

УДК 539.3

© 2002 г. К.Ф. ЧЕРНЫХ

"НЕТРАДИЦИОННЫЕ" ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ (ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ)

Рассматриваются нетрадиционные граничные условия и условия сопряжения (дисторсионные, жесткого края, со следящей нагрузкой, деформационные, границы с проскальзыванием и термодинамические). Рассмотрение ограничивается нелинейной обобщенной плоской задачей при комплексной форме изложения.

В нелинейной теории упругости широко используется комплексная форма записи используемых зависимостей. Так в работах автора были даны: последовательный комплексный вывод основных зависимостей нелинейной теории упругости, в том числе и новых, а также развитие комплексного метода как основного рабочего аппарата. В работах [1–6] использовались комплексные (прямоугольные декартовы) координаты материальной точки до и после деформации $\zeta = x_1 + ix_2$, $\bar{\zeta} = x_1 - ix_2$, $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$; дифференцирование по ним

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

комплексные компоненты тензора $T_1 = t_{11} + t_{22} + i(t_{12} - t_{21})$, $T_2 = t_{11} - t_{22} + i(t_{12} + t_{21})$, $T_3 = t_{13} + it_{23}$, $T_4 = t_{31} + it_{32}$, $T_5 = t_{33}$.

Компактные и обзримые комплексные зависимости облегчают запись основных зависимостей в виде, способствующем проведению необходимых преобразований. Комплексный подход можно рассматривать как аналог векторному. Преимущество его перед последним состоит в дополнительной возможности при рассмотрении конкретных задач доводить решение до конца в комплексном виде. В частности, для рассмотрения двумерных задач был использован предложенный автором (1951) элементарный метод расчленения граничных условий, альтернативный более сложному, требующему специальной подготовки методу интегралов типа Коши [1–6]. Предложенный метод, использованный в плоской задаче, при антиплоской деформации и при осесимметричной деформации тел вращения, состоит в следующем: при конформном отображении области комплексной плоскости на внутренность (внешность) единичной окружности $\sigma = e^{i\theta}$ граничное условие с помощью соотношений $\sigma = \bar{\sigma}^{-1}$, $\bar{\sigma} = \sigma^{-1}$ представляется в виде $\Phi(\sigma) + \overline{\Psi(\bar{\sigma})} = F_1(\sigma) + \overline{F_2(\bar{\sigma})}$, где $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ – искомые функции Гурса – Колосова, а $F_1(\sigma)$, $F_2(\sigma)$ – заданные на контуре предельные значения функций, удовлетворяющих требуемым условиям в точках $\zeta = 0, \infty$. В предложенном методе принимается $\Phi(\zeta) = F_1(\zeta)$, $\Psi(\zeta) = F_2(\zeta)$.

В нелинейной механике упругого тела роль лагранжевых пар "обобщенная сила – обобщенное перемещение" играют энергетические пары тензоров. Среди пяти таких [1–4] наиболее "конкурентноспособны" две пары: истинные напряжения (напряжения Коши) – логарифмические деформации, условные напряжения (симметричные напряжения Био) – кратности удлинений (относительные удлинения).

Истинные деформации, вопреки своему "заораживающему" названию, обладают целым рядом недостатков общего характера, от которых свободны условные [5–7]. Что же касается сингулярных проблем, то в них (как было показано автором на примерах решения многочисленных эталонных задач) истинные напряжения, обладая многочисленными дефектами, и вовсе непригодны [5–6].

1. Приведем основные зависимости обобщенной плоской задачи. Обобщенную плоскую задачу определяет комплексный закон перемещения

$$z = z(\zeta, \bar{\zeta}), \quad x_3 = \lambda x_3^{\circ} \quad (1.1)$$

где λ – кратность удлинения в направлении третьей координатной оси. Ей отвечает градиент движения (тензор дисторсии):

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x_{\nu}} \mathbf{g}_{\mu} \mathbf{g}_{\nu} \quad (1.2)$$

определяющий деформацию и повороты материальной частицы (здесь и ниже повторяющимся греческим индексам производится суммирование). В ней материальные отрезки до деформации ($d\mathbf{R}^{\circ}$) и после ($d\mathbf{R}$) связаны отношением

$$d\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}^{\circ} \quad (1.3)$$

Используется также и тензор Коши – Лагранжа

$$\mathbf{C}^{\circ} = \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F} = c_{\alpha\beta}^{\circ} \mathbf{g}_{\alpha} \mathbf{g}_{\beta} \quad (1.4)$$

компоненты которого равны [5]:

$$\begin{aligned} c_{11}^{\circ} &= \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right) \\ c_{22}^{\circ} &= \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} \right) - \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right) \\ c_{12}^{\circ} &= i \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right), \quad c_{33}^{\circ} = \lambda^2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Из соотношений (1.3) и (1.4) следует также выражение

$$(ds)^2 = d\mathbf{R}^{\circ} \cdot \mathbf{C}^{\circ} \cdot d\mathbf{R}^{\circ} (ds^{\circ})^2 \quad (1.6)$$

