

УДК 539.37

© 2002 г. Е.В. ЛОМАКИН

**КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВИДА  
НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГИМИ СВОЙСТВАМИ**

Сформулирована постановка задач кручения стержней из материалов, свойства которых меняются в зависимости от вида нагружения или вида деформирования. В данных материалах процессы сдвигового и объемного деформирования взаимосвязаны, и параметры этой взаимосвязи также зависят от вида нагружения. Такие эффекты проявляются у горных пород, некоторых конструкционных графитов, углеродных композитных материалов, бетона, огнеупорных керамик и многих других. Показано, что классический подход, основанный на гипотезах Сен-Венана о повороте и депланации поперечного сечения для рассматриваемых материалов не может быть использован, поскольку в теле происходит взаимодействие перемещений, соответствующих кручению тела и деформации поперечного сечения. В зависимости от условий кручения возможно появление осевой сжимающей силы и изгибающих моментов. Некоторые из этих эффектов проанализированы на основе полученного приближенного решения задачи о кручении стержня прямоугольного поперечного сечения.

**1. Основные соотношения.** В теории упругого деформирования изотропных материалов, чувствительных к виду напряженного состояния, предполагается, что деформационные свойства материалов зависят от параметра  $\xi = \sigma/\sigma_0$ , где  $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$  – гидростатическая компонента напряжений,  $\sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}}$  – интенсивность напряжений,  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$  – девиатор напряжений [1]. Данный параметр характеризует в среднем вид напряженного состояния, поскольку  $\sigma$  представляет собой среднее нормальное напряжение в точке сплошной среды, а  $\sigma_0$  – среднее значение касательного напряжения в этой же точке [2].

Потенциал для изотропного тела с зависящими от вида напряженного состояния упругими свойствами может быть представлен в виде [1]:

$$\Phi = \frac{1}{2}[1 + \zeta(\xi)](A + B\xi^2)\sigma_0^2 \tag{1.1}$$

При  $\zeta(\xi) \equiv 0$  выражение (1.1) совпадает с потенциалом для классического линейно-упругого тела, для которого  $A = 2(1 + \nu)/3E$ ,  $B = 3(1 - 2\nu)/E$ .

Дифференцируя выражение (1.1) по  $\sigma_{ij}$ , получим зависимость деформаций от напряжений

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2}\omega(\xi)S_{ij} + \frac{1}{3}\Omega(\xi)\sigma\delta_{ij} \\ \omega(\xi) &= -\frac{1}{2}(A + B\xi^2)\zeta'(\xi)\xi + A[1 + \zeta(\xi)] \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\Omega(\xi) = \frac{1}{2}(A + B\xi^2)\zeta'(\xi)\xi^{-1} + B[1 + \zeta(\xi)]$$

Функции  $\omega(\xi)$  и  $\Omega(\xi)$  и их производные связаны соотношениями

$$\omega + \xi^2\Omega = (A + B\xi^2)[1 + \zeta(\xi)], \quad \omega' + \xi^2\Omega' = 0 \tag{1.3}$$

Согласно соотношениям (1.2) между интенсивностью деформаций  $\epsilon_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} e_{ij} e_{ij}$ , где  $e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon \delta_{ij}$ , и объемной деформацией  $\epsilon = \epsilon_{ii}$  существует взаимосвязь  $\epsilon = [\Omega(\xi)/\omega(\xi)]\epsilon_0$ , т.е. сдвиговые деформации вызывают изменение объема.

Соотношения (1.1), (1.2) можно разрешить относительно напряжений и представить их в виде

$$U = \frac{1}{2} [1 + \eta(\gamma)] (1/A + \gamma^2/B) \epsilon_0^2$$

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{3} \psi(\gamma) e_{ij} + \Psi(\gamma) \epsilon \delta_{ij} \quad (1.4)$$

$$\psi(\gamma) = -\frac{1}{2} (1/A + \gamma^2/B) \eta'(\gamma) \gamma + 1/A [1 + \eta(\gamma)]$$

$$\Psi(\gamma) = \frac{1}{2} (1/A + \gamma^2/B) \eta'(\gamma) \gamma^{-1} + 1/B [1 + \eta(\gamma)]$$

Здесь  $\gamma = \epsilon/\epsilon_0$  – параметр вида деформированного состояния.

