МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2002

УДК 539.3:534.1

© 2002 г. Д.В. ГЕОРГИЕВСКИЙ, Б.Е. ПОБЕДРЯ

О ПОНЯТИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ В УПРУГОЙ И ВЯЗКОУПРУГОЙ МОДЕЛЯХ

Понятию "устойчивость" всегда пытались дать точное математическое определение и тем самым построить математическую модель перехода движения или равновесия (вообще говоря, процесса) из "устойчивого" состояния в "неустойчивое". Такие попытки предложить универсальное определение оказывались в основном неудачными, поскольку в каждой конкретной задаче из физического смысла под термином "устойчивость" подразумевается что-то свое. Например, в задачах статики конструкций это свойство системы сохранять равновесное положение под действием тех или иных нагрузок. В проблемах динамики и колебаний твердых тел это отклонение возмущенного движения от заданного не более чем на определенную величину. В гидродинамических же приложениях под устойчивостью чаще понимают свойство потока оставаться ламинарным, а под потерей устойчивости – его переход в турбулентный режим. К данной проблематике следует отнести и задачи о нарушении внутренней структуры твердых тел на микро-, мезо- и макроуровнях, возникновении фазовых переходов и превращений [1].

1. Введение. Хорошо известны иллюстративные примеры об устойчивом и неустойчивом равновесиях шарика в поле силы тяжести. Равновесие шарика в локальном минимуме устойчиво, так как малых отклонений в любом направлении недостаточно для перемещения шарика в другие возможные равновесные состояния. Равновесие, шарика в локальном максимуме неустойчиво, так как сколь угодно малое отклонение в любом направлении приводит к тому, что шарик будет удаляться от этого максимума. В седловой точке шарик устойчив относительно одного класса возмущений и неустойчив относительно другого класса. С устойчивостью и неустойчивостью положений равновесия связаны понятия локальной и глобальной устойчивости системы. Более тонким анализом поведения потенциальных функций вблизи критических точек различной степени вырожденности занимается теория катастроф [2].

Во всех исследованиях, относящихся к устойчивости систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы важно знать и математически уметь формулировать следующее:

а) какое состояние системы или какой процесс выбирается в качестве невозмущенного;

в) какова природа, а следовательно, каков класс налагаемых на этот невозмущенный процесс возмущений (начальных и постоянно действующих);

с) каков математический критерий устойчивости процесса, выбранного в п. *а*), относительно возмущений, выбранных в п. *в*).

Неустойчивый процесс, согласно Н.Г. Четаеву [3], в природе не встречается, т.е. ненаблюдаем. Поэтому свойство устойчивости наряду с существованием и единственностью является важным свойством решений краевых задач. Поскольку всегда изучаются не реальные объекты, а идеализированные модели (континуум, идеальная жидкость, упругое тело и др.), то принцип Четаева относится в какой-то мере и к математической модели.

2. Статический подход Эйлера. Остановимся далее на различных подходах к понятию устойчивости в механике деформируемого твердого тела и прежде всего на статическом подходе, основы которого были заложены Л. Эйлером. Рассматриваются только равновесные положения системы, причем признаком неустойчивости некоторой формы равновесия является наличие смежной формы, реализуемой при тех же внешних нагрузках. Если же малых возмущений недостаточно, чтобы перевести систему в соседнее равновесное состояние или же соседних состояний вообще нет, то исходная форма считается устойчивой.

Для иллюстрации преимуществ и недостатков статического подхода обратимся к классической задаче о продольном изгибе упругой балки [4]. Пусть балка шарнирно оперта на обоих концах $z = 0$ и $z = l$, а на конце $z = l$ действует сжимающая сила P. Запишем уравнение равновесия в виде

$$EIw^{IV} + Pw'' = 0 \qquad (2.1)$$

где $w(z)$ – прогиб балки, EI – постоянная по длине изгибная жесткость.

Граничные условия

$$w(0) = w(l) = 0, \quad w''(0) = w''(l) = 0 \qquad (2.2)$$

означают, что моменты в торцевых сечениях балки отсутствуют, а торцы смещаются лишь вдоль оси приложения силы.

Нетрудно найти общее решение уравнения (2.1):

$$w = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}z\right) + A_2 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}z\right) + A_3 z + A_4 \qquad (2.3)$$

При $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$ получаем прямолинейное состояние равновесия $w \equiv 0$, удовлетворяющее граничным условиям (2.2). Существуют ли другие нетривиальные решения, соответствующие искривленным равновесным формам балки?