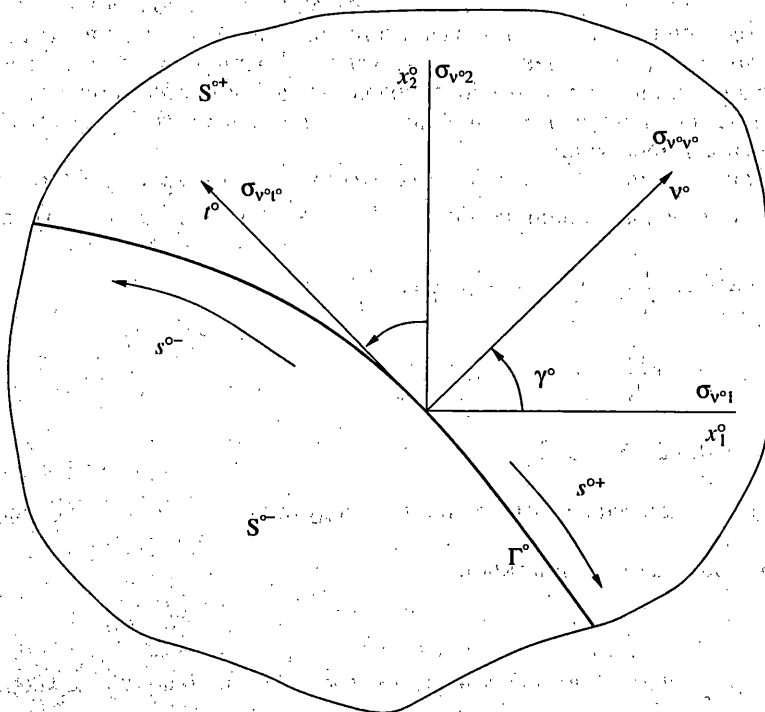
Далее, имеет место однородное комплексное уравнение равновесия

$$\partial\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 / \partial \bar{\zeta} + \partial\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 / \partial \zeta = 0 \quad (1.7)$$

Здесь $\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_i$ – комплексные компоненты (вспомогательного) тензора номинальных напряжений, определяемые законом упругости

$$\begin{aligned} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 &= 2 \frac{\partial \Phi}{\partial (\partial z / \partial \zeta)} \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 &= 2 \frac{\partial \Phi}{\partial (\partial z / \partial \bar{\zeta})}, \quad \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_{33} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\Phi = \Phi \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta}, \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}}, \lambda \right)$$



где Φ – упругий потенциал (плотность энергии деформации). Для комплексных условных напряжений имеем выражения

$$\Sigma_1^0 \equiv \sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 = \operatorname{Re} \left[\frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 \right]$$

$$\Sigma_2^0 \equiv \sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0 + i2\sigma_{12}^0 = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 \quad (1.9)$$

$$\Sigma_5^0 \equiv \sigma_{33}^0 = \partial\Phi / \partial\lambda$$

Редуцированный стандартный материал определяется упругим потенциалом

$$\Phi = \sigma^* \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} + \alpha \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}}$$

$$\sigma^* = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \alpha = \frac{E}{(1+\nu)}$$

где σ^* , α – упругие постоянные, причем первая из них определяет и предварительное всестороннее растяжение. Введенный материал дает возможность ввести функции комплексной переменной

$$z = \int \Phi(\zeta) d\zeta + \int \overline{\Psi(\zeta)} d\bar{\zeta} \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1}{2\alpha} = \Phi(\zeta), \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2}{2\alpha} = \overline{\Psi(\zeta)}$$

и использовать при геометрически нелинейном подходе для получения точных решений все методы решения краевых задач линейной плоской задаче (в том числе и предложенный метод расчленения краевых условий). При этом проведенная редукция никак не отражается на асимптотиках напряженно-деформированного состояния. Как и в линейной теории решения многих задач здесь не зависят от упругих постоянных и предварительной деформации.

На недеформированной плоскости рассмотрим (фигура) контур Γ° , ограничивающий область S° либо разделяющий области $S^{\circ-}$ и $S^{\circ+}$. Имеют место выражения

$$v_1^\circ = t_2^\circ = \cos \gamma^\circ = \frac{dx_2^\circ}{ds}, \quad v_2^\circ = -t_1^\circ = \sin \gamma^\circ = -\frac{dx_1^\circ}{ds} \quad (1.11)$$

$$v_1^\circ + iv_2^\circ = e^{i\gamma^\circ} = -i \frac{d\zeta^\circ}{ds}, \quad t_1^\circ + it_2^\circ = ie^{i\gamma^\circ} = \frac{d\bar{\zeta}^\circ}{ds}$$

$$d/ds^\circ = i(e^{i\gamma^\circ} \partial/\partial\zeta^\circ - e^{-i\gamma^\circ} \partial/\partial\bar{\zeta}^\circ)$$

Стандартными (классическими) являются следующие граничные условия и условия сопряжения:

геометрические (кинематические):

$$z = z(s^\circ), \quad z^- = z^+ \quad (1.12)$$

где $z(s^\circ)$ – заданная комплексная конфигурация деформированного граничного контура;

условие заделки

$$z = \zeta \quad (1.13)$$

статические (силовые):

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 e^{i\gamma^\circ} + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 e^{-i\gamma^\circ} = 2[\sigma_{v^\circ v^\circ}(s^\circ) + i\sigma_{v^\circ t^\circ}(s^\circ)] \quad (1.14)$$

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^- e^{i\gamma^\circ} + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^- e^{-i\gamma^\circ} = \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^+ e^{i\gamma^\circ} + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^+ e^{-i\gamma^\circ}$$

Перейдем к рассмотрению "нетрадиционных" граничных условий и условий сопряжения.