Соотношения (1.1)–(1.4) принимают наиболее простой вид в случае линейной функции  $\omega(\xi) = A + C\xi$ , которая была использована при анализе экспериментальных данных для некоторых материалов [3]. Тогда согласно (1.3) функция  $\Omega(\xi) = B + C/\xi$ , и соотношения имеют вид

$$\Phi = \frac{1}{2} (A\sigma_0^2 + 2C\sigma\sigma_0 + B\sigma^2)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{3}{2} (A + C\xi) S_{ij} + \frac{1}{3} (B + C/\xi) \sigma \delta_{ij}$$

$$U = \frac{1}{2} (B\epsilon_0^2 - 2C\epsilon_0\epsilon + A\epsilon^2) (AB - C^2)^{-1}$$

$$\sigma_{ij} = [\frac{2}{3} (B - C\gamma) e_{ij} + (A - C/\gamma) \epsilon \delta_{ij}] (AB - C^2)^{-1}$$

В областях с непрерывно меняющимся видом напряженного состояния упругие свойства среды, характеризующиеся функциями  $\omega(\xi)$  и  $\Omega(\xi)$  или  $\psi(\xi)$  и  $\Psi(\xi)$ , изменяются непрерывно. Для частного вида определяющих соотношений (1.2) или (1.4), представленных зависимостями (1.5), решение краевых задач единственно при  $C^2 < AB$ . При  $C = 0$  соотношения (1.5) совпадают с соотношениями для классического линейно упругого тела.

**2. О невозможности использования гипотез Сен-Венана.** Исследования кручения как упругих, так и упругопластических призматических стержней обычно основываются на гипотезах Сен-Венана [4, 5], согласно которым, если ось  $x_3$  направлена вдоль оси стержня, а  $x_1$  и  $x_2$  лежат в плоскости поперечного сечения, то компоненты перемещения выражаются следующим образом:

$$u_1 = -\alpha x_2 x_3, \quad u_2 = \alpha x_1 x_3, \quad u_3 = \varphi(x_1, x_2, \alpha) \quad (2.1)$$

Исследуем возможность применения данных гипотез в задачах кручения стержней из материалов, поведение которых описывается соотношениями (1.4). Согласно (2.1) объемная деформация  $\epsilon = 0$ , интенсивность деформаций

$$\epsilon_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} (\epsilon_{13}^2 + \epsilon_{23}^2)^{1/2}, \quad \epsilon_{13} = \frac{1}{2} (-\alpha x_2 + \varphi_{,1}), \quad \epsilon_{23} = \frac{1}{2} (\alpha x_1 + \varphi_{,2}) \quad (2.2)$$

Таким образом, всюду в стержне параметр вида деформированного состояния  $\gamma = 0$ . Согласно соотношениям (1.4) компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \eta'(0) / A, \quad \sigma_{12} = 0$$

$$\sigma_{13} = \frac{2}{3} \psi(0) \epsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = \frac{2}{3} \psi(0) \epsilon_{23}$$

Из уравнений равновесия  $\sigma_{ij,j} = 0$  находим

$$\eta'(0) \epsilon_{0,1} = 0, \quad \eta'(0) \epsilon_{0,2} = 0, \quad \varphi_{,11} + \varphi_{,22} = 0 \quad (2.3)$$

Поскольку в общем случае  $\eta'(0)$  отлично от нуля, то из (2.3) следует, что всюду в стержне интенсивность деформаций  $\varepsilon_0 = \Lambda = \text{const}$ . Это условие может быть выполнено, если предположить, что деформации  $\varepsilon_{13}$  и  $\varepsilon_{23}$  постоянны в поперечном сечении стержня. Тогда из (2.2) следует, что  $\varphi_{,12} = \alpha$ , а  $\varphi_{,21} = -\alpha$ . Равенство этих производных возможно только в том случае, если угол кручения  $\alpha = 0$ , т.е. кручение не происходит.