Подставляя (2.3) в (2.2) и приравнивая нулю определитель системы относительно A_1, A_2, A_3, A_4, получим в итоге простое характеристическое уравнение

$$\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}l\right) = 0 \qquad (2.4)$$

Если $P = \pi^2 n^2 EI/l^2 \equiv n^2 P_* \equiv P_n$, то существует нетривиальный набор констант: $A_1 = A_3 = A_4 = 0$, $A_2 = A \in R$ с собственными функциями

$$w_n = A \sin \frac{\pi n z}{l} \qquad (2.5)$$

Значение $P_* = \pi^2 EI/l^2$ носит название эйлеровой критической силы. При $0 < P < P_*$ прямолинейное равновесие балки устойчиво относительно всякого рода возмущений. Если же сила P принимает дискретный набор значений P_n (n = 1, 2, ...), которые называются первой, второй и т.д. критическими силами, то существуют синусоидальные формы равновесия с одной, двумя и т.д. полуволнами (2.5) и с произвольными амплитудами прогиба A. При этих значениях силы P прямолинейное положение балки будет, очевидно, неустойчивым.

Заметим, что структура выражений для P_n сохраняется и при других способах опирания:

$$P_n = B_n^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2} \qquad (2.6)$$

В изученном выше примере $B_n = n$. Если нижний конец балки защемлен, а верхний шарнирно оперт, то $B_n = \varkappa_n/\pi$, где $\varkappa_n$ – корни уравнения $\mathrm{tg}\varkappa = \varkappa$ ($B_1 \approx 1.430$); если оба конца балки защемлены, то $B_n = 2n$ либо $B_n = 2\varkappa_n/\pi$; если нижний конец защемлен, а верхний не может поворачиваться, но может смещаться вдоль оси (Ox), то $B_n = n$; если нижний конец защемлен, а верхний свободный, то $B_n = n/2$. Формулы (2.6) являются классическими в теории устойчивости стержневых конструкций и играют большую роль при проектировании несущих колонн, опор мостов и других сооружений [5].

Вместо прямого анализа устойчивости, основанного на уравнении равновесия (2.1), можно воспользоваться энергетическим методом. Для этого выпишем потенциальную энергию деформированной балки и согласно теореме об энергии приравняем ее работе единственной внешней силы P. Получим

$$\frac{EI}{2}\int_0^l w''^2 dz = \frac{P}{2}\int_0^l w'^2 dz \tag{2.7}$$

Разложим функцию $w(z)$ в ряд Фурье с учетом граничных условий (2.2):

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n z}{l} \tag{2.8}$$

и подставим (2.8) в (2.7). Используя ортогональность систем функций $\{\sin(\pi nz/l)\}$ и $\{\cos(\pi nz/l)\}$ на интервале $0 < z < 1$ при $n \geqslant 1$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2}{4l}\left(\frac{\pi^2 n^2 EI}{l^2} - P\right)A_n^2 = 0 \tag{2.9}$$

Для выполнения равенства (2.9) достаточно потребовать, чтобы

$$P_n - P = 0 \tag{2.10}$$

при любом $n \geqslant 1$. Следовательно, в точках $P = P_n$ соответствующая амплитуда A_n может быть любой, остальные же гармоники при этом отсутствуют. Это совпадает с полученными ранее результатами.

Однако в интервалах $P_n < P < P_{n+1}$ согласно статическому подходу исходное положение балки следует считать устойчивым. Это противоречит интуиции и на практике может быть осуществлено, если в "узлах" стержень закрепить. Иначе при $P > P_*$ изогнутая ось в устойчивом равновесии всегда будет иметь вид (2.5) с одной полуволной. Данный факт говорит о некоторой ограниченности подхода, основанного на анализе лишь форм равновесия.

Можно привести примеры, когда происходит потеря устойчивости без перехода к новой форме равновесия. Одним из таких примеров служит балка, нагруженная следящей силой, т.е. силой, всегда направленной по касательной к оси в точке приложения. Уравнение нейтральной оси, по-прежнему, имеет вид (2.1), а граничные условия можно записать в виде

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w''(l) = 0, \quad w'''(l) = 0 \tag{2.11}$$

Заметим, что уравнение (2.1) с учетом (2.11) может быть дважды проинтегрировано по z:

$$EIw'' + Pw = Pw(l) - Pw'(l)(l - z) \tag{2.12}$$

В правую часть (2.12) входят два неизвестных из граничных условий параметра $w(l)$ и $w'(l)$.

Анализируя характеристический определитель в краевых задачах (2.1), (2.11) или (2.12), (2.11), нетрудно показать, что при любом P существует только тривиальное положение равновесия $w \equiv 0$, которое следует признать устойчивым. Это также противоречит практическим наблюдениям и говорит о том, что необходимо использовать динамический подход, т.е. изучать процесс деформирования со временем.

