

УДК 539.3

© 2002 г. Е.Е. ПАВЛОВСКАЯ, Ю.В. ПЕТРОВ

### **О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Получены и анализируются результаты аналитического решения трех задач линейной теории упругости, иллюстрирующих важность принципиальных особенностей динамики: специфического поведения энергии, наличия инерции и фактора времени. Показаны и объяснены некоторые “парадоксы” поведения динамических систем, возникающие при попытках интерпретации полученных результатов в рамках квазистатических представлений.

В задаче о динамическом двустороннем растяжении одномерного упругого стержня постоянными напряжениями приведено точное аналитическое решение и найдена зависимость полной внутренней энергии стержня от времени. Показано, что в динамическом случае внутренняя энергия стержня существенно зависит от времени и периодически обращается в нуль.

В задаче об антиплоском динамическом нагружении по циклическому закону упругого пространства с полубесконечной трещиной построена аналитическая зависимость коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины от времени. Показано, что в рамках идеально упругой модели возможен эффект типа “усталости”, т.е. разрушение, определяемое заданным предельным значением коэффициента интенсивности, отсутствует на первом цикле нагружения, но может наступить на некотором  $N$ -м цикле.

В задаче о динамическом нагружении системы удаленных жестких штампов, расположенных на идеально упругом полупространстве, приведены модельные уравнения, описывающие динамику штампов с учетом их взаимодействия с полупространством и между собой. Показано, что рассматриваемая модель содержит диссипативные явления, существование которых в консервативной системе выглядит парадоксальным.

Динамическое деформирование и разрушение твердых тел характеризуются рядом особенностей, которые делают эти процессы принципиально отличными от их статических аналогов. В некоторых случаях напряженно-деформированное состояние динамически нагруженных упругих сред проявляет “парадоксальное” поведение, приводящее к красивым эффектам, которые с точки зрения классических принципов выглядят не совсем обычно. Объяснение такого рода эффектов может быть получено на основе рассмотрения динамических особенностей: специфического поведения энергии, наличия инерции и фактора времени.

В данной статье получены и анализируются результаты аналитического решения трех задач линейной теории упругости, иллюстрирующих важность упомянутых составляющих динамики. Показаны и объяснены некоторые “парадоксы” поведения динамических систем, возникающие при попытках интерпретации полученных результатов в рамках квазистатических представлений.

**1. Динамическое одноосное растяжение стержня.** Рассмотрим следующую одномерную динамическую задачу теории упругости. Стержень длины  $l$ , характеризующийся площадью поперечного сечения  $S$ , плотностью материала  $\rho$  и модулем Юнга  $E$ , испытывает двухстороннее ударное нагружение постоянными растягивающими напряжениями, приложенными к торцам в некоторый нулевой момент времени.

Уравнения продольных колебаний стержня имеют вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

где  $u$  – продольное смещение точек стержня,  $c^2 = E/\rho$ . Торцы стержня нагружены по закону

$$ES \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pm l/2} = P_0 H(t) \quad (1.2)$$

где  $H(t)$  – функция Хевисайда. Начальные условия нулевые

$$u(t, x)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (1.3)$$

Решение данной задачи имеет вид

$$u(x, t) = \frac{P_0 c}{ES} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ \left( t - \frac{x}{c} - \frac{2k+1}{2} \frac{l}{c} \right) H \left( t - \frac{x}{c} - \frac{2k+1}{2} \frac{l}{c} \right) + \left( t + \frac{x}{c} - \frac{2k+1}{2} \frac{l}{c} \right) H \left( t + \frac{x}{c} - \frac{2k+1}{2} \frac{l}{c} \right) \right] \quad (1.4)$$

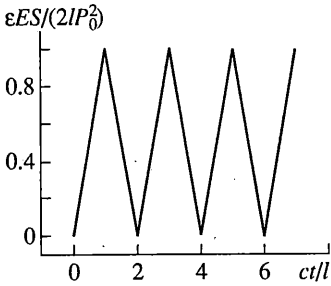
Полная внутренняя энергия стержня вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \left[ \rho S \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + ES \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \\ &= \frac{2P_0^2 l}{ES} \left[ \frac{ct}{l} H \left( \frac{ct}{l} \right) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{ct}{l} - k \right) H \left( \frac{ct}{l} - k \right) \right] \quad (1.5) \end{aligned}$$