Рассмотрим другой случай, когда деформации в сечении стержня не постоянны. Удовлетворяя условию  $\varepsilon_0 = \Lambda$ , можно положить  $\varepsilon_{13} = \lambda \cos \beta$ ,  $\varepsilon_{23} = \lambda \sin \beta$ , где  $\beta = \beta(x_1, x_2)$ ,  $\lambda = \sqrt{3}\Lambda/2$ . Согласно выражениям (2.2) получим два равенства:

$$-\alpha x_2 + \varphi_{,1} = 2\lambda \cos \beta, \quad \alpha x_1 + \varphi_{,2} = 2\lambda \sin \beta \quad (2.4)$$

Вычисляя с помощью (2.4) производные  $\varphi_{,11}$  и  $\varphi_{,22}$  и подставляя их в последнее уравнение (2.3), а также используя условие  $\varphi_{,12} = \varphi_{,21}$ , получим систему уравнений в частных производных для функции  $\beta(x_1, x_2)$ :

$$-\sin \beta \beta_{,1} + \cos \beta \beta_{,2} = 0, \quad \cos \beta \beta_{,1} + \sin \beta \beta_{,2} = \alpha / \lambda \quad (2.5)$$

Из уравнений (2.5) находим

$$\beta_{,1} = (\alpha / \lambda) \cos \beta, \quad \beta_{,2} = (\alpha / \lambda) \sin \beta$$

Вычислим производные

$$\beta_{,12} = -\frac{\alpha}{\lambda} \sin \beta \beta_{,2} = -\frac{\alpha^2}{\lambda^2} \sin^2 \beta, \quad \beta_{,21} = \frac{\alpha}{\lambda} \cos \beta \beta_{,1} = \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \cos^2 \beta$$

На основе последних выражений убеждаемся, что равенство производных  $\beta_{,12}$  и  $\beta_{,21}$  невозможно, т.е. в случае непостоянных деформаций  $\varepsilon_{13}$  и  $\varepsilon_{23}$  в сечении стержня удовлетворить уравнениям (2.3) не представляется возможным.

Следовательно, при анализе кручения стержней из материалов, деформационные свойства которых зависят от вида напряженного состояния, гипотезы Сен-Венана не могут быть использованы без соответствующей корректировки. Это связано с тем, что в рассматриваемых материалах сдвиговые и объемные деформации взаимосвязаны.

**3. Постановка задач кручения.** При определении перемещений будем исходить из общей постановки, в которой учитывается поворот сечения и, дополнительно, зависимость от пространственных координат

$$u_1 = -\alpha x_2 x_3 + \Psi_1(x_1, x_2, x_3) \quad (3.1)$$

$$u_2 = \alpha x_1 x_3 + \Psi_2(x_1, x_2, x_3), \quad u_3 = \Psi_3(x_1, x_2, x_3)$$

Если рассматривать достаточно длинный стержень и при этом граничные условия на боковой поверхности стержня не зависят от  $x_3$ , то можно считать, что напряжения и деформации также не зависят от  $x_3$ , т.е.  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2)$ ,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_1, x_2)$ . Некоторые свойства функций  $\Psi_i(x_1, x_2, x_3)$  можно установить, воспользовавшись условиями совместности деформаций

$$\varepsilon_{ik,js} - \varepsilon_{jk,is} = \varepsilon_{is,jk} - \varepsilon_{js,ik} \quad (3.2)$$

Из уравнений (3.2) следует, что

$$\varepsilon_{33,11} = 0, \quad \varepsilon_{33,22} = 0, \quad \varepsilon_{33,12} = 0$$

$$(\varepsilon_{13,2} - \varepsilon_{23,1})_{,1} = 0, \quad (\varepsilon_{13,2} - \varepsilon_{23,1})_{,2} = 0 \quad (3.3)$$

Тогда  $\varepsilon_{33} = u_{3,3} = k_0 + k_1 x_1 + k_2 x_2$  и функция  $\Psi_3$  имеет вид

$$\Psi_3 = (k_0 + k_1 x_1 + k_2 x_2) x_3 + \varphi_3(x_1, x_2) \quad (3.4)$$

Воспользовавшись выражениями (3.1) и (3.4), найдем

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) = \frac{1}{2}(-\alpha x_2 + \Psi_{1,3} + k_1 x_3 + \Phi_{3,1})$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) = \frac{1}{2}(\alpha x_1 + \Psi_{2,3} + k_2 x_3 + \Phi_{3,2})$$