3. Анализ малых колебаний. Анализ динамической устойчивости в линейных краевых задачах с однородными граничными условиями сводится к анализу гармоник. Обратимся к предыдущей задаче, но вместо уравнения равновесия (2.1) выпишем уравнение малых колебаний [6]:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial z^4}+P\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{3.1}$$

где ρ – постоянная линейная плотность, и учтем условия (2.11).

Решение (3.1) ищется в виде

$$w(z,t)=W(z)e^{i\omega t} \tag{3.2}$$

где $\omega\in C$ – комплексная частота гармонических колебаний, а $W(z)$ – форма этих колебаний, удовлетворяющая обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^4W}{d\zeta^4}+\pi^2\frac{P}{P_*}\frac{d^2W}{d\zeta^2}-a^4W=0 \tag{3.3}$$

Здесь введены безразмерные параметры

$$\zeta=\frac{z}{l},\quad a^2=\sqrt{\frac{\rho}{EI}}\omega l^2 \tag{3.4}$$

Решение уравнения (3.3):

$$W(\zeta)=A_1\operatorname{ch}\lambda_1\zeta+A_2\operatorname{sh}\lambda_1\zeta+A_3\operatorname{ch}\lambda_2\zeta+A_4\operatorname{sh}\lambda_2\zeta \tag{3.5}$$

$$C\in\lambda_{1;2}=\sqrt{-\frac{\pi^2P}{2P_*}\pm\sqrt{\frac{\pi^4P^2}{4P_*^2}+a^4}} \tag{3.6}$$

следует подставить в граничные условия

$$\zeta=0:\quad W=\frac{dW}{d\zeta}=0;\quad \zeta=1:\quad \frac{d^2W}{d\zeta^2}=\frac{d^3W}{d\zeta^3}=0 \tag{3.7}$$

и получить систему однородных уравнений относительно A_k. Приравняем определитель этой системы нулю и выпишем характеристическое уравнение относительно $a(P)$:

$$2a^4(1+\operatorname{ch}\lambda_1\operatorname{ch}\lambda_2)-\frac{\pi^2P}{P_*}\left(\frac{\pi^2P}{P_*}-a^2\operatorname{sh}\lambda_1\operatorname{sh}\lambda_2\right)=0 \tag{3.8}$$

Если $P=0$, то балка совершает собственные колебания. В этом случае, как следует из (3.6), $\lambda_1=a$, $\lambda_2=ia$ и уравнение (3.8) упрощается

$$\operatorname{ch}a\cos a=-1 \tag{3.9}$$

Первые два корня (3.9) приближенно равны $a_1=\pm1.875$ и $a_2=\pm4.695$; им согласно (3.4) соответствуют собственные частоты

$$\omega_1\approx\frac{3.516}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}},\quad \omega_2\approx\frac{22.04}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}} \tag{3.10}$$

Численный анализ поведения корней уравнения (3.8) на комплексной плоскости показывает, что по мере возрастания P значения ω_1 и ω_2 сближаются вдоль действительной оси, при $P\approx2.03\,P_*$ сливаются, а при $P>2.03\,P_*$ становятся комплексно сопряженными. Это согласно представлению (3.2) означает колебательную неустойчивость прямолинейного равновесия или неограниченный рост прогибов $w(z, t)$ со временем. Критическое значение следящей силы $P \approx 2.03\ P_*$ было получено в [7], т.е. почти два столетия после того как стала известна величина P_*. Таким образом, динамический подход позволил определить значение критической силы в данной задаче, что свидетельствует о его большей общности по сравнению со статическим методом.

4. Устойчивость по Ляпунову. С именем выдающегося русского математика А.М. Ляпунова связаны первые строгие определения и признаки устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости движения.

Рассмотрим сначала некоторую систему с конечным числом m степеней свободы и в m-мерном фазовом пространстве $(x_1, \ldots, x_m)$ введем функцию $r(\mathbf{x}(t)) \geqslant 0$, которую будем называть расстоянием или мерой отклонения точки $\mathbf{x}$ в момент времени t. Например, r может быть обычным расстоянием в R^m:

$$r(\mathbf{x}(t)) = \sqrt{x_1^2(t) + \ldots + x_m^2(t)} \tag{4.1}$$

Движение $X_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, являющееся решением некоторой системы дифференциальных уравнений называется устойчивым по Ляпунову при $t > t_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует другое число $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что

$$r(\mathbf{x}(t_0)) < \delta \Rightarrow r(\mathbf{x}(t)) < \varepsilon \tag{4.2}$$