2. С помощью последнего соотношения в (1.11) можно записать

$$\frac{dz}{ds^\circ} = i \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta^\circ} e^{i\gamma^\circ} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}^\circ} e^{-i\gamma^\circ} \right)$$

С учетом полученного выражения и второго условия (1.12) геометрическое условие сопряжения можно заменить дисторсионным условием сопряжения

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta^\circ} \right)^- e^{i\gamma^\circ} - \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}^\circ} \right)^- e^{-i\gamma^\circ} = \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta^\circ} \right)^+ e^{i\gamma^\circ} - \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}^\circ} \right)^+ e^{-i\gamma^\circ} \quad (2.1)$$

условие (1.12) – дисторсионным граничным условием

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta^\circ} e^{i\gamma^\circ} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}^\circ} e^{-i\gamma^\circ} = -i \frac{dz(s^\circ)}{ds^\circ} \quad (2.2)$$

Частным случаем последнего будет согласно условию заделки (1.13) – условие жесткого края

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1 \right) e^{i\gamma^\circ} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\gamma^\circ} = 0 \quad (2.3)$$

Нетрудно видеть, что это условие выполняется и при замене z на $z + c$, т.е. в отличие от условия заделки условие жесткого края допускает поступательное смещение края как жесткого целого. Это различие существенно проявляется в случае многосвязных областей, где смещение частичного контура сопровождается появлением деформации. При односвязной области отмеченное различие несущественно. Что касается условий сопряжения, то здесь "более мягкое" дисторсионное обладает рядом преимуществ перед геометрическим. Они могут быть полезными при рассмотрении (в физике твердого тела) границ с проскальзыванием (см. ниже). Кроме того дисторсионные условия часто бывают однотипными с силовыми (статическими) [1–6].

3. При рассмотрении деформации края оболочки автором были введены деформационные граничные условия, преимущество которых состояло в том, что они формулировались в терминах компонент деформации. Применительно к плоской задаче (пластина) они сводятся к двум условиям. Пусть $\lambda_t = ds/ds^\circ$ – кратность удлинения вдоль граничного контура. Из соотношений (1.6) находим $\lambda_t^2 = (ds/ds^\circ)^2 = d\mathbf{R}^\circ \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{R}^\circ$. Но вдоль контура $d\mathbf{R}^\circ = (\partial \mathbf{R}^\circ / ds^\circ) ds^\circ$. Подставляя это выражение в предыдущее, получаем с учетом последнего из равенств (1.11) для кратности удлинения границы

$$\lambda_t = \left[\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i2\gamma^\circ} - \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} e^{i2\gamma^\circ} \right]^{1/2} \quad (3.1)$$

Далее, используя последнее из выражений (1.11), находим

$$\frac{d^2 z}{ds^{\circ 2}} = -\frac{\partial^2 z}{\partial \zeta^2} e^{i2\gamma^\circ} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial^2 z}{\partial \bar{\zeta}^2} e^{-i2\gamma^\circ} - \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} e^{i\gamma^\circ} + \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\gamma^\circ} \right) \frac{d\gamma^\circ}{ds^\circ} \quad (3.2)$$

Величина $\kappa^\circ = d\gamma^\circ / ds^\circ$ является кривизной недеформированного контура. Соответственно, $\kappa = d\gamma / ds$ – кривизна деформированного контура. Дифференцируя по дуге третья из выражений (1.11) получаем выражение

$$\kappa_t^\circ \equiv \frac{\partial \gamma^\circ}{\partial s^\circ} = -ie^{-i\gamma^\circ} \frac{d^2 \zeta}{ds^{\circ 2}} = -i \frac{d\bar{\zeta}}{ds^\circ} \frac{d^2 \zeta}{ds^{\circ 2}}$$

Аналогично, опуская верхний индекс и заменяя ζ на z , находим

$$\kappa_t \equiv \frac{d\gamma}{ds} = -i \frac{d\bar{z}}{ds} \frac{d^2 z}{ds^2} = -i \frac{d\bar{z}}{ds^\circ} \frac{d^2 z}{ds^{\circ 2}} \left(\frac{ds}{ds^\circ} \right)^{-3} = -i \lambda_t^{-3} \frac{d\bar{z}}{ds^\circ} \frac{d^2 z}{ds^{\circ 2}}$$

Таким образом, условия

$$\lambda^- = \lambda^+, \quad \left(\frac{d^2 z}{ds^{\circ 2}} \right)^- = \left(\frac{d^2 z}{ds^{\circ 2}} \right)^+ \quad (3.3)$$

или

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i2\gamma^\circ} - \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} e^{i2\gamma^\circ} \right)^- = (\cdot)^+ \\ \left[-\frac{\partial^2 z}{\partial \zeta^2} e^{i2\gamma^\circ} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial^2 z}{\partial \bar{\zeta}^2} e^{-i2\gamma^\circ} - \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} e^{i\gamma^\circ} + \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\gamma^\circ} \right) \frac{d\gamma^\circ}{ds^\circ} \right] = [\cdot]^+ \quad (3.4)$$

являются деформационными условиями сопряжения, обеспечивающими непрерывность удлинения и кривизны общей границы сопрягаемых областей. Далее, поскольку выражение (3.2) нечувствительно к замене z на $z + a + bs^\circ$, деформационные условия допускают перемещение и поворот контура как жесткого целого.