Поскольку деформации  $\varepsilon_{13}$  и  $\varepsilon_{23}$  не зависят от  $x_3$ , то должно выполняться  $\Psi_{1,3} = -k_1 x_3$ ,  $\Psi_{2,3} = -k_2 x_3$ . На основании этих равенств находим выражения для функций  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ :

$$\Psi_1 = -\frac{1}{2}k_1 x_3^2 + \Phi_1(x_1, x_2), \quad \Psi_2 = -\frac{1}{2}k_2 x_3^2 + \Phi_2(x_1, x_2)$$

В результате получаем следующие выражения для перемещений:

$$u_1 = -\alpha x_2 x_3 - \frac{1}{2}k_1 x_3^2 + \Phi_1(x_1, x_2)$$

$$u_2 = \alpha x_1 x_3 - \frac{1}{2}k_2 x_3^2 + \Phi_2(x_1, x_2) \quad (3.5)$$

$$u_3 = (k_0 + k_1 x_1 + k_2 x_2)x_3 + \Phi_3(x_1, x_2)$$

При этом вытекающее из (3.3) условие  $\varepsilon_{13,2} - \varepsilon_{23,1} = \text{const}$  выполняется, эта константа равна  $-\alpha$ . Таким образом, все уравнения совместности деформаций удовлетворяются и определению подлежат три функции  $\Phi_i$  и три коэффициента  $k_0, k_1$  и  $k_2$ .

Определяя на основе (3.5) выражения для компонентов тензора деформаций и подставляя их в определяющие соотношения (1.4) и уравнения равновесия, получим систему уравнений для нахождения функций  $\Phi_i$ :

$$\frac{2}{3}\Phi(\gamma)\varepsilon_{ij,j} + [-\frac{2}{9}\Psi(\gamma) + \Psi'(\gamma)]\varepsilon_{,i} + \frac{2}{3}\Psi'(\gamma)\varepsilon_{ij}\gamma_{,j} + [-\frac{2}{9}\Psi'(\gamma) + \Psi''(\gamma)]\varepsilon\gamma_{,i} = 0 \quad (3.6)$$

$$\varepsilon = \Phi_{1,1} + \Phi_{2,2} + \Phi_{3,3}, \quad \gamma = \sqrt{3}\varepsilon[\frac{1}{3}(\Phi_{1,1}^2 + \Phi_{2,2}^2 + \Phi_{3,3}^2 - \Phi_{1,1}\Phi_{2,2} - \Phi_{2,2}\Phi_{3,3} - \Phi_{3,3}\Phi_{1,1}) + (\Phi_{1,2} + \Phi_{2,1})^2 + (-\alpha x_2 + \Phi_{3,1})^2 + (\alpha x_1 + \Phi_{3,2})^2]$$

Используя (1.4), в уравнениях (3.6) можно выделить линейную часть и представить их в виде

$$\frac{2}{3A}\varepsilon_{ij,j} + \left(-\frac{2}{9A} + \frac{1}{B}\right)\varepsilon_{,i} = -f_i \quad (3.7)$$

$$f_i = [\eta(\gamma)/A - \frac{1}{2}D\eta'(\gamma)]\varepsilon_{ij,j} + [K\eta(\gamma) + LD\eta'(\gamma)]\varepsilon_{,i} + [D(\eta'(\gamma) - \eta''(\gamma)) - 4\eta'(\gamma)/B](\frac{1}{3}\varepsilon_{ij} - L\varepsilon\delta_{ij})\gamma_{,j}$$

$$D = 1/A + \gamma^2/B, \quad K = -2/(9A) + 1/B, \quad L = 1/9 + 1/(2\gamma^2)$$

Граничные условия на боковой поверхности стержня могут быть представлены в виде:

$$\frac{2}{3}\Psi(\gamma)(\varepsilon_{11}n_1 + \varepsilon_{12}n_2) + [\Psi(\gamma) + \frac{2}{9}\Psi(\gamma)]\varepsilon n_1 = T_1$$

$$\frac{2}{3}\Psi(\gamma)(\varepsilon_{12}n_1 + \varepsilon_{22}n_2) + [\Psi(\gamma) + \frac{2}{9}\Psi(\gamma)]\varepsilon n_2 = T_2 \quad (3.8)$$

$$\frac{2}{3}\Psi(\gamma)(\varepsilon_{13}n_1 + \varepsilon_{23}n_2) = T_3$$

При решении задач кручения с использованием гипотез Сен-Венана, выраженных формулами (2.1), компоненты поверхностных усилий  $T_1$  и  $T_2$  должны быть равны нулю. Для полученного поля перемещений, представленного формулами (3.5), данное требование в общем случае снимается. На основе (3.8) можно представить граничное условие для функции  $\Phi_3$  в виде:

$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = \alpha(x_2 n_1 - x_1 n_2) + \frac{3}{2}\frac{T_3}{\Psi(\gamma)} \quad (3.9)$$

где  $\Gamma$  – контур поперечного сечения. Если  $T_3 = 0$ , то (3.9) совпадает с соответствующим граничным условием в задачах кручения с использованием выражений для перемещений в виде (2.1). Решение системы уравнений (3.7) с граничными условиями (3.8) можно получить с помощью метода последовательных приближений. Условия сходимости данного метода при использовании определяющих соотношений (1.4) сформулированы в работе [6].

Коэффициенты  $k_i$  в выражениях (3.5) определяются из условия равновесия торцевых сечений или кинематическими условиями на концах стержня, например, в случае стесненного кручения. Для определения коэффициентов  $k_i$  имеем три условия для осевой силы  $P$ , изгибающего момента  $M_1$  относительно оси  $x_1$  и момента  $M_2$  относительно оси  $x_2$ , которые определяются выражениями

$$\int_S \sigma_{33} dS = P, \quad \int_S \sigma_{33} x_2 dS = M_1, \quad \int_S \sigma_{33} x_1 dS = M_2 \quad (3.10)$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения стержня.

**4. Стесненное кручение стержня прямоугольного поперечного сечения.** Проиллюстрировать некоторые особенности решения задач кручения стержней из материалов с изменяющимися в зависимости от вида нагружения или вида деформирования упругими свойствами можно на основе приближенного решения задачи для стержня с поперечным сечением в виде вытянутого прямоугольника. Для того, чтобы исключить изгиб поперечного сечения в плоскости  $x_1, x_2$ , будем считать, что к торцевым сечениям прикреплены жесткие полоски, как изображено на фигуре. При этом  $-l \leq x_1 \leq l, 0 \leq x_2 \leq h$  и  $h \ll l$ . При построении приближенного решения потребуем удовлетворения граничным условиям на коротких сторонах прямоугольника в интегральной форме. Боковые грани, соответствующие длинным сторонам прямоугольника, свободны от напряжений, т.е. на них  $T_1 = T_2 = T_3 = 0$ .

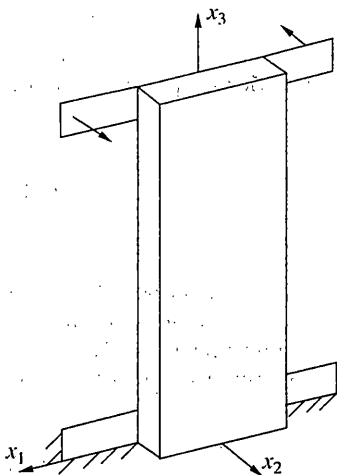
Рассмотрим случай, когда кручение не сопровождается осевой деформацией, т.е. расстояние между жесткими полосками не меняется и  $\epsilon_{33} = 0$ . Тогда в формулах (3.5) следует положить  $k_0 + k_1 x_1 + k_2 x_2 = 0$ . Поскольку деформации не зависят от  $x_3$ , то все коэффициенты  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ . Тогда выражения (3.5) примут вид

$$\begin{aligned} u_1 &= -\alpha x_2 x_3 + \varphi_1(x_1, x_2) \\ u_2 &= \alpha x_1 x_3 + \varphi_2(x_1, x_2), \quad u_3 = \varphi_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Естественно считать, что условия на торцах не меняются вдоль оси  $x_1$ . Тогда напряжения и деформации являются функциями только координаты  $x_2$ .

Ввиду тонкости стержня напряжения  $\sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$ . При этом из (1.4) следует, что деформации  $\epsilon_{12} = \epsilon_{23} = 0$ . Поскольку согласно (3.5) деформация  $\epsilon_{23} = \frac{1}{2}(\alpha x_1 + \varphi_{3,2})$ , то из условия  $\epsilon_{23} = 0$  найдем  $\varphi_3 = -\alpha x_1 x_2 + f_3(x_1)$ . При этом деформация  $\epsilon_{13} = -\alpha x_2 + \frac{1}{2} f_3'(x_1)$ . Поскольку деформации не зависят от  $x_1$ , производная функции  $f_3'(x_1) = 0$ , или  $f_3 = \text{const}$ , что соответствует перемещению стержня как жесткого, и можно положить  $f_3 = 0$ . Таким образом, функция  $\varphi_3 = -\alpha x_1 x_2$ .