для любого $t > t_0$. Здесь $\mathbf{x}(t)$ – другое возможное решение той же системы дифференциальных уравнений. Данное определение имеет наглядный смысл: если задаться трубкой радиуса ε с образующей вдоль оси t, то в сечении $t = t_0$ этой трубки существует такая δ-окрестность, что все решения, выходящие из нее, не отклоняются при $t > t_0$ за пределы трубки. Движение $X_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ называется асимптотически устойчивым по Ляпунову при $t > t_0$, если оно устойчиво по Ляпунову и кроме того для всех решений $\mathbf{x}(t)$, выходящих при $t = t_0$ из δ-окрестности, называемой областью притяжения, имеет место равенство

$$\lim_{t \to \infty} r(\mathbf{x}(t)) = 0 \tag{4.3}$$

Основная идея прямого или второго метода Ляпунова состоит в том, что вместо меры $r(\mathbf{x})$ в фазовом пространстве рассматривается функция $\upsilon(\mathbf{x})$, определенным образом связанная с $r(\mathbf{x})$ и монотонно меняющаяся вдоль каждого решения. По поведению со временем функции υ, называемой функцией Ляпунова, можно судить об устойчивости либо неустойчивости выбранного решения.

Перед формулировками основных теорем прямого метода введем понятие производной по времени от υ в силу системы уравнений. Пусть имеются непрерывные функции $F_i(x_1, \ldots, x_m)$ такие, что $F_i(0, \ldots, 0) = 0$, функция $\upsilon(\mathbf{x})$ непрерывная вместе со своими частными производными $\partial\upsilon/\partial x_i$ и система уравнений

$$dx_i / dt = F_i(x_1, \ldots x_m), \quad t \geqslant t_0 \tag{4.4}$$

Тогда величину

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i} F_i(x_1, \ldots, x_m) \tag{4.5}$$

назовем производной по времени от υ в силу системы (4.4). Сформулируем далее две теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости решений системы (4.4).

Если существует положительно определенная функция $\upsilon(\mathbf{x})$ такая, что производная $d\upsilon/dt$ в силу системы (4.4) неположительна, то решение $X_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ этой системы устойчиво по Ляпунову.

Если существует положительно определенная функция $v(\mathbf{x})$ такая, что производная dv/dt в силу системы (4.4) отрицательно определена, то решение $X_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, \dots, m)$ этой системы асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Поиск функции v в данном случае сводится к построению семейства поверхностей $v = \text{const}$ в фазовом пространстве таких, что решения системы (4.4) пересекают их снаружи внутрь, тем самым приближаясь к началу координат.

В качестве примера рассмотрим набор линейных функций F_i, т.е. систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{m} f_{ij} x_j, \quad f_{ij} = \text{const}, \quad t \geqslant t_0 \tag{4.6}$$

и выберем

$$v(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} x_i^2(t) \tag{4.7}$$

Тогда производная от функции Ляпунова (4.7) в силу системы (4.6) имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} f_{ij} x_j x_i \tag{4.8}$$

Функция v (4.7), очевидно, положительно определена, и для асимптотической устойчивости решения $X_i(t) \equiv 0$ надо потребовать, чтобы матрица f_{ij} квадратичной формы в правой части (4.8) была отрицательно определена. Для этого можно воспользоваться известными алгебраическими критериями. Если же эта квадратичная форма неположительна, например, $f_{\alpha\alpha} \leqslant 0, f_{\alpha\beta} = 0$, то решение $X_i(t) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову. Не будем здесь останавливаться на доказательстве обеих теорем, так же как и двух теорем о неустойчивости по Ляпунову [3].

Второй метод Ляпунова на континуальные системы, т.е. на сплошные среды, был обобщен в 50–60-е годы в [8] и для таких систем получил название метод Ляпунова – Мовчана [9, 10].

5. Длительная устойчивость в вязкоупругой модели. При расчете вязкоупругих конструкций на устойчивость принципиальное значение имеют два основных типа поведения материала: ограниченная ползучесть, когда материал при $t \to \infty$ ведет себя как упругое тело с длительным модулем упругости, и неограниченная ползучесть, когда поведение при $t \to \infty$ аналогично течению вязкой жидкости [11, 12]. К первому типу принадлежат полимеры и бетоны, ко второму – металлы при высокой температуре. Ставя вопрос об устойчивости движения под действием длительной нагрузки, необходимо дать определение этого понятия, т.е. сформулировать критерии устойчивости (см. обзоры [13–16]). По аналогии с понятием устойчивости решений дифференциальных уравнений можно дать следующее определение. Если малые возмущения (малые нагрузки) вызывают малое отклонение параметров возмущенного движения системы от соответствующих параметров невозмущенного, то основное состояние устойчиво. Если же нет, то неустойчиво.