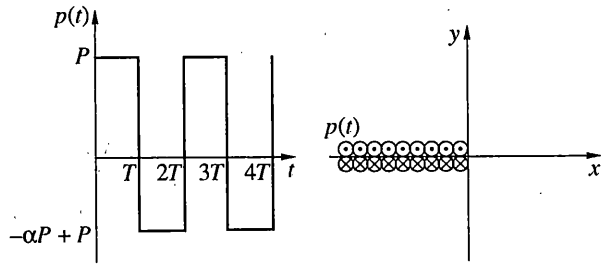
Зависимость внутренней энергии стержня  $\epsilon$  от времени  $t$  представлена на фиг. 1. Характер данной зависимости существенно отличается от постоянной энергии стержня, получаемой в соответствующей статической задаче о двухстороннем продольном растяжении упругого стержня. Данная ситуация может показаться парадоксальной: при постоянных растягивающих напряжениях на торцах стержня его полная внутренняя энергия периодически обращается в нуль. В действительности, однако, парадокса нет. Нестационарное поведение энергии в динамической задаче связано с наличием распространяющихся по стержню упругих волн. Постоянное напряжение на торцах стержня должно обеспечиваться при этом задающим потенциалом внешних сил нагружающим устройством, обмен энергией с которым приводит к периодическому обращению энергии стержня в нуль. Интересно, что снятие нагрузки в момент времени, соответствующий нулевому значению энергии, приводит к полному прекращению волнового процесса в стержне. Сходные явления в связи с проблемой оптимизации разрушения твердых тел исследовались в работе [1]. Полученный эффект показывает, что динамически нагружаемые тела, даже в простейшем случае, являются незамкнутыми (в термодинамическом смысле) системами.

**2. Ударное циклическое нагружение упругой среды с трещиной.** Рассмотрим задачу теории упругости об антиплоском сдвиге упругого пространства с полубесконечной трещиной при нулевых начальных условиях и отсутствии источника (или стока) в вершине трещины:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w &= 0, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad w|_{r \leq 0} = 0 \\ \mu \frac{\partial w}{\partial y} &= -p(t), \quad \text{при } (x, y) \in I = \{(x, y) : x \leq 0, y = 0\} \\ w &= O(r^\beta) + \text{const}, \quad r \rightarrow 0, \quad \beta = \text{const} \end{aligned} \quad (2.1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где  $w = w(x, y)$  –  $z$ -компонента вектора перемещения,  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\mu$  – модуль сдвига. Будем считать, что к берегам полубесконечного разреза прикладывается равномерно распределенное периодическое напряжение  $p(t)$  вида

$$p(t) = P \left[ H(t) + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k H(t - kT) \right] \quad (2.2)$$

где  $P > 0$  – амплитуда,  $\alpha = \text{const} > 1$  (фиг. 2). Задача (2.1)–(2.2) имеет простое аналитическое решение. Следуя [2], можно показать, что коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины имеет вид

$$K(t) = P\varphi(c_2) \left( \sqrt{t} H(t) + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sqrt{t - kT} H(t - kT) \right)$$

где  $\varphi(c_2)$  – известная функция скорости распространения волны сдвига  $c_2$ .

Проанализируем возможность разрушения у вершины трещины по простейшему критерию критического коэффициента интенсивности напряжений

$$K(t) \leq K_c \quad (2.3)$$

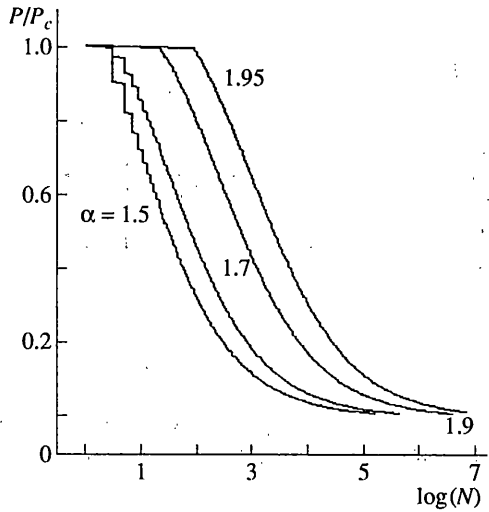
Примем за критическую такую амплитуду  $P_c$ , при которой коэффициент интенсивности в момент времени  $T$  становится равным критическому, т.е. минимальную амплитуду, соответствующую разрушению на первом цикле:

$$K_c = K(T, P_c) = P_c \varphi(c_2) \sqrt{T}$$

Анализ функции  $K(t)$  показывает, что ее максимальные значения, достигающиеся в точках  $t_k = (2k-1)T$ , могут увеличиваться с ростом количества циклов  $k$ . Это происходит в случае, когда значения коэффициента  $\alpha$  принадлежат следующему диапазону  $1 < \alpha < 2$ . При этом в рамках линейной теории упругости наблюдается эффект типа “усталости”, т.е. при  $P < P_c$  разрушение не происходит на первом цикле нагружения, но будет происходить на некотором  $N$ -м цикле ( $N > 1$ ). Зависимость числа циклов до разрушения  $N$  (т.е. до момента, когда коэффициент интенсивности достигает критического значения  $K_c$ ) от отношения  $P$  к  $P_c$  определяется формулой

$$N(\alpha, P) = \min \left\{ m : \sqrt{2m-1} + \alpha \sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^k \sqrt{2m-1-k} \geq \frac{P_c}{P} \right\}$$

Расчитанные по этой формуле кривые при разных значениях параметра  $\alpha$  приведены на фиг. 3. Описанная ситуация на первый взгляд также выглядит парадоксальной: в рамках линейной теории упругости и обратимого (в термодинамическом смысле) процесса деформирования наблюдается “усталостный” эффект. Соответствующие зависимости числа циклов до разрушения от амплитуды циклического нагружения



Фиг. 3

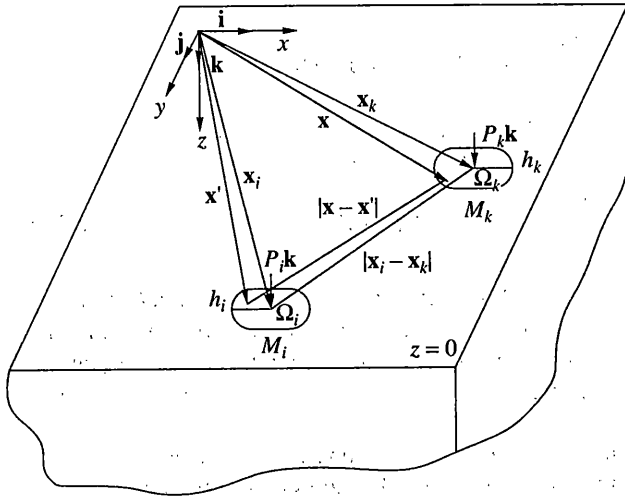
оказываются очень похожими на классические усталостные кривые, наблюдаемые в квазистатических процессах, связанных с необратимыми изменениями в структуре материалов. Данный эффект в рассмотренном случае объясняется возможностью накопления интенсивности волнового поля в окрестности вершины трещины, обусловленной динамической инерцией – снятие внешней нагрузки не приводит к мгновенному исчезновению, как это произошло бы в статике, интенсивности локальных напряжений.

Для исследования механизма обнаруженного эффекта была рассмотрена задача о нормальном нагружении по закону  $p(t)$  берегов дисковой трещины радиуса  $a$ , расположенной в бесконечном упругом пространстве. В случае, когда  $p(t) = PH(t)$ , решение данной задачи было построено в [3]. Для упругого полупространства (в силу симметрии задачи рассматривалось только верхнее полупространство) решались трехмерные уравнения динамики среды (уравнения Ляме) при нулевых начальных условиях. Решение строилось в полярных координатах. На границе полупространства в области трещины ( $z = 0, r < a$ ) нормальные напряжения  $\sigma_{zz}$  задавались равными  $-PH(t)$ , а задание нормальных перемещений и касательных напряжений  $\sigma_{rz}$  вне области трещины равными нулю обеспечивало выполнение условий симметрии.

Для случая, когда коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3333$ , в [3] построена зависимость отношения  $K/K_{st}$  динамического коэффициента интенсивности к его значению в соответствующей статической задаче ( $K_{st} = P\sqrt{2a/\pi}$ ) от безразмерного времени  $\tau = tc_2/a$ .

На основе решения [3] были проведены расчеты коэффициента интенсивности в задаче о циклическом нагружении по закону  $p(t)$  дисковой трещины радиуса  $a$ . Исследование показало, что в любом диапазоне изменения параметра  $\alpha$  и при произвольном соотношении  $Tc_2/a$  между характерным временем  $a/c_2$  и полупериодом цикла нагружения  $T$  эффект разрушения при значениях  $N > 2$  не наблюдается.

