$ или $c=1$ для треугольной или квадратной пирамиды соответственно. Граница пластической области на плоскости $z=0$ определяется уравнением

$$x=c[y+(1-y)\chi(\sin\alpha+\sqrt{2}\cos\gamma\cos\beta)] \tag{2.17}$$

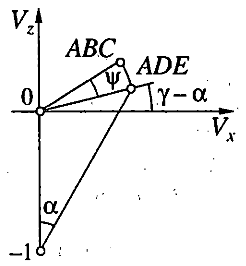
На фиг. 1 штриховыми линиями показаны границы пластической области и проекции пластического отпечатка на плоскости $z=0$, вычисленные по уравнениям (2.16) и (2.17) для гладкой квадратной пирамиды с углом наклона граней $\alpha=\pi/6$.

3. Сравнение с экспериментами. Эксперименты по внедрению треугольной и квадратной пирамиды в упрочненные металлы показывают линейное возрастание усилия и геометрическое подобие формы пластического отпечатка [7], что согласуется с приведенным автомодельным решением. Давление на пирамиду, отнесенное к проекции площади пластического отпечатка на плоскость $z=0$ или к площади основания пирамиды, одинаково для треугольной и квадратной пирамиды. Это согласуется с экспериментальными данными, приведенными в табл. 1 в работе [7].

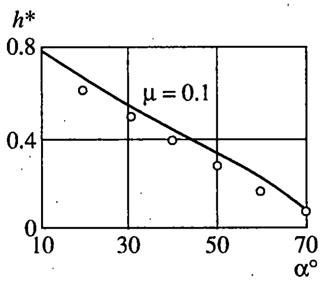
На фиг. 4 показано сравнение расчетных значений высоты h^* поднятия пластического материала в середине грани квадратной пирамиды для $\mu=0.1$ в зависимости



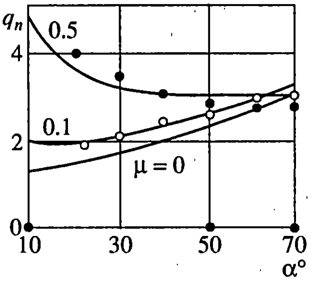
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

от угла α [град.] с экспериментальными данными [7] (светлые точки) по внедрению смазанной пирамиды в холодно катанную медь. Из этого рисунка видно удовлетворительное качественное и количественное соответствие теории и эксперимента. Расчетные значения проекции пластического отпечатка по уравнению (2.16) в середине грани пирамиды для углов $\alpha < \pi/4$ также удовлетворительно согласуются с экспериментами [7]. Но теоретическая граница пластической области в сечении $y = 0$ оказывается значительно больше экспериментальной. Это можно объяснить весьма малыми углами наклона свободной границы пластической области к границе полупространства и, возможно, плавным переходом этой границы в недеформированную границу полупространства, что затрудняет точное определение границы пластической области в эксперименте.

На фиг. 5 приведены расчеты давления q_n по уравнениям (2.13) и (2.14) в зависимости от угла α для $\mu = 0$, 0.1 и 0.5 и сравнение с экспериментальными данными [7] по внедрению квадратной смазанной (светлые точки) и шероховатой несмазанной (темные точки) пирамиды в холодно катанную медь, для которой зависимость напряжение – деформация близка к модели идеально пластического тела. Расхождение теоретических и экспериментальных данных находится в пределах возможной погрешности определения контактного трения и предела текучести при сдвиге деформируемого материала.

При $\alpha = \pi/2$ и $\mu = 0$ из уравнений (2.7), (2.11)–(2.17) находим $\beta = 0$, $q = q_n = 1 + \pi/2$, $h^* = 0$; граница отпечатка совпадает с основанием пирамиды и граница пластической области на плоскости $z = 0$ определяется уравнением $x = c(2-y)$. Это предельный случай давления гладкого треугольного и квадратного плоского штампа на идеально пластическое полупространство [6]. Предельное давление $q \approx 1 + \pi/2$ на смазанную квадратную пирамиду при $\alpha \to \pi/2$, $h^* \approx 0$ и граница пластической области $x \approx 2$ в сечении $y = 0$ получены в экспериментах [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Пространственное деформирование не вполне упругих и вязкопластических тел // Изв. АН СССР. ОТН. 1945. № 3. С. 250–260.
2. *Ишлинский А.Ю.* Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринеля // ПММ. 1944. Т. 8. В. 3. С. 201–224.
3. *Ишлинский А.Ю.* Прикладные задачи механики. Т. 1. М.: Наука, 1986. 359 с.
4. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
5. *Ивлев Д.Д., Ишлинский А.Ю.* Полная пластичность в теории идеально пластического тела // ДАН. 1999. Т. 368. № 3. С. 333–334.
6. *Ивлев Д.Д., Ишлинский А.Ю., Неперпшин Р.И.* О характеристических соотношениях для напряжений и скоростей перемещений пространственной задачи идеальнопластического тела при условии полной пластичности // ДАН. 2001. Т. 381. № 5. С. 616–622.
7. *Dugdale D.S.* Experiments with pyramidal indenters. P. 1 // J. Mech. and Phys. Solids. 1955. V. 3. № 3. P. 197–205.

Москва

Поступила в редакцию
5.03.2002