Рассмотрим поведение вязкоупругого стержня, шарнирно опертого на концах, под действием постоянной сжимающей нагрузки P. Пусть материал стержня соответствует стандартному четырехэлементному линейному телу, являющемуся последовательной комбинацией модели Фойгта с модулем упругости E_F и коэффициентом вязкости η_F и модели Максвелла с модулем упругости E_M и коэффициентом вязкости η_M [17]. Дифференциальное соотношение стандартного тела, связывающее напряжение σ и деформации ε, имеет вид

$$E_M \omega_F \dot{\varepsilon} + E_M \ddot{\varepsilon} = \omega_M \omega_F \sigma + (\omega_M + \omega_F + \omega_{MF})\dot{\sigma} + \ddot{\sigma} \tag{5.1}$$

где введены частоты релаксации $\omega_M = E_M/\eta_M$, $\omega_F = E_F/\eta_F$, $\omega_{MF} = E_M/\eta_F$.

Распределение продольных деформаций ε_z в стержне должно отвечать закону плоских сечений. Согласно нему деформации ε_z волокна, удаленного на расстоянии y от нейтральной оси, равны

$$\varepsilon_z(z,t) = \varkappa(z,t)y \tag{5.2}$$

где $\varkappa$ – кривизна оси в данном сечении. Подставляя (5.2) в (5.1), умножая обе части получившегося равенства на y и интегрируя по сечению Σ стержня, будем иметь

$$E_M I(\omega_F \dot{\varkappa} + \ddot{\varkappa}) = \omega_M \omega_F M + \omega \dot{M} + \ddot{M} \tag{5.3}$$

где $\omega = \omega_M + \omega_F + \omega_{MF}$, I – момент инерции сечения относительно нейтральной оси, а $M(z, t)$ – изгибающий момент

$$I = \int_{\Sigma} y^2 d\Sigma, \quad M = \int_{\Sigma} y\sigma_z d\Sigma \tag{5.4}$$

Считая прогибы $w(z, t)$ малыми по сравнению с длиной стержня можно заменить кривизну $\varkappa$ на $-(w_{,zz} - w_{0,zz})$, где $w_0(z)$ – начальный прогиб (начальные несовершенства) стержня. Разложим функцию $w(z, t)$ в ряд Фурье по системе собственных функций (2.5) с учетом граничных условий (2.2)

$$w(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin\frac{\pi n z}{l}, \quad w_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{0n} \sin\frac{\pi n z}{l} \tag{5.5}$$

В силу шарнирного опирания $M(z, t) = Pw(z, t)$. В итоге вместо (5.3) получим уравнение

$$\ddot{U}_n + \frac{\omega P - n^2 \omega_F P_{*0}}{P - n^2 P_{*0}} \dot{U}_n + \frac{\omega_M \omega_F P}{P - n^2 P_{*0}} U_n = 0 \tag{5.6}$$

где $P_{*0} = \pi^2 E_M I / l^2$ – эйлерова критическая сила, соответствующая мгновенному модулю упругости модели (5.1) равному E_M.

Как известно, критерием того, чтобы уравнение (5.6) имело решениями затухающие функции, является положительность всех его коэффициентов, т.е. система неравенств

$$\frac{\omega P - n^2 \omega_F P_{*0}}{P - n^2 P_{*0}} > 0, \quad \frac{P}{P - n^2 P_{*0}} > 0 \tag{5.7}$$

выполненная для любого $n \geqslant 1$. Однако второе из неравенств (5.7), очевидно, ни при каком значении силы $P > 0$ не имеет места для любого числа n. Поэтому решениями уравнения (5.6) при сколь угодно малых силах P будут неограниченно возрастающие функции и возмущенное движение неустойчиво на бесконечном интервале времени. В данном случае необходим выбор условных критериев устойчивости, в частности, устойчивости на конечном интервале времени (см. обзор [18]). Неустойчивость является следствием того, что стандартное линейное тело при $t \to \infty$ ведет себя как ньютоновская вязкая жидкость, обладающая неограниченной ползучестью.

Другая картина на бесконечности реализуется, если материал ведет себя при $t \to \infty$ как упругое тело с конечными длительными модулями. Проиллюстрируем это на примере тела Кельвина, получающегося из стандартного линейного тела устремлением η_M в бесконечность или ω_M к нулю. Вместо (5.1) запишем дифференциальное определяющее соотношение тела Кельвина, содержащее только первые производные от σ и ε:

$$E_M \omega_F \varepsilon + E_M \dot{\varepsilon} = (\omega_F + \omega_{MF})\sigma + \dot{\sigma} \tag{5.8}$$

Проводя стандартную процедуру разделения переменных, придем к следующему уравнению аналогичному (5.6), но первого порядка относительно каждой из амплитуд U_n:

$$\dot{U}_n + \frac{\omega P - n^2\omega_F P_{*0}}{P - n^2 P_{*0}} U_n + \frac{n^2\omega_F P_{*0}}{P - n^2 P_{*0}} U_{0n} = 0 \tag{5.9}$$