Из (3.5) следует, что деформации  $\epsilon_{11}$  и  $\epsilon_{22}$  могут быть отличными от нуля. Так как деформации зависят только от  $x_2$ , положим  $\epsilon_{22} = \varphi_{22} = f_2'(x)$ . Тогда производная  $\varphi_{2,21} = 0$ . Поскольку деформация  $\epsilon_{12} = 0$ , функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  связаны соотношением  $\varphi_{2,1} = -\varphi_{1,2}$ , из



которого следует, что  $\varphi_{1,22} = 0$ . На основании этих равенств можно положить  $\varphi_{1,2} = F'_1(x_1)$ ,  $\varphi_{2,1} = -F'_1(x_1)$ . Интегрируя последние равенства, получим  $\varphi_1 = x_2 F'_1(x_1) + f_1(x_1)$ ,  $\varphi_2 = -F_1(x_1) + f_2(x_2)$ . Исходя из условия  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_2)$ , находим  $F''_1(x_1) = 2k = \text{const}$  и  $f_1(x_1) = \text{const}$ , т.е. функцию  $f_1$  можно положить равной нулю. Тогда  $F'_1(x_1)$  – линейная функция  $x_1$ . Таким образом, функции  $\varphi_1 = 2kx_1x_2$ ,  $\varphi_2 = -kx_1^2 + f_2(x_2)$ .

Если на коротких сторонах стержня граничное усилие  $T_1 = 0$ , то всюду в стержне напряжение  $\sigma_{11} = 0$ , поскольку напряжения не зависят от  $x_1$ . Таким образом, напряжения  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$  и деформации  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$ . В результате получим

$$\varphi_1 = 2kx_1x_2, \quad \varphi_2 = k(x_2^2 - x_1^2), \quad \varphi_3 = -\alpha x_1x_2 \quad (4.2)$$

С помощью выражений (4.1) и (4.2) найдем деформации

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 2kx_2, \quad \varepsilon_{13} = -\alpha x_2, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0 \quad (4.3)$$

На основе (3.6) и (4.2) можно определить параметр вида напряженного состояния. Он принимает постоянное значение

$$\gamma = \frac{6k}{\sqrt{4k^2 + 3\alpha^2}} \quad (4.4)$$

Это означает, что всюду в стержне реализуется один и тот же вид деформированного состояния.

Для определения напряжений воспользуемся конкретным видом зависимости между напряжениями и деформациями (1.5). Согласно условию  $\sigma_{22} = 0$  можно выразить значение параметра  $\gamma$  через упругие свойства материала. При этом имеем уравнение  $C\gamma^2 - (B + 9A)\gamma + 9C = 0$ . Из двух корней уравнения следует выбрать тот, который включает значение  $\gamma = 0$  при  $C = 0$ , что соответствует решению для линейно упругого материала. В результате находим значение

$$\gamma = \frac{1}{2}(K - \sqrt{K^2 - 36}), \quad K = (B + 9A)/C \quad (4.5)$$

Сравнивая (4.4) и (4.5), получаем связь между коэффициентом  $k$  и углом кручения  $\alpha$ . Она имеет вид

$$k = \alpha \frac{\sqrt{3}(K - \sqrt{K^2 - 36})}{2\sqrt{36 - (K - \sqrt{K^2 - 36})^2}} \quad (4.6)$$

При получении формулы (4.6) учитывалось, что  $K^2 - 36 > 0$ . Нетрудно показать, что это более широкое ограничение, чем условие единственности решения краевых задач.