4. Рассмотрим используемые в физике твердого тела условия сопряжения на границе с проскальзыванием (slipping interface). Они имеют следующий вид:

$$\sigma_{v^\circ v^\circ}^-(s^\circ) = \sigma_{v^\circ v^\circ}^+(s^\circ), \quad \sigma_{v^\circ r^\circ}^-(s^\circ) = \sigma_{v^\circ r^\circ}^+(s^\circ) = 0, \quad u_{v^\circ}^- = u_{v^\circ}^+ \quad (4.1)$$

т.е. на контуре сопряжения непрерывны нормальные напряжения и смещения и отсутствуют тангенциальные напряжения. В соответствии со сказанным о дисторсионном условии, заменим последнее условие в (4.1) на дисторсионное $(du_{v^\circ} / ds^\circ)^- = (du_{v^\circ} / ds^\circ)^+$.

Прежде всего имеем

$$u_{v^\circ} + iu_{r^\circ} = e^{-i\gamma^\circ} (u_1 + iu_2) = e^{-i\gamma^\circ} (z - \zeta)$$

Дифференцируя с учетом (1.11) это равенство по дуге, находим

$$\begin{aligned} \frac{d(u_{v^\circ} + iu_{r^\circ})}{ds^\circ} &= -ie^{-i\gamma^\circ} (z - \zeta) \frac{d\gamma^\circ}{ds^\circ} + i \left(e^{i\gamma^\circ} \frac{\partial(z - \zeta)}{\partial\zeta} - e^{-i\gamma^\circ} \frac{\partial(z - \zeta)}{\partial\bar{\zeta}} \right) = \\ &= i \left[\left(\frac{\partial z}{\partial\zeta} - 1 \right) e^{i\gamma^\circ} - \frac{\partial z}{\partial\zeta} e^{-i\gamma^\circ} - (z - \zeta) e^{-i\gamma^\circ} \frac{d\gamma^\circ}{ds^\circ} \right] \end{aligned}$$

Отсюда следует условие сопряжения

$$\text{Im} \left[\frac{\partial z}{\partial\zeta} e^{i\gamma^\circ} - \frac{\partial z}{\partial\zeta} e^{-i\gamma^\circ} - (z - \zeta) e^{i\gamma^\circ} \frac{d\gamma^\circ}{ds^\circ} \right]^- = \text{Im}[\cdot]^+ \quad (4.2)$$

Внутренние границы с проскальзыванием обычно имеют место на прямолинейных внутренних границах двойникования и превращений типа мартенситных. При этом $\gamma^\circ = \text{const}$ и в соотношении (4.2) можно опустить последнее слагаемое.

Остальные из условий (4.1) согласно (1.14) принимают вид

$$\begin{aligned} \text{Re}[\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 e^{-i2\gamma^\circ}]^- &= \text{Re}[\cdot]^+ \\ \text{Im}[\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 e^{-i2\gamma^\circ}]^- &= \\ = \text{Im}[\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 e^{-i2\gamma^\circ}]^+ &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

С учетом последнего равенства предшествующее ему может быть записано в более удобном виде

$$[\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 e^{i\gamma^\circ} + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 e^{-i\gamma^\circ}]^- = [\cdot]^+ \quad (4.4)$$

5. В физике твердого тела рассматривают гетерогенные (многофазные) структуры. При этом на границе различных структур помимо традиционных условий сопряжения вводится дополнительное, так называемое термодинамическое. Используя комплексный подход, получим его. Рассмотрим соприкасающиеся по границе Γ° области $S^{\circ-}$, $S^{\circ+}$. Рассмотрим справедливое в силу однородного уравнения равновесия (1.7) интегральное равенство

$$T = \int_{s^\circ} \left[\left(\frac{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1}{\partial\bar{\zeta}} + \frac{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2}{\partial\zeta} \right) \frac{\partial z}{\partial\zeta} + \left(\frac{\partial\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1}{\partial\zeta} + \frac{\partial\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2}{\partial\bar{\zeta}} \right) \frac{\partial z}{\partial\bar{\zeta}} \right] ds^\circ = 0 \quad (5.1)$$

Используя комплексные соотношения [5]:

$$\int_{s^{\circ}} u \frac{\partial v}{\partial \zeta} dS^{\circ} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^{\circ}} e^{-i\gamma^{\circ}} uv ds^{\circ} - \int_{s^{\circ}} v \frac{\partial u}{\partial \zeta} dS^{\circ}$$

$$\int_{s^{\circ}} u \frac{\partial v}{\partial \bar{\zeta}} dS^{\circ} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^{\circ}} e^{-i\gamma^{\circ}} uv ds^{\circ} - \int_{s^{\circ}} v \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} dS^{\circ}$$

$$\int_{s^{\circ}} \frac{\partial v}{\partial \zeta} dS^{\circ} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^{\circ}} e^{-i\gamma^{\circ}} v ds^{\circ}, \quad \int_{s^{\circ}} \frac{\partial v}{\partial \bar{\zeta}} dS^{\circ} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^{\circ}} e^{i\gamma^{\circ}} v ds^{\circ}$$