Критерием ограниченности решений уравнения (5.9) является положительность коэффициента при U_n, зависящего от приложенной силы P. Преобразуем его

$$\frac{\omega P - n^2\omega_F P_{*0}}{P - n^2 P_{*0}} = \omega \frac{P - n^2 P_{*\infty}}{P - n^2 P_{*0}}, \quad P_{*\infty} = \frac{\pi^2 E_\infty I}{l^2} \tag{5.10}$$

В (5.10) введена эйлерова критическая сила $P_{*\infty}$, соответствующая длительному модулю упругости E_∞, который для тела Кельвина равен

$$E_\infty = \frac{E_M E_F}{E_M + E_F} < E_M \tag{5.11}$$

Следовательно, $P_{*\infty} < P_{*0}$ и решения уравнения (5.9) при любом $n \geqslant 1$ стремятся к некоторой положительной постоянной пропорциональной U_{0n}, тогда и только тогда, когда $P < P_{*\infty}$. Последнее неравенство и есть критерий устойчивости в данной задаче.

6. Устойчивость при ползучести. Другое направление в исследовании устойчивости основано на использовании закона ползучести в виде уравнения состояния с упрочнением. Скорость ползучести $\dot{\varepsilon}_c$ в каждый момент времени определяется действующим в этот момент напряжением σ и накопленной к этому моменту деформацией ползучести

$$\varepsilon_c = \varepsilon - \sigma / E \tag{6.1}$$

где ε – полная деформация, E – модуль Юнга. Данная зависимость выражается с помощью неявной функции

$$\Phi(\sigma, \varepsilon_c, \dot{\varepsilon}_c) = 0 \tag{6.2}$$

Тождество (6.2) называется уравнением состояния материала с упрочнением. В основном состоянии $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ – известные функции. В частности, если напряжение постоянно и равно отношению силы P к площади поперечного сечения стержня, то его можно подставить в (6.2) и, решив дифференциальное уравнение первого порядка, найти $\varepsilon(t)$.

Наряду с основным процессом деформирования рассмотрим возмущенный процесс, характеризуемый величинами $(\sigma + \delta\sigma)(t), (\varepsilon_c + \delta\varepsilon_c)(t)$ и $(\dot{\varepsilon}_c + \delta\dot{\varepsilon}_c)(t)$, причем $|\delta\sigma / \sigma| \ll 1$, $|\delta\varepsilon_c / \varepsilon_c| \ll 1$ и, как следует из (6.1):

$$\delta\dot{\varepsilon}_c = \delta\dot{\varepsilon} - \delta\dot{\sigma} / E \tag{6.3}$$

Тогда в линейном приближении из (6.2) имеем

$$\Phi_1 \delta\sigma + \Phi_2 \delta\varepsilon_c + \Phi_3 \delta\dot{\varepsilon}_c = 0 \tag{6.4}$$

$$\Phi_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad \Phi_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_c}, \quad \Phi_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varepsilon}_c} > 0 \tag{6.5}$$

известные из основного процесса функции времени. Если исследуется поведение тела сразу после приложения нагрузки, они слабо меняются и их можно считать постоянными. Подставляя (6.3) в (6.4), получим

$$(E\Phi_1 - \Phi_2)\delta\sigma - \Phi_3 \delta\dot{\sigma} + E(\Phi_2 \delta\varepsilon + \Phi_3 \delta\dot{\varepsilon}) = 0 \tag{6.6}$$

Как и в *п.* 5, уравнение (6.6) стандартными методами можно свести к дифференциальному уравнению первого порядка относительно амплитуды $U(t)$ прогиба стержня $w(z, t)$ (в разложениях (2.5) для простоты удержана только первая мода $n = 1$):

$$\Phi_3(1-p)\dot{U}+[E\Phi_1 p+\Phi_2(1-p)]U-\Phi_2 U_0=0, \quad p=\frac{P}{P_*}=\frac{Pl^2}{\pi^2 EI} \tag{6.7}$$

Для определенности зададимся степенным законом ползучести

$$\Phi(\sigma,\varepsilon_c,\dot{\varepsilon}_c)=\dot{\varepsilon}_c\varepsilon_c^{\alpha}-A\sigma^m, \quad \alpha>0$$
$$\Phi_1=-mA\sigma^{m-1}=-\frac{m}{\sigma}\dot{\varepsilon}_c\varepsilon_c^{\alpha}, \quad \Phi_2=\alpha\dot{\varepsilon}_c\varepsilon_c^{\alpha-1}, \quad \Phi_3=\varepsilon_c^{\alpha} \tag{6.8}$$