Результаты анализа решений данных динамических задач позволяют сделать вывод о том, что полученные “усталостные” зависимости порождаются инерцией среды и специфической геометрией упругой области – в некоторых случаях периодические возмущения, приносимые волнами от удаленных точек среды, могут неограниченно увеличивать коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины. Таким образом “усталостные” эффекты, кажущиеся парадоксальными в рамках линейной



Фиг. 4

теории упругости, могут быть объяснены на основе представления о динамическом переносе энергии при помощи распространяющихся в среде волн.

**3. Динамика системы удаленных штампов на поверхности упругого полупространства.** Рассмотрим динамическое взаимодействие упругого полупространства  $z \leq 0$  и системы  $N$  круглых гладких (трение отсутствует) штампов с плоским основанием, расположенных на его границе  $z = 0$  (область контакта  $\Omega = \cup \Omega_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), где  $\Omega_i$  – зоны контакта). Максимальный радиус  $h = \max_k \{h_k\}$  штампа предполагается много меньшим, чем минимальное расстояние  $l = \min_{i,k} \{ |x_i - x_k| \}$  между их центрами. Величина  $\varepsilon = h/l = o(1)$  является естественным малым параметром задачи. Вертикальные силы  $P_k = P_k(t/T)$ , прикладываемые к центрам штампов, вызывают движение штампов (фиг. 4). Предполагается, что временной масштаб  $T$  внешнего воздействия сравним со временем  $l/c_2$  пробега волны сдвига между ближайшими штампами ( $c_2 T/l = O(1)$ ).

При отсутствии объемных сил вектор перемещения  $\mathbf{u}$  в среде описывается уравнением

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} = \rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 \quad (3.1)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – константы Ляме. Начальные условия имеют вид

$$\mathbf{u} |_{t=0} = 0 \quad (3.2)$$

Рассматривается контакт без трения жестких штампов и упругого полупространства при  $t > 0$ :

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad -\infty \leq x, y \leq \infty, z = 0 \\ w = w_k, \quad (x, y) \in \Omega_k \quad (k = 1, \dots, N) \\ \sigma_z |_{z=0} = 0, \quad (x, y) \notin \Omega \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь  $w$  –  $z$ -компонента перемещения  $\mathbf{u}$  среды,  $w_k$  – вертикальное перемещение  $k$ -го штампа, а  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\sigma_z$  – соответствующие компоненты тензора напряжений.

Динамика жестких дискообразных штампов описывается следующими уравне-

ниями ( $k = 1, \dots, N$ ):

$$w_k(t, \mathbf{x}) = u_k(t) + (y - y_k)\varphi_{1k}(t) - (x - x_k)\varphi_{2k}(t)$$

$$M_k \frac{d^2 u_k}{dt^2} = P_k - F_k, \quad \frac{M_k h_k^2}{4} \frac{d^2 \varphi_{1k}}{dt^2} = -\int \int_{\Omega_k} (y' - y_k) \sigma_z(t, \mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}')$$

$$\frac{M_k h_k^2}{4} \frac{d^2 \varphi_{2k}}{dt^2} = \int \int_{\Omega_k} (x' - x_k) \sigma_z(t, \mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}'), \quad F_k(t) = \int \int_{\Omega_k} \sigma_z(t, \mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}') \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{x} = (x, y, 0)$ ,  $\mathbf{x}' = (x', y', 0)$  – радиус-векторы,  $M_k$  – масса  $k$ -го штампа,  $h_k$  – радиус,  $x_k$  и  $y_k$  – координаты его центра,  $\sigma_z$  – неизвестное контактное давление на штамп со стороны среды,  $F_k$  – контактное усилие. Вертикальное перемещение  $w_k$  некоторой точки штампа вычисляется через вертикальное смещение его центра  $u_k$  и углы малого поворота  $\varphi_{1k}$  и  $\varphi_{2k}$ .

Перемещение на границе упругого полупространства может быть определено при решении граничного интегрального уравнения, записанного на основе фундаментального решения  $G(t, r)$  (функции Грина), которое было получено в замкнутой форме [4]. Граничное интегральное уравнение контактной задачи (3.1)–(3.3) имеет вид

$$w(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \int_0^t \int \int_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial(t-t')} G(t-t', |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \sigma_z(t, \mathbf{x}') dt' d\Omega(\mathbf{x}') \quad (3.5)$$

Теперь для определения неизвестных перемещений штампов и контактного давления необходимо решить совместно систему (1) и контактное уравнение (3.5).