и меняя порядок дифференцирования, находим из выражения (5.1):

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = -2 \int_{s^{\circ-} + s^{\circ+}} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial(\partial z / \partial \zeta)} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial(\partial z / \partial \bar{\zeta})} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial \Phi}{\partial(\partial z / \partial \zeta)} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial(\partial z / \partial \bar{\zeta})} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) \Big] ds^{\circ} = -2 \int_{s^{\circ-} + s^{\circ+}} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} dS^{\circ} = \int_{\Gamma^{\circ-} + \Gamma^{\circ+}} \Phi e^{i\gamma^{\circ}} ds^{\circ}$$

$$T_2 = \int_{\Gamma^{\circ-} + \Gamma^{\circ+}} \left[\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 e^{i\gamma^{\circ}} + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 e^{-i\gamma^{\circ}} \right] \frac{\partial z}{\partial \zeta} +$$

$$+ \left[\overline{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1} e^{-i\gamma^{\circ}} + \overline{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2} e^{i\gamma^{\circ}} \right] \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \Big] ds^{\circ} =$$

$$= \int_{\Gamma^{\circ-} + \Gamma^{\circ+}} \left[(\sigma_{v^{\circ}1} + i\sigma_{v^{\circ}2}) \frac{\partial z}{\partial \zeta} + (\overline{\sigma_{v^{\circ}1} + i\sigma_{v^{\circ}2}}) \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right] ds^{\circ}$$

С учетом того, что $ds^{\circ-} = -ds^{\circ+} = ds^{\circ}$ (т.е. общий граничный контур проходится в противоположных направлениях, фигура) имеем из предыдущих соотношений

$$\int_{\Gamma^{\circ}} e^{i\gamma^{\circ}} \left[\left(\Phi - \sigma_{v^{\circ}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_v^{\circ}} \right) - i\sigma_{v^{\circ}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_i^{\circ}} \right] ds_i^{\circ} = 0 \quad (5.2)$$

Это и есть полученное интегральное термодинамическое условие сопряжения. Пояним этот термин, выявив структуру подынтегрального выражения. Имеем

$$\sigma_{v^{\circ}} = \sigma_{v^{\circ}1} \mathbf{g}_1 + \sigma_{v^{\circ}2} \mathbf{g}_2, \quad \mathbf{r} = x_1 \mathbf{g}_1 + x_2 \mathbf{g}_2$$

$$\sigma_{v^{\circ}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_v^{\circ}} = \frac{\sigma_{v^{\circ}1} + i\sigma_{v^{\circ}2}}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} e^{-i\gamma^{\circ}} + \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} e^{i\gamma^{\circ}} \right) + \frac{\overline{\sigma_{v^{\circ}1} + i\sigma_{v^{\circ}2}}}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} e^{i\gamma^{\circ}} + \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\gamma^{\circ}} \right)$$

$$\sigma_{v^{\circ}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_i^{\circ}} = i \left[\frac{\sigma_{v^{\circ}1} + i\sigma_{v^{\circ}2}}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} e^{i\gamma^{\circ}} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\gamma^{\circ}} \right) + \frac{\overline{\sigma_{v^{\circ}1} + i\sigma_{v^{\circ}2}}}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} e^{i\gamma^{\circ}} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\gamma^{\circ}} \right) \right]$$

С помощью последних выражений и того, что $\gamma^{\circ+} = \gamma^{\circ-}$, условие (5.2) записывается в виде

$$\int_{\Gamma^{\circ}} e^{i\gamma^{\circ}} \left[\left(\Phi - \sigma_{v^{\circ}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_v^{\circ}} \right) - i\sigma_{v^{\circ}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_i^{\circ}} \right] ds_i^{\circ} = 0$$

Последнее слагаемое в квадратной скобке очевидно непрерывно и может быть опущено. Преобразуем первое. Прежде всего имеют место соотношения [5]:

$$\begin{aligned}\sigma_{\nu^{\circ}}^{\circ} &= \nu^{\circ} \cdot \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_{\nu^{\circ}}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_{\nu}} \frac{\partial s_{\nu}}{\partial s_{\nu^{\circ}}} = \lambda_{\nu} \nu \\ \nu ds_{\nu} &= J\nu^{\circ} \cdot F^{-1} ds_{\nu^{\circ}} \\ \lambda_{\nu} &= \left[\frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} e^{i2\gamma^{\circ}} + \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \zeta} e^{-i2\gamma^{\circ}} \right]^{1/2}\end{aligned}\quad (5.3)$$