С учетом (6.8) уравнение (6.7) запишется в виде

$$\varepsilon_c(1-p)\dot{U}+\left[-\frac{m}{\sigma}\varepsilon_c Ep+\alpha(1-p)\right]\dot{\varepsilon}_c U-\alpha\dot{\varepsilon}_c U_0=0 \tag{6.9}$$

Перейдем в (6.9) от t к новой независимой переменной ξ пропорциональной деформации ползучести ε_c:

$$\xi=\frac{m}{\sigma}\frac{p}{1-p}E\varepsilon_c, \quad \dot{U}=\frac{dU}{d\xi}\frac{m}{\sigma}\frac{p}{1-p}E\dot{\varepsilon}_c \tag{6.10}$$

Тогда уравнение для функции $U(\xi)$ выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial U}{d\xi}-\left(1-\frac{\alpha}{\xi}\right)U=\frac{\alpha U_0}{(1-p)\xi}, \quad U(0)=\frac{U_0}{1-p} \tag{6.11}$$

Видно, что при $\xi\to\infty$ его решение

$$U(\xi)=\frac{\alpha U_0}{1-p}e^{\xi}\xi^{-\alpha}\int\limits_0^{\xi}e^{-\eta}\eta^{\alpha-1}d\eta \tag{6.12}$$

неограниченно возрастает (интеграл в (6.12) стремится к константе $\Gamma(\alpha)$). Это говорит о том, что процесс деформирования стержня со степенным законом ползучести (6.8) неустойчив. Постановка задачи устойчивости на бесконечном промежутке времени оказывается бессмысленной, и интервал времени надо ограничивать. Реальный результат, который можно получить из (6.12), состоит в определении критического времени или времени, по достижении которого либо прогиб становится равным заданному, либо поведение функции $U(t)$ качественно меняется тем или иным образом. Задача определения критического времени актуальна и для конструкций, выполненных из материалов с ограниченной ползучестью, если при этом нагрузка превышает длительную критическую. Заметим также, что переход от уравнения состояния (6.2) к линеаризованному уравнению в вариациях (6.4) оправдан, если начальные возмущения $|\delta\sigma|$, $|\delta\varepsilon_c|$, $|\delta\dot{\varepsilon}_c|$ и начальный прогиб $w_0(z)$ малы. Величины самих начальных возмущений не влияют на критическую нагрузку, но могут оказывать существенное влияние на критическое время.

Приведем ниже некоторые условные критерии устойчивости, которым в данной задаче соответствуют определенные критические времена.

Квазистатический критерий. Рассмотрим уравнение (6.7) без слагаемого $\Phi_2 U_0$, т.е. положим начальные прогибы равными нулю

$$\Phi_3\dot{U}+\left(\frac{E\Phi_1 p}{1-p}+\Phi_2\right)U=0, \quad \Phi_3>0 \tag{6.13}$$

Решение $U(t)$ неограниченно возрастает или стремится к нулю при $t \to \infty$ в зависимости от знака скобки в (6.13). Граница устойчивости определяется из равенства

$$\frac{E\Phi_1 p}{1-p} + \Phi_2 = 0 \tag{6.14}$$

В случае степенного закона упрочнения (6.8) вместо (6.14) имеем

$$\xi = \xi_1 = \alpha \tag{6.15}$$

Это также видно, если положить равным нулю множитель при U в (6.11). Поскольку переменная ξ играет роль независимой переменной, значение ξ_1 является некоторым критическим временем. Смысл этого времени состоит в следующем. Если нагрузка P действовала и была снята до момента ξ_1, то прогиб достигнутый к моменту снятия будет сначала убывать, в момент ξ_1 примет свое минимальное значение и только затем начнет неограниченно расти. Если же нагрузка снята после момента ξ_1, то прогиб будет монотонно расти в течение всего времени без интервалов убывания. Описанный условный критерий называется квазистатическим [13].

Критерий достижения точки перегиба. Критическое время ξ_2 согласно данному критерию связано с обращением в нуль ускорения прогиба [19, 20]:

$$\frac{d^2U}{d\xi^2}(\xi_2) = 0 \tag{6.16}$$

При $\xi > \xi_2$ амплитуда U начинает быстро расти из-за смены выпуклости графика $U(\xi)$. В этом и состоит качественное изменение поведения U.