Используя (1.5) и (4.3), можно определить действующие в поперечном сечении стержня напряжения

$$\sigma_{13} = \alpha x_2 \frac{2(B - C\gamma)}{3(AB - C^2)}$$

$$\sigma_{33} = 4kx_2 \left[ A - \frac{2}{9}B + C \left( \frac{2}{9}\gamma - \frac{1}{\gamma} \right) \right] \frac{1}{AB - C^2}$$

В отличие от задач кручения в классической постановке нормальное напряжение  $\sigma_{33}$  не равно нулю, а зависит от координат в плоскости поперечного сечения. Таким образом, согласно (3.10) на торцах стержня кроме крутящего момента действует про-

дольное усилие, для которых получаем выражения

$$M = \int_0^h \int_{-l}^l \sigma_{13} x_2 dx_1 dx_2 = \frac{4lh^3 \alpha}{9(AB - C^2)} \left( B - \frac{6kC}{\sqrt{4k^2 + 3\alpha^2}} \right) \quad (4.7)$$

$$P = \int_0^h \int_{-l}^l \sigma_{33} dx_1 dx_2 = 4k \left( A - \frac{2}{9} B + \frac{4k^2 - 3\alpha^2}{6k\sqrt{4k^2 + 3\alpha^2}} C \right) \frac{lh^2}{AB - C^2}$$

Здесь  $k$  определяется выражением (4.6).

Для найденных функций  $\varphi_i$ , представленных выражениями (4.2), два первых граничных условия (3.8) выполняются при  $T_1 = T_2 = 0$ , но на коротких сторонах поперечного сечения необходимо приложить постоянную касательную нагрузку

$$T_3 = \frac{1}{h} \int_0^h \sigma_{13} dx_2 = -\frac{h\alpha}{3(AB - C^2)} \left( B - \frac{6kC}{\sqrt{4k^2 + 3\alpha^2}} \right)$$

Кроме того в торцевых сечениях согласно (3.10) возникает изгибающий момент относительно оси  $x_1$ :

$$M_1 = \frac{8}{3} k \left[ A - \frac{2}{9} B + C \left( \frac{2}{9} \gamma - \frac{1}{\gamma} \right) \right] \frac{lh^3}{AB - C^2}$$

где параметр  $\gamma$  имеет значение (4.5). Данный момент возникает вследствие реакции на стеснение, при котором в процессе кручения расстояние между торцами стержня не меняется.

С помощью соотношений (1.5) наряду с упругими характеристиками может быть описано различие, например, модулей упругости при одноосном сжатии  $E^-$  и одноосном растяжении  $E^+$ . В таблице для разных значений коэффициента  $C$  приведены величины отношения модулей упругости, объемной деформации к сдвиговой, относительные величины крутящего момента и осевой силы. Отношение  $B/A$  принято равным  $5/3$ , что не оказывает существенного влияния на результаты. Для различных материалов оно колеблется в пределах от 1.3 до 3.

При положительных значениях коэффициента  $C$  материал более жесткий в условиях действия сжимающих напряжений по сравнению с упругими свойствами при действии растягивающих. При  $C > 0$  происходит объемное расширение материала, а при  $C < 0$  — объемное сжатие. При  $C = 0$  деформации  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$ , осевая сила  $P = 0$ , крутящий момент  $M = M_0 = \alpha 4lh^3/(9A)$ , что соответствует величине момента для линейно упругого тела. Величина продольной сжимающей силы возрастает пропорционально углу кручения, который в свою очередь пропорционален моменту. Для рассматриваемых значений  $C/A$  величины крутящего момента превышают значение, рассчитанное без учета зависимости свойств материала от вида напряженного состояния, но это различие незначительное. Для осевой силы наблюдается более существенная зависимость от параметра  $C$  чувствительности свойств материала к изменению вида напряженного состояния. Поскольку коэффициент  $A$  характеризует податливость материала, то при соответствующих углах кручения  $\alpha$  сжимающая сила может достигать значительных величин.

**5. Свободное кручение стержня.** Рассмотрим случай, когда в торцевых сечениях стержня продольная сила  $P$  и момент  $M_1$  равны нулю. При этом возможно появление осевой деформации  $\epsilon_{33}$ , поскольку в рассматриваемых материалах сдвиговая деформация вызывает изменение объема. В рамках принятого приближения, как и в предыдущем случае, приходим к выводу, что напряжения и деформации зависят только от координаты  $x_2$ . Тогда в формулах (3.5) следует положить коэффициент  $k_1 = 0$ . Испол-

$C/A$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$E^-/E^+$	1.25	1.41	1.58	1.78	2.02
$\epsilon/\epsilon_{13}$	0.196	0.296	0.397	0.502	0.612
$M/M_0$	1.004	1.008	1.015	1.025	1.033
$PA/(lh^2\alpha)$	-0.036	-0.053	-0.069	-0.084	-0.089