Здесь λ_{ν} – кратность удлинения по направлению нормали, а F^{-1} – тензор, обратный F . Из соотношения (5.3) следует

$$(\partial s_{\nu} / \partial s_{\nu^{\circ}})^2 = J^2 \nu^{\circ} \cdot (F^{-1} \cdot F^{-1*}) \cdot \nu^{\circ} = J^2 \nu^{\circ} \cdot (F^* \cdot F)^{-1} \cdot \nu^{\circ} = J^2 \nu^{\circ} \cdot C^{\circ-1} \cdot \nu^{\circ}$$

и

$$\nu = \nu^{\circ} \cdot F^{-1} / \sqrt{\nu^{\circ} \cdot C^{-1} \cdot \nu^{\circ}} = F^{-1*} \cdot \nu^{\circ} / \sqrt{\nu^{\circ} \cdot C^{\circ-1} \cdot \nu^{\circ}} \quad (5.4)$$

Здесь (*) – знак сопряжения тензора, а $C^{\circ-1}$ – тензор, обратный тензору Коши – Лагранжа. Теперь из соотношений (5.3) и (5.4) находим

$$\Phi - \sigma_{\nu^{\circ}}^{\circ} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_{\nu^{\circ}}} = \Phi - \lambda_{\nu} \frac{\nu^{\circ} \cdot (F^{-1} \cdot J\Sigma \cdot F^{-1*}) \cdot \nu^{\circ}}{(\nu^{\circ} \cdot C^{\circ-1} \cdot \nu^{\circ})^{1/2}} \quad (5.5)$$

При термодинамическом расширении этой величины (т.е. при замене плотности энергии деформации Φ плотностью свободной энергии $\Phi - TS$, где T – абсолютная температура, а S – плотность энтропии) экстенсив (5.5) переходит в следующий:

$$(\Phi - TS) - \sigma_{\nu^{\circ}}^{\circ} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_{\nu^{\circ}}} = (\Phi - TS) - \lambda_{\nu} \frac{\nu^{\circ} \cdot (F^{-1} \cdot J\Sigma \cdot F^{-1*}) \cdot \nu^{\circ}}{(\nu^{\circ} \cdot C^{\circ-1} \cdot \nu^{\circ})^{1/2}} \quad (5.6)$$

Таким образом, при данном подходе (и это представляется более естественным) вместо единого тензора химического потенциала [8–10] вводится экстенсив с двумя слагаемыми: "гидростатическим" (плотность свободной энергии) и "твердотельной" поправкой. Последняя зависит от нормальных компонент симметричного тензора Пиала – Кирхгофа ($F^{-1} \cdot J\Sigma \cdot F^{-1*}$) и обратного тензора Коши – Лагранжа ($C^{\circ-1}$). О тензорной природе "химических потенциалов" подробно сказано в [8–10].

Перечисленные "нестандартные" типы граничных условий и условий сопряжения являются статико-геометрическими соотношениями, никак не завися от свойств материала, могут использоваться при произвольных напряженно-деформированных состояний и материалах.

6. В качестве иллюстрации сказанному приведем полученное в [13] решение плоской задачи о сопряжении упругих включения ($S^{\circ-}$) и бесконечной плоскости ($S^{\circ+}$) с разными упругими свойствами по линии сопряжения Γ° .

Примем редуцированный стандартный материал (1.10). Для него из статического (1.14) и дисторсионного (2.1) условий сопряжения следует

$$\Phi^{-}(\chi) = \sigma_0 / \sigma_{-}^*, \quad \Psi^{-}(\chi) = -i\tau_0 / \alpha_{-} \quad (6.1)$$

$$\Phi^{+}(\chi) = \frac{\sigma_{-}^* + \alpha_{+}}{\sigma_{+}^* + \alpha_{+}} \frac{\sigma_0}{\sigma_{-}^*} + i \frac{\alpha_{+} - \alpha_{-}}{\sigma_{+}^* + \alpha_{+}} \frac{\tau_0}{\alpha_{-}} \left(\frac{1}{m} + \frac{1-m^2}{m} \frac{1}{m\chi^2 - 1} \right)$$

$$\Psi^{+}(\chi) = -i \frac{\sigma_{+}^* + \alpha_{-}}{\sigma_{+}^* + \alpha_{+}} \frac{\tau_0}{\alpha_{-}} + \frac{\sigma_{+}^* - \sigma_{-}^*}{\sigma_{+}^* + \alpha_{+}} \frac{\sigma_0}{\sigma_{-}^*} \left(\frac{1}{m} + \frac{1-m^2}{m} \frac{1}{m\chi^2 - 1} \right)$$

Здесь χ – комплексная переменная конформного отображения внешности эллипса на единичный круг

$$\zeta(\chi) = \frac{a+b}{2}(\chi^{-1} + m\chi), \quad m = \frac{a-b}{a+b}$$

а постоянные σ_0 и τ_0 определяют, соответственно, "объемную" и сдвиговую однородные деформации. Таким образом, из первых двух условий сопряжения в рассматриваемой задаче следует, что включение должно иметь эллиптическую форму и быть в однородном напряженно-деформированном состоянии (это и есть рассмотренная в [13] нелинейная обратная задача Эшелби).