Исследуем решение (6.12) при натуральных значениях параметра α. Для любого натурального $\alpha = j$ из (6.12) методом индукции несложно доказать, что U представимо в степенных рядах

$$\begin{aligned} U(\xi) &= \frac{U_0}{1-p}\frac{1}{\xi^j / j!}\left(e^{\xi} - \sum_{i=0}^{j-1}\frac{\xi^i}{i!}\right) = \frac{U_0}{1-p} j! \sum_{i=j}^{\infty}\frac{\xi^{i-j}}{i!} \\ \frac{d^2U}{d\xi^2} &= \frac{U_0}{1-p} j! \sum_{i=j}^{\infty}\frac{(i+2-j)(i+1-j)}{(i+2)!}\xi^{i-j} \end{aligned} \tag{6.17}$$

Из (6.17) видно, что для любого $\xi > 0$ ускорение прогиба $d^2U/d\xi^2$ положительно, так что критическое время ξ_2 можно положить равным нулю. Таким образом, критерий достижения точки перегиба не дает в данной задаче положительного критического времени.

Критерий упругого скачка. Данный критерий [21] основан на предположении о том, что потеря устойчивости вязкоупругих стержней и оболочек происходит упругомгновенно, поэтому критический момент может быть определен из анализа нелинейных уравнений соответствующих упругих задач.

Бифуркационные критерии. Этот класс критериев [22, 23] связан с определением критического времени из бифуркационных условий потери устойчивости некоторой упругой системы. При этом вводятся в рассмотрение бифуркационные точки произвольного порядка. Сравнительный анализ данных критериев с современных позиций теории устойчивости на примере сжатого стержня при ползучести выполнен в [24].

Критерий Громова. Продолжая невозмущенное движение за интервал устойчивости с помощью первого метода Ляпунова, В.Г. Громовым предложен критерий динамической устойчивости вязкоупругих систем, подверженных действию как консервативных, так и следящих нагрузок.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02-01-00780).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозов Н.Ф., Фрейдин А.Б.* Зоны фазовых переходов и фазовые превращения упругих тел при различных видах напряженного состояния // Тр. Математ. ин-та РАН. 1998. Т. 223. С. 220–232.
2. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 608 с.
3. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 208 с.
4. *Тимошенко С.П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. 808 с.
5. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 334 с.
6. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
7. *Beck M.* Die Knicklast des einseitig eingespannten tangential gedrückten Stabes // ZAMP. 1952. V. 3. № 3. S. 225–228.
8. *Мовчан А.А.* Об устойчивости процессов деформирования сплошных тел // Arch. Mech. Stosow. 1963. V. 15. № 5. P. 659–682.
9. *Победря Б.Е., Георгиевский Д.В.* Лекции по теории упругости. М.: Изд-во "Эдиториал УРСС", 1999. 208 с.
10. *Георгиевский Д.В.* Устойчивость процессов деформирования по наборам мер относительно заданных классов возмущений // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 2. С. 69–92.
11. *Ржаницын А.Р.* Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.: Гостехиздат, 1949. 252 с.
12. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
13. *Куршин Л.М.* Устойчивость при ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 125–160.
14. *Санжаровский Р.С.* Устойчивость элементов строительных конструкций при ползучести. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 216 с.
15. *Потапов В.Д.* Устойчивость вязкоупругих элементов конструкций. М.: Стройиздат, 1985. 312 с.
16. *Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Колмановский В.Б.* Устойчивость вязкоупругих тел и элементов конструкций // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. Т. 19. М.: Изд-во ВИНИТИ, 1987. С. 3–77.
17. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Математические основы теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1971. 280 с.
18. *Абгарян К.А.* Устойчивость движения на конечном интервале времени // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. Т. 3. М.: Изд-во ВИНИТИ, 1976. С. 43–124.
19. *Шестериков С.А.* О критерии устойчивости при ползучести // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 6. С. 1101–1106.
20. *Hoff N.J.* Reversed creep: a remark to the creep buckling theory of Rabotnov and Shesterikov // J. Mech. Phys. Solids. 1964. V. 12. № 2. P. 113–123.
21. *Терегулов И.Г.* Изгиб и устойчивость тонких пластин и оболочек при ползучести. М.: Наука, 1969. 206 с.
22. *Гузь А.Н.* Об одной модели в трехмерной теории устойчивости упруговязкопластических тел // Прикл. механика. 1984. Т. 20. № 6. С. 18–24.
23. *Клюшников В.Д.* Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Изд-во МГУ, 1986. 224 с.
24. *Зубчанинов В.Г., Софьин О.Е., Субботин С.Л.* Устойчивость и выпучивание нелинейно-упругих сжатых стержней при ползучести // Устойчивость, пластичность, ползучесть при сложном нагружении. Тверь: Изд-во Твер. ГТУ, 1998. С. 76–87.
25. *Громов В.Г.* Квазистатическая неустойчивость как средство качественного анализа равновесных движений наследственно деформируемых тел на конечном интервале времени // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 124–127.

Москва

Поступила в редакцию
30.04.2002