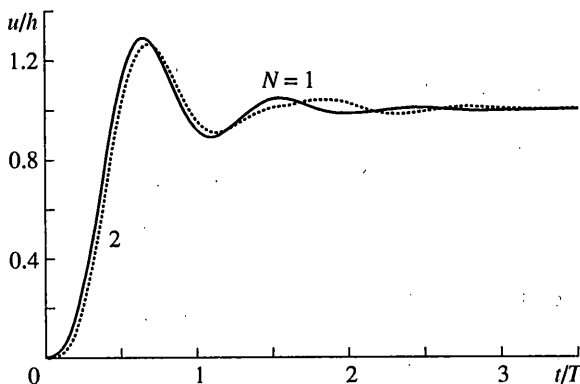
Анализ уравнения (3.5) на основе асимптотических методов проведен в [5]. На основе этого анализа построены достаточно простые модельные уравнения для описания динамики штампов, а также получены зависимости от времени суммарных контактных усилий под штампами.

Уравнения для вертикальных смещений центров масс штампов имеют вид ( $k = 1, \dots, N$ ):

$$M_k \frac{d^2 u_k}{dt^2} + \frac{8h_k^2 \mu |\mathcal{A}|}{(1-\nu)\pi c_2} \frac{du_k}{dt} + \frac{4h_k \mu}{1-\nu} u_k = P_k + \frac{4h_k \mu}{1-\nu} \sum_{i \neq k} \int_0^t \int G(t-s, |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i|) \frac{d}{ds} F_i \left( \frac{s}{T} \right) ds \quad (3.6)$$

Слагаемые в левой части полученных уравнений можно интерпретировать как сумму неких инерционных (первое слагаемое), диссипативных (второе) и упругих (третье) сил, действующих на штамп. Вышеуказанные силы уравновешиваются стоящими в правой части данных уравнений внешней нагрузкой  $P_k$ , приложенной к  $k$  штампу, и суммой сил, обусловленных динамическим взаимодействием соседних штампов через среду. Неизвестные функции  $F_i(t/T)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) описываются вторым уравнением системы (1). Следует отметить, что полученное приближенное выражение для упругих сил известно из решения соответствующей статической контактной задачи для изолированного круглого штампа [7]. Результаты расчетов на основе данных модельных уравнений приведены на фиг. 5, где приводится зависимость перемещения  $u/h = u_1/h = u_2/h$  ( $h_1 = h_2 = h$ ) от времени  $t/T$ .

Появление в полученных уравнениях диссипативных сил на первый взгляд кажется парадоксальным, т.к. в исходной постановке система была консервативной – отсутствовали потери энергии за счет свойств среды. Необходимо подчеркнуть, что рассматриваемая нами упругая среда действительно не обладает такими свойствами, однако она является полубесконечной. В этом случае упругие волны, возбужденные движением штампов на ее поверхности, будут распространяться в глубь среды, унося



Фиг. 5

энергию на бесконечность. Таким образом, полученное явление обусловленное отсутствием в рассматриваемой области границ, отраженные от которых волны могли бы возвратить штампу ранее унесенную энергию. Учет такого рода демпфирования при описании динамики штампов является принципиальным, поскольку в противном случае исследование, например, резонансных явлений становится невозможным (перемещение штампа на резонансной частоте неограниченно возрастает).

**4. Выводы.** Полученные результаты в различных динамических задачах теории упругости являются яркими примерами принципиальных отличий и особенностей динамических процессов. Они показывают как важность учета динамических процессов для корректного описания реальных систем, так и необходимость использования существенно отличных от принятых в квазистатике подходов и методов при анализе задач динамики.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 02-01-01035; 99-01-00694; проект ЦКП 00-01-05020), Мэрии С.-Петербурга (грант М99-2.2П-164) и Федеральной целевой программы "Интеграция".

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барсуков О.П., Вайсберг Л.А., Семкин Б.В., Цукерман В.А. Об энергетических соотношениях при ударном воздействии на стержень // Изв. высш. учеб. заведений. Физика. 1972. № 7. С. 96–101.
2. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
3. Мартынюк П.А. О дифракции продольной волны на дисковой трещине // Динамика сплошной среды. 1976. Вып. 25. С. 82–91.
4. Richards P.G. Elementary solutions to Lamb's problem for a point source and their relevance to three-dimensional studies of spontaneous crack propagation // Bull. Seism. Soc. Amer. 1979. V. 69. № 4. P. 947–956.
5. Лавров Н.А., Павловская Е.Е. Динамика системы удаленных штампов на упругом полупространстве // Журнал прикладной механики и технической физики. 1999. № 6. С. 204–210.
6. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
7. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию  
25.01.2000