зую условия  $\epsilon_{12} = \epsilon_{23} = 0$  и  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ , находим, что функции  $\phi_i$  совпадают с выражениями (4.2), полученными для случая стесненного кручения. Тогда деформации  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 2kx_2$ ,  $\epsilon_{33} = k_2x_2 + k_0$ ,  $\epsilon_{13} = -\alpha x_2$ ,  $\epsilon_{12} = \epsilon_{23} = 0$ . При этом для свободного кручения должны выполняться условия

$$\int_0^h \int_{-l}^l \sigma_{33} dx_1 dx_2 = 0, \quad \int_0^h \int_{-l}^l x_2 \sigma_{33} dx_1 dx_2 = 0 \quad (5.1)$$

Из условий (5.1) в отсутствие изгиба следует, что  $\sigma_{33} = 0$ , но тогда  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33}$ . В результате находим  $k_0 = 0$ ,  $k_2 = 2k$ . При этом компоненты перемещения имеют вид

$$\begin{aligned} u_1 &= -\alpha x_2 x_3 + 2kx_1 x_2 \\ u_2 &= \alpha x_1 x_3 + k(x_2^2 - x_1^2 - x_3^2) \\ u_3 &= -\alpha x_1 x_2 + 2kx_2 x_3 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Определяя на основе (5.2) деформации, приходим к выводу, что в стержне реализуется однородный вид деформированного состояния с параметрами  $\gamma = 3\sqrt{3}k/\alpha$ . Из соотношений (1.5) и условия  $\sigma_{ii} = 0$  находим, что  $\gamma = C/A$ . Сравнивая эти два значения, получим связь между параметром  $k$  и углом кручения  $\alpha$ , которая имеет вид

$$k = \frac{C}{3\sqrt{3}A} \alpha \quad (5.3)$$

Вычисляя с помощью (1.5), (5.2) и (5.3) напряжения, а затем крутящий момент, приходим к заключению, что выражение для момента отличается от соответствующего выражения (4.7) для стесненного кручения и совпадает с величиной момента для упругого тела, свойства которого инвариантны к условиям нагружения,  $M = M_0$ . Для реализации поля перемещений (5.2) на узких сторонах боковой поверхности стержня должна быть приложена равномерная касательная нагрузка  $T_3 = -h\alpha/(3A)$ .

Найденные решения являются приближенными, поскольку при их получении пренебрегали конечностью размера  $2l$  сечения стержня в направлении оси  $x_1$  и граничные условия на коротких сторонах сечения удовлетворялись в интегральной форме. Некоторые предварительные результаты по исследованию форм представления решений задач кручения стержней из рассматриваемых материалов были получены в [7].

**6. Заключение.** На основе проведенного анализа установлено, что при исследовании кручения стержней из материалов, упругие свойства которых зависят от вида напряженного состояния, гипотезы Сен-Венана не могут быть использованы. Найдена соответствующая форма представления компонентов перемещения в декартовой системе координат. Показано, что кручение стержня сопровождается изменением объема материала, причем величина объемной деформации может достигать величин, сравнимых со сдвиговой деформацией. В условиях стесненного кручения возможно появление изгибающих моментов и сжимающей осевой силы, величина кото-



рой может быть значительной, что наглядно продемонстрировано в случае кручения стержня с тонким прямоугольным поперечным сечением.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02-01-00077) и Минобразования РФ, программа "Университеты России" (грант УР. 04.03.005).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 29–34.
2. Новожилов В.В. О физическом смысле инвариантов, используемых в теории пластичности // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 5. С. 615–619.
3. Ломакин Е.В. Разномодульность композитных материалов // Механика композитных материалов. 1981. № 1. С. 23–29.
4. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз. 1958. 370 с.
5. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука. 1969. 420 с.
6. Ломакин Е.В., Гаспарян Г.О. О средах, чувствительных к виду напряженного состояния // Сб.: Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1984. С. 59–76.
7. Ломакин Е.В., Казанцев М.П. Особенности кручения стержней из материалов, свойства которых зависят от вида напряженного состояния // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1995. № 2. С. 56–61.

Москва

Поступила в редакцию  
9.04.2002