Наконец, подстановка подсчитанных по полученным функциям Гурса – Колосова величин в интегральное термодинамическое условие (5.2) приводит к равенству

$$\begin{aligned} & (\sigma_+^* - \sigma_-^*)(\sigma_-^* + \alpha_+)(\sigma_0 / \sigma_-^*)^2 + (\alpha_+ - \alpha_-)(\sigma_+^* + \alpha_-)(\tau_0 / \alpha_-)^2 + \\ & + i(\sigma_+^* - \sigma_-^*)(\alpha_+ - \alpha_-) \frac{1-m^2}{m} \frac{\sigma_0}{\sigma_-^*} \frac{\tau_0}{\alpha_-} = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Видно, что при $\sigma_-^* = \sigma_+^*$, $\alpha_- = \alpha_+$, т.е. при равных упругих постоянных, термодинамическое условие сопряжения удовлетворяется тождественно. При неравных же постоянных оно накладывает довольно жесткое условие ограничение на упругие постоянные и напряженное состояние. В литературе [8] приводится и точечное термодинамическое условие, состоящее в приравнивании нулю подынтегрального выражения в интегральном термодинамическом условии. В рассмотренном примере оно не выполняется. Отметим, что приведенная форма термодинамического условия была, по существу, получена [5] при рассмотрении совсем другой проблемы – комплексных инвариантных интегралов (J -интегралов). Подробное изложение круга вопросов, связанных с авторским подходом к термодинамическому условию сопряжения (в том числе использованного здесь малосжимаемого материала), дано в [13].

В качестве второго примера рассмотрим две упругие полуплоскости, сопрягаемые по оси абсцисс ($x_2^0 = 0$). Как и выше, примем редуцированный стандартный материал. С учетом того, что на линии сопряжения $\gamma^0 = 0$, условия сопряжения (1.14), (2.1) и (4.1)–(4.3) принимают согласно (1.10) следующий вид:

$$\sigma_-^* \Phi^-(x_1^0) + \alpha_- \overline{\Psi^-(x_1^0)} = \sigma_+^* \Phi^+(x_1^0) + \alpha_+ \overline{\Psi^+(x_1^0)} \quad (6.3)$$

$$\Phi^-(x_1^0) - \overline{\Psi^-(x_1^0)} = \Phi^+(x_1^0) - \overline{\Psi^+(x_1^0)} \quad (6.4)$$

$$(\Phi^-(x_1^0) - \overline{\Phi^-(x_1^0)}) - (\Psi^-(x_1^0) - \overline{\Psi^-(x_1^0)}) = (\Phi^+(x_1^0) - \overline{\Phi^+(x_1^0)}) - (\Psi^+(x_1^0) - \overline{\Psi^+(x_1^0)}) \quad (6.5)$$

$$\sigma_-^* (\Phi^-(x_1^0) - \overline{\Phi^-(x_1^0)}) - \alpha_- (\Psi^-(x_1^0) - \overline{\Psi^-(x_1^0)}) = 0 \quad (6.6)$$

$$\sigma_+^* (\Phi^+(x_1^0) - \overline{\Phi^+(x_1^0)}) - \alpha_+ (\Psi^+(x_1^0) - \overline{\Psi^+(x_1^0)}) = 0 \quad (6.7)$$

Из соотношений (6.3) и (6.4) (статическое и дислокационное условия) следует

$$\begin{aligned} \Phi^+(x_1^0) &= \frac{\sigma_-^* + \alpha_+}{\sigma_+^* + \alpha_+} \Phi^-(x_1^0) + \frac{\alpha_- - \alpha_+}{\sigma_+^* + \alpha_+} \overline{\Psi^-(x_1^0)} \\ \Psi^+(x_1^0) &= \frac{\sigma_+^* + \alpha_-}{\sigma_+^* + \alpha_+} \Psi^-(x_1^0) + \frac{\sigma_-^* - \sigma_+^*}{\sigma_+^* + \alpha_+} \overline{\Phi^-(x_1^0)} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Из соотношений же (6.3) и (6.5)–(6.7) (граница с проскальзыванием) следует

$$\begin{aligned}\Psi^-(x_1^0) - \overline{\Psi^-(x_1^0)} &= \frac{\sigma_-^*}{\alpha_-} (\Phi^-(x_1^0) - \overline{\Phi^-(x_1^0)}) \\ \Phi^+(x_1^0) - \overline{\Phi^+(x_1^0)} &= \frac{\alpha_+ (\alpha_- - \sigma_-^*)}{\alpha_- (\alpha_+ - \sigma_+^*)} (\Phi^-(x_1^0) - \overline{\Phi^-(x_1^0)}) \\ \Psi^+(x_1^0) - \overline{\Psi^+(x_1^0)} &= \frac{\sigma_+^* (\alpha_- - \sigma_-^*)}{\alpha_- (\alpha_+ - \sigma_+^*)} (\Phi^-(x_1^0) - \overline{\Phi^-(x_1^0)})\end{aligned}\quad (6.9)$$

Примем функции Гурса – Колосова

$$\Phi^\pm(\zeta) = a_0^\pm = \frac{\sigma_0^\pm}{\sigma_-^*}, \quad \Psi^\pm(\zeta) = b_0^\pm = -i \frac{\tau_0^\pm}{\alpha_-} \quad (6.10)$$

отвечающие согласно выражениям (1.9) соотношениям $\sigma_{11}^{\circ\pm} = \sigma_{22}^{\circ\pm} = \sigma_0^\pm$, $\sigma_{12}^{\circ\pm} = \tau_0^\pm$, где σ_0^\pm , τ_0^\pm – однородные, соответственно в полуплоскостях S^+ , S^- , всесторонние растягивающие и сдвигающие напряжения. Подстановка выражений (6.10) в (6.8) приводит к связи между напряжениями в полуплоскостях

$$\frac{\sigma_0^+}{\sigma_+^*} = \frac{\sigma_-^* + \alpha_+}{\sigma_+^* + \alpha_+} \frac{\sigma_0^-}{\sigma_-^*} + i \frac{\alpha_- - \alpha_+}{\sigma_+^* + \alpha_+} \frac{\tau_0^-}{\alpha_-}, \quad \frac{\tau_0^+}{\alpha_+} = \frac{\sigma_+^* + \alpha_-}{\sigma_+^* + \alpha_+} \frac{\tau_0^-}{\alpha_-} + i \frac{\sigma_-^* - \sigma_+^*}{\sigma_+^* + \alpha_+} \frac{\sigma_0^-}{\sigma_-^*}$$

Что касается границы с проскальзыванием, то для нее согласно соотношениям (6.9) следует лишь условие $\tau_0^+ = \tau_0^- = 0$. Таким образом, в отличие от дисторсионного условия сопряжения на границе с проскальзыванием (в рассматриваемом случае) не связывает напряженное состояние и воспрещает существование сдвигающего напряжения. Приведенный пример дает повод усомниться в "доброкачественности" используемого в физике твердого тела условия сопряжения на границе с проскальзыванием. Напомним, что дисторсионное условие также дает возможность проскальзывания вдоль прямолинейной внутренней границы.

7. Приведем несколько соображений по изложенному в статье. Прежде всего, все приведенные условия имеют статико-геометрический характер, будучи никак не связанными со свойствами материала. Кроме того, они применимы и для других напряженно-деформированных состояний. Полные (числом четыре) деформационные условия были получены и широко использованы применительно к теории оболочек [14–15]. О следящей нагрузке сказано в [5, 16]. Три условия (статическое, дисторсионное и термодинамическое) используются и во многих других двумерных проблемах (в том числе при антиплоской деформации и осесимметричной деформации тел вращения) и формулируются в терминах функций комплексной переменной. Можно сформулировать расширенное вариационное начало, для которого все три условия были бы естественными. Выше уже было сказано о преимуществе дисторсионного условия перед геометрическим. Следует отметить, что в нелинейных задачах чаще всего используются именно компоненты тензора дисторсии (градиента движения), определяющие деформации и напряжения. Поэтому естественно использовать и дисторсионные граничные условия. В механике при сопряжении двух областей с разными механическими свойствами обычно не используют термодинамического условия сопряжения. Приведенный выше пример вызывает сомнение в обоснованности такого подхода. Нуждается также в дальнейшем пристальном рассмотрении условие сопряжения на границе с проскальзыванием.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта ведущих научных школ (№ 00-15-96027) и гранта РФФИ (№ 99-01-00686).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
2. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 190 с.
3. Черных К.Ф. Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. М.: Наука. Физматлит. 1996. 287 с.
4. Chernykh K.F. An Introduction to Modern Anisotropic Elasticity. N.Y.: Begell Publ. House, 1998. 248 p.
5. Черных К.Ф. Нелинейная сингулярная упругость. Ч. 1. Теория. СПб: Изд-во СПб ун-та, 1999. 275 с.
6. Черных К.Ф. Нелинейная сингулярная упругость. Ч. 2. Приложения. СПб: Изд-во СПб ун-та, 1999. 195 с.
7. Новожилов В.В., Черных К.Ф. Об "истинных" мерах напряжений и деформаций в нелинейной механике деформируемого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 73–79.
8. Гринфелд М.А. Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М.: Наука, 1990. 312 с.
9. Кондауров В.И., Никитин Л.В. О фазовых переходах первого рода в нелинейно-упругих средах // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1348–1351.
10. Фрейдин А.Б., Чискис А.М. Зоны фазовых переходов в нелинейно-упругих изотропных материалах. Ч. 1 // Изв. АН СССР. МТТ. 1994. № 4. С. 91–109.
11. Волков А.Е., Лихачев В.А., Шихобалов Л.С. Теория границ зерен как самостоятельных несовершенств кристалла // Физика металлов и металловедение. 1979. Т. 47. Вып. 6. С. 1127–1140.
12. Волков А.Е., Лихачев В.А., Шихобалов Л.С. Континуальная теория границ раздела в гетерогенных кристаллах // Физика металлов и металловедение. 1981. Т. 51. Вып. 5. С. 935–944.
13. Черных К.Ф. О большеугольных границах (плоская задача) // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела. 2000. Вып. 3. СПб.: С. 14–34.
14. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 2. Л.: Изд-во ЛГУ, 1964. 395 с.
15. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.
16. Черных К.Ф., Петренко И.В. Следящая нагрузка в нелинейной плоской задаче // ПМТФ. 1996. Т. 37. № 4. С. 145–148.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
15.